

# Baumdiagramme und Einheitsquadrate 4.0

VICTORIA DÖLLER UND STEFAN GÖTZ, WIEN

**Zusammenfassung:** Baumdiagramme und Einheitsquadrate sind zentrale Werkzeuge zur Untersuchung stochastischer Fragestellungen im Unterricht. Während erstere im Unterricht bereits etabliert sind, haben sich zweite aufgrund des Konstruktionsaufwands noch nicht durchsetzen können, was durch eine geeignete Software-Lösung behoben werden kann. Im Folgenden werden die didaktischen Anforderungen an eine solche Software zusammengetragen und die darauf basierende didaktische Software PROVIS – Probability Visualized vorgestellt.

## 1 Rauchen – ein männliches oder weibliches Laster?

Nach einer Hochrechnung der Statistik Austria<sup>1</sup> zählte Österreich im Jahr 2019 ca. 2,94 Mio Nichtraucherinnen über 15 Jahre. Bei den Männern hingegen lag die Nichtraucheranzahl nur bei ca. 2,53 Mio Personen über 15 Jahre. Tendieren Männer daher eher zum Rauchen? Insgesamt gesehen liegt der Frauenanteil der über 15-jährigen in Österreich mit 3,794 Mio über dem der Männer mit 3,624 Mio. Lässt sich der Unterschied in den Anzahlen der Nichtraucher bzw. Nichtraucherinnen hiermit erklären?

Fragestellungen wie diese können im Schulunterricht als monotone Rechenbeispiele zur Ermittlung von Prozentsätzen dienen. Sie können aber auch mit Hilfe geeigneter Visualisierungsmethoden aufbereitet werden, sodass Schülerinnen und Schüler diese visuell „begreifen“ und damit leichter ein Verständnis von Grundgesamtheit und Anteil entwickeln können. Ein bekanntes und bewährtes Mittel zur Strukturierung derartiger Daten ist das Baumdiagramm. Ein (in Österreich) weniger bekanntes, aber besonders nützliches Instrument für diese und ähnliche Fragestellungen ist das Einheitsquadrat – eine Visualisierungsmethode, die Zahlen und Beziehungen nicht nur textuell abbildet, sondern auch grafisch in Flächen, Längen und deren Verhältnissen. In Abbildung 1 sind oben genannte Daten mit beiden Methoden dargestellt. Darüber hinaus sind die „Zeilensummen“ bzw. „Spaltensummen“ im Einheitsquadrat angezeigt.

Wer ein Einheitsquadrat zu lesen weiß, kann direkt aus der Abbildung erkennen, dass unter den Frauen der relative Anteil der Nichtraucher höher ist, als unter den Männern: Unterschiedliche Höhen des lin-

ken bzw. rechten unteren Rechtecks im Einheitsquadrat belegen dies. Unsere eingangs gestellte These, dass Frauen weniger zur Zigarette tendieren, wurde also durch die Daten bestätigt.

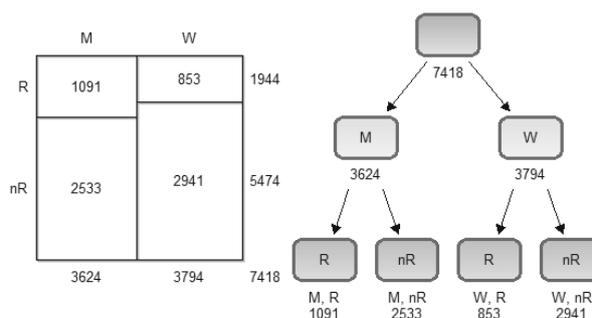


Abb. 1: Raucherverhalten in Österreich, Zahlen in Tausend

Während Baumdiagramme leicht mit der Hand gezeichnet werden können, stellt sich die Konstruktion von Einheitsquadraten komplizierter und zeitintensiver dar. Durch den Aufwand der händischen Zeichnung tritt der Nutzen in den Hintergrund – eine Einschränkung, die durch eine geeignete Softwareunterstützung hintangestellt werden kann. Auch Baumdiagramme können durch eine Digitalisierung an Nutzen gewinnen.

## 2 PROVIS – Probability Visualized

PROVIS ist eine Software, die eine Modellierungsoberfläche für Baumdiagramme und Einheitsquadrate bietet und frei heruntergeladen werden kann<sup>2</sup>. Sie bietet allgemeine Funktionen, wie das Speichern, Verwalten, Durchsuchen und Wiederverwenden der erstellten Diagramme, Export von Diagrammen als xml-Datei für die Distribution an Schülerinnen und Schüler oder das Generieren von Grafiken in verschiedenen Bildformaten. Die Interaktion mit den einzelnen Elementen in den Diagrammen erfolgt über ein Notebook, das per Doppelklick auf das Element aufgerufen wird. Außerdem wurden spezifische Funktionen integriert, um didaktischen Anforderungen gerecht zu werden.

ProVIS

### 3 Anforderungen an ein didaktisch-technologisches Werkzeug für Baumdiagramme und Einheitsquadrate

Ein digitales Werkzeug in der Stochastik hat das Potential den Wissenserwerb in vielerlei Hinsicht zu unterstützen, etwa durch das schnelle und einfache Erstellen von interaktiven Grafiken und die Automatisierung von komplexen Konstruktionen und Berechnungen (Wolpers und Götz, 2002, Abschnitt 2.2). Gerade im Stochastikunterricht sehen Vogel und Eichler (2014) den Technologieeinsatz als Möglichkeit, eine vertiefte Begriffsbildung bei den Schülerinnen und Schülern zu erreichen. Für den schulischen Einsatz muss ein derartiges Werkzeug den fachlichen und didaktischen Anforderungen des Themengebiets gerecht werden. In Bezug auf Einheitsquadrate und Baumdiagramme formulieren wir im Folgenden sieben fachlich, didaktisch und funktional motivierte Anforderungen (für eine ausführliche Herleitung der Anforderungen siehe Döller (2020) und die im Artikel angeführten Zitate). Wir illustrieren diese jeweils anhand von Beispielen, um auf diese Weise die Funktionalitäten von PROVIS praxisnah zu präsentieren.

In den ersten beiden Abschnitten formulieren wir Anforderungen, die die stochastischen Methoden „Baumdiagramm“ bzw. „Einheitsquadrat“ betreffen. Im letzten Abschnitt setzen wir einen fachdidaktischen Schwerpunkt.

#### 3.1 Baumdiagramme

Baumdiagramme sind ein universelles Werkzeug im Stochastikunterricht mit einer ganzen Reihe von verschiedenen Ausprägungen und Funktionen. Sie dienen unter anderem als Strukturierungshilfe, Denkwerkzeug, Argumentationsbasis und als Grundlage für Berechnungen mit den Pfadregeln (Krüger et al., 2015, S. 131).

Außerdem dienen Baumdiagramme als Mittler zwischen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten (Wolpers und Götz, 2002, S. 238).

Baumdiagramme bieten Unterstützung, angefangen vom ersten Modellieren eines zweistufigen Zufallsvorgangs bis hin zur Herleitung des Satzes von BAYES und darüber hinaus und können damit in allen Stadien des Lernprozesses eingesetzt werden.

**Anforderung 1 – Verschiedene Typen von Baumdiagrammen realisieren** *Ein digitales Werkzeug zur Unterstützung der Modellierung mit Baumdiagram-*

*men soll sowohl die Erstellung von Wahrscheinlichkeitsbäumen als auch von Häufigkeitsbäumen ermöglichen, ebenso wie von vollständigen und unvollständigen, sowie von reduzierten Bäumen.*

Ein Paradebeispiel dazu sind medizinische Tests mit ihren Kennzahlen der Spezifität und Sensitivität, bei denen die Beschreibung abhängig von der Prävalenz mit Häufigkeitsbäumen zu mehr Anschaulichkeit im Vergleich zu jener mit Wahrscheinlichkeitsbäumen führen kann, siehe zum Beispiel Krauss (2003) oder Sedlmeier und Gigerenzer (2001) (natural frequency hypothesis).

**Beispiel 1** Wir erhalten einen reduzierten Baum, indem wir uns zum Beispiel beim Wurf mit vier Würfeln auf die Ereignisse eine Sechser zu würfeln bzw. keine Sechser zu würfeln beschränken (Ereignisraum  $T$ ), siehe Abbildung 2. Fokussiert man nur auf Würfe mit genau einem Sechser, wird das durch einen unvollständigen Baum beschrieben, siehe Abbildung 3.

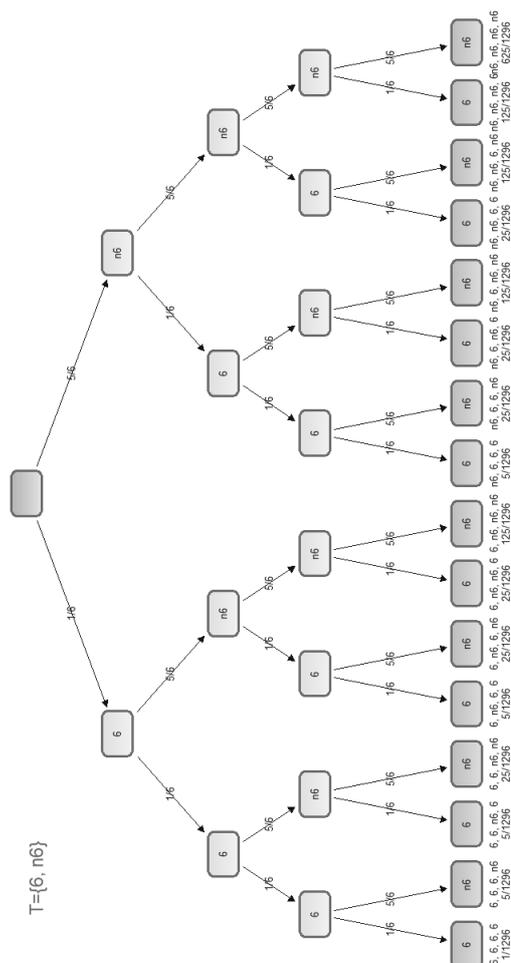


Abb. 2: Reduziertes, vollständiges Baumdiagramm

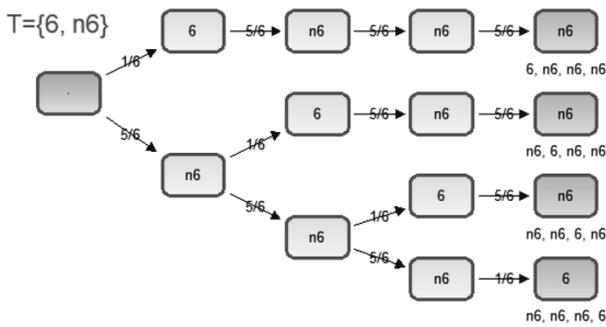


Abb. 3: Reduziertes, unvollständiges Baumdiagramm

**Anforderung 2 – Rechenarbeit automatisieren** Eine technische Unterstützung für Baumdiagramme soll eine automatische Berechnung der Häufigkeiten bzw. Wahrscheinlichkeiten anbieten. Abhängig von den bekannten Größen sollen die Pfadregeln angewendet und die Werte entlang der Pfade bestimmt werden.

Diese Anforderung zielt genuin auf den Einsatz von Technologie im (Stochastik-)Unterricht ab (Wolpers und Götz, 2002, S. 113), wie auch das folgende Zitat zeigt:

„Man kann zwar auch im Technologiezeitalter auf das Operieren mit dem Ziel, eine mathematische Lösung zu erhalten, nicht verzichten, aber komplexe Operationen können auf die Technologie ausgelagert werden. Dadurch wird Freiraum für andere mathematische Handlungen wie Modellieren, Interpretieren oder Argumentieren geschaffen.“ (BIFIE, 2011, S. 76)

**Beispiel 2** Nach Karl LANDSTEINER<sup>3</sup> unterscheidet man vier Blutgruppen: 0, A, B und AB. Diese kommen in Österreich annähernd mit folgender relativer Häufigkeit vor<sup>4</sup>: Tabelle 1.

Blutgruppe	0	A	B	AB
Relative Häufigkeit	36%	44%	14%	6%

Tab. 1: Verteilung der Blutgruppen in Österreich

Zusätzlich wird je nach Vorliegen eines bestimmten Antigens noch zwischen Rhesus-positiv und

Rhesus-negativ unterschieden. 85% aller Personen in Österreich sind Rhesus-positiv, alle anderen Rhesus-negativ, wobei die Verteilung bei allen Blutgruppen gleich ist.

Mit diesen relativen Häufigkeiten kann in PROVIS automatisch der entsprechende Baum erstellt werden: Abbildung 4. Die Äste werden im Programm mit den zugehörigen relativen (bedingten) Häufigkeiten gewichtet<sup>5</sup>.

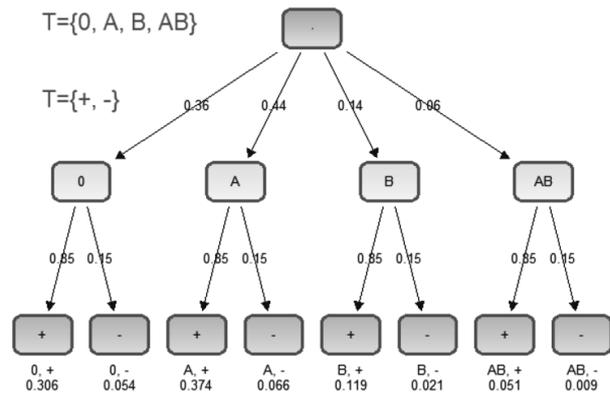


Abb. 4: Wahrscheinlichkeitsbaum zu Blutgruppen und Rhesusfaktor

Dazu werden die Blutgruppenzugehörigkeit und das Vorhandensein des Rhesusfaktors als zwei Teilvorgänge abgebildet, siehe Abbildung 5.

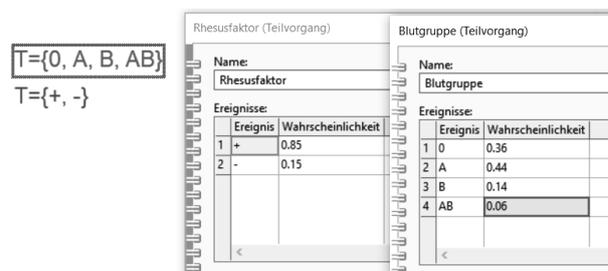


Abb. 5: Teilvorgänge für Rhesusfaktor und Blutgruppen und deren Spezifizierung im Notebook

Das Modellierungselement des Teilvorgangs fußt auf folgender Anforderung:

**Anforderung 3 – Baumdiagramme nach dem Spiralprinzip unterstützen, vergleiche Bruner (1970)** Schülerinnen und Schülern soll ein niederschwelliger Einstieg in die Welt der Baumdiagramme ermöglicht werden. Der gedankliche Prozess der Baumkonstruktion soll Schritt für Schritt und Ereignis für Ereignis durchlaufen und der Baum optio-

nal mit Wahrscheinlichkeiten oder Häufigkeiten versehen werden. Darüber hinaus sollen für ein fortgeschrittenes Lernstadium nützliche Funktionen angeboten werden, um Baumdiagramme schnell und effizient manipulieren zu können, etwa durch die Generierung von Baumdiagrammen aus wenigen Angaben zu dessen Teilvorgängen oder durch die Überprüfung von händisch berechneten Wahrscheinlichkeiten.

Dazu heißt es in Krüger et al. (2015, S. 131)

„Die Darstellung eines mehrstufigen Vorgangs als Baumdiagramm stellt für Schüler eine durchaus herausfordernde Aufgabe dar, deren Schwierigkeiten Lehrende nicht unterschätzen dürfen.“

Die dort vorgestellte Schrittfolge als Orientierungsgrundlage zur (händischen) Erstellung eines Baumdiagrammes (S. 133 f.) wird auch in PROVIS unterstützt.

### 3.2 Einheitsquadrate

Einheitsquadrate sind besonders intuitive Veranschaulichungen mit einer hohen Dichte an Informationen. Die Besonderheit liegt in der Visualisierung der Daten in doppelter Form: numerisch als Anzahl oder relative Häufigkeit und geometrisch als Fläche bzw. Strecke. Je nach Reihung der Merkmale, in Abschnitt 1 Geschlecht und Rauchverhalten, sind die Flächen anders angeordnet und andere Verhältnisse stehen im Vordergrund. Im Weiteren nennen wir das Einheitsquadrat, das aus einem Quadrat durch umgekehrte Reihung der Merkmale entsteht, das *transponierte Einheitsquadrat*. Aus der Konstruktion erhält man außerdem ein Maß für die Abhängigkeit der Merkmale – das sogenannte *Assoziationsmaß* – das am Höhenunterschied der unteren Rechtecke visuell ablesbar ist, siehe Abbildung 1 und Eichler & Vogel (2013, S. 84).

Formal können wir das so beschreiben: Gegeben sei ein Einheitsquadrat mit Merkmalen  $A$  und  $B$ . Diese haben die Ausprägungen  $A_1$  und  $A_2$  bzw.  $B_1$  und  $B_2$ . Dann ist das eben eingeführte Assoziationsmaß gleich  $h(B_1|A_1) - h(B_1|A_2)$ . In Abbildung 1 entspricht dies  $h(R|M) - h(R|W)$ . Dabei bezeichnet  $h$  die bedingten Häufigkeiten. Dieses Assoziationsmaß kann Werte von  $-1$  bis  $1$  annehmen. Je größer sein Betrag ist, desto abhängiger sind die Merkmale voneinander.

Wie eben bemerkt lässt sich dieses Maß direkt aus dem Einheitsquadrat ablesen. In diesem Sinne passen diese stochastischen Konzepte „optimal“ zusammen.

Einheitsquadrate sind im Unterricht (in Österreich) trotz ihrer Ausdruckskraft bislang nicht vollständig etabliert, da die Konstruktion aufwändiger ist als bei vergleichbaren Methoden, wie auch eine Studie von Böcherer-Linder et al. (2018) über die praktische Anwendung von Einheitsquadraten einräumt. Hier kann durch ein geeignetes digitales Werkzeug Abhilfe geschaffen werden.

**Anforderung 4 – Einheitsquadrate automatisch erstellen** Mit einem digitalen Werkzeug für den Stochastikunterricht sollen schnell und einfach Einheitsquadrate direkt aus den Informationen einer Vierfeldertafel erstellt werden können. Darüber hinaus ist das Ableiten des transponierten Einheitsquadrats durch ein digitales Werkzeug zu unterstützen.

Im Zusammenhang mit der Darstellung stochastischer Zusammenhänge im Einheitsquadrat schreiben Vogel und Eichler (2014, S. 133)

„Der Computereinsatz kann hier durch die Möglichkeit, Strukturen und Prozesse in dynamisch verknüpften Repräsentationen zu visualisieren, didaktisch wertvolle Dienste leisten, [...]“

Als Pendant der Idee in Wolpers und Götz (2002, Abschnitt 4.3.2), zwei verschiedene Baumdiagramme zu einer Vierfeldertafel zu generieren, erlaubt es PROVIS Einheitsquadrate zu transponieren.

**Beispiel 3** Wir illustrieren die Funktionsweise von PROVIS erneut am Beispiel des Rauchverhaltens in Abhängigkeit vom Geschlecht. Ganz im Sinne eines datenorientierten Stochastikunterrichts (Götz und Döller, 2020) wurden die Daten von Tabelle 2 im Bekanntenkreis der Erstautorin erhoben.

	M	W
Raucher	13	4
Nichtraucher	16	21

Tab. 2: Vierfeldertafel über Rauchverhalten und Geschlecht (eigene Erhebung)

Tabelle 2 kann als Vierfeldertafel in ein Einheitsquadrat übersetzt werden: Abbildung 6 links zeigt die absoluten konjunktiven (konjugierten) Häufigkeiten und die Zeilen- bzw. Spaltensummen, Abbildung 6 rechts das Pendant mit relativen Häufigkeiten. („Ja“ entspricht Raucher, „Nein“ Nichtraucher.)

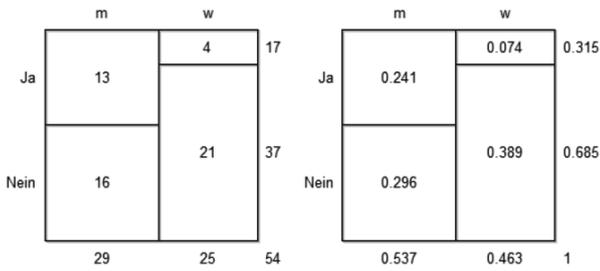


Abb. 6: Einheitsquadrate über Rauchverhalten und Geschlecht

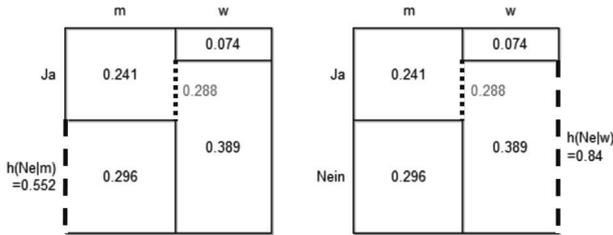


Abb. 7: Einheitsquadrat mit (bedingten) relativen Häufigkeiten

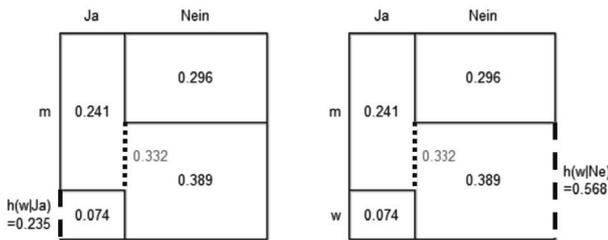


Abb. 8: Transponiertes Einheitsquadrat

Ist man an *bedingten* relativen Häufigkeiten interessiert, dann kann *jeweils eine* in PROVIS angezeigt und hervorgehoben werden: in Abbildung 7 (zeigt zweimal dasselbe Einheitsquadrat) sind das die gestrichelten Linien. Die Differenz der beiden angezeigten bedingten Häufigkeiten in Abbildung 7 links ( $h(Ne|m)$ ) bzw. rechts ( $h(Ne|w)$ ) ist das eben eingeführte Assoziationsmaß, welches ebenfalls ausgewiesen und hervorgehoben werden kann: in Abbildung 7 ist das die punktierte Linie<sup>6</sup>.

In Abbildung 8 ist das von PROVIS generierte transponierte Einheitsquadrat zweimal zu sehen, um die bedingten Häufigkeiten  $h(w|Ja)$  (links) und  $h(w|Ne)$  (rechts) anzuzeigen. Mit dem Satz von BAYES ändern sich die bedingten relativen Häufigkeiten und dementsprechend auch das Assoziationsmaß. Der Anteil der Nichtraucher unter den Männern unter-

scheidet sich weniger vom Anteil der Nichtraucherinnen unter den Frauen als der Anteil der Frauen unter den Rauchenden vom Anteil der Frauen unter den Nichtrauchenden ( $0,288 < 0,332$ ).

In diesem Zusammenhang gilt allgemein: Sei  $\mathcal{A}_E$  das Assoziationsmaß eines Einheitsquadrates  $E$  mit Merkmalen  $A$  und  $B$  wie oben. Diese haben wieder die Ausprägungen  $A_1$  und  $A_2$  bzw.  $B_1$  und  $B_2$ . Sei weiters  $\hat{E}$  das transponierte Einheitsquadrat zu  $E$  mit Assoziationsmaß  $\mathcal{A}_{\hat{E}}$ , dann gilt

$$\mathcal{A}_E \cdot h(A_1) \cdot h(A_2) = \mathcal{A}_{\hat{E}} \cdot h(B_1) \cdot h(B_2),$$

wobei  $h$  die relativen Häufigkeiten bezeichnet. Der Nachweis geschieht durch Einsetzen der Definition und Nachrechnen.

*Bemerkung:* Das bekannte Assoziationsmaß für nominal skalierte Daten  $\chi^2$  (Bosch, 1987, S. 127) ist gleich  $\mathcal{A}_E \cdot \mathcal{A}_{\hat{E}} \cdot n$ , dabei ist  $n$  der Stichprobenumfang<sup>7</sup>. Dies kann wieder durch Einsetzen der Definitionen und Nachrechnen gezeigt werden.

Wertet man die selbe Personengruppe aus Tabelle 2 nach Rauchverhalten und Alter aus, so ergibt sich die Vierfeldertafel als Tabelle 3.

	$\leq 50$	$> 50$
Raucher	14	3
Nichtraucher	29	8

Tab. 3: Vierfeldertafel über Rauchverhalten und Alter (eigene Erhebung)

Die Übersetzung in ein Einheitsquadrat zeigt, dass die Merkmale Rauchverhalten und Alter unter den Befragten voneinander nahezu unabhängig sind, siehe das Assoziationsmaß in Abbildung 9.

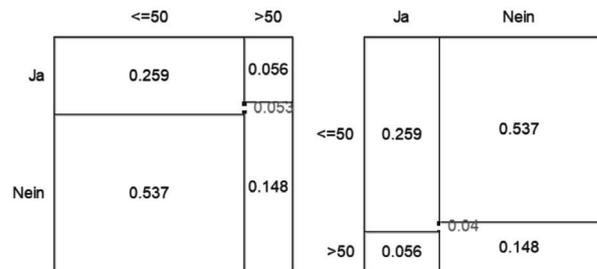


Abb. 9: (Transponiertes) Einheitsquadrat über Rauchverhalten und Alter

### 3.3 Vernetzen und Experimentieren

Während Baumdiagramme in erster Linie eine Strukturierung des Ereignisraumes abbilden, stehen bei Einheitsquadraten die Daten und Quantitäten im Vordergrund. Letztere eignen sich, den Begriff der stochastischen Abhängigkeit intuitiv einzuführen, erstere können zeitliche Abfolgen besser abbilden und sind im Allgemeinen universeller einsetzbar. Ein empirisch-didaktischer Vergleich beider Methoden wurde von Bea und Scholz (1995) durchgeführt. Sie kommen zum Schluss, dass Einheitsquadrate kognitiv einfacher zu verarbeiten sind, jedoch in der Konstruktion dem Baumdiagramm nachstehen. Um die Vorteile von beiden Visualisierungsmethoden nutzen zu können, sollen sie verknüpft werden.

**Anforderung 5 – Baumdiagramm und Einheitsquadrat vernetzen** Ein digitales Werkzeug soll die beiden Visualisierungsmethoden Einheitsquadrat und Baumdiagramm vernetzen und die Möglichkeit bieten, aus einem Einheitsquadrat das entsprechende Baumdiagramm abzuleiten. Erfüllt ein Baumdiagramm die notwendigen Voraussetzungen, soll auch der umgekehrte Weg unterstützt werden.

Eine gemeinsame Quelle für Baumdiagramme und Einheitsquadrate ist die Vierfeldertafel, aus der eine Verknüpfung dieser beiden Visualisierungen motiviert werden kann. Für die Merkmale Alter und Rauchverhalten zum Beispiel können so aus einer Vierfeldertafel (vgl. Tabelle 3), die in PROVIS eingegeben werden kann, Einheitsquadrate vom Tool erzeugt werden (Abbildung 9). Zur Bedeutung der Verknüpfung von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen siehe Strick (1999) und Wolpers und Götz (2002, Abschnitt 4.3.2). Vierfeldertafeln können als Bindeglied zweier Baumdiagramme aufgefasst werden, die bedingte Wahrscheinlichkeiten bzw. ihre „Umkehrung“ darstellen (Wolpers und Götz, 2002, S. 269).

**Beispiel 4** In Ischgl trugen Ende April 2020 ungefähr 42% der Einwohner Antikörper gegen SARS-CoV-2 in sich<sup>8</sup>. Die Sensitivität der Antikörper-Untersuchungen rangiert zwischen 53% und 94%, die Spezifität zwischen 91% und 99,5%<sup>9</sup>. In Abbildung 10 wird eine Sensitivität von 93% und eine Spezifität von 98% angenommen.

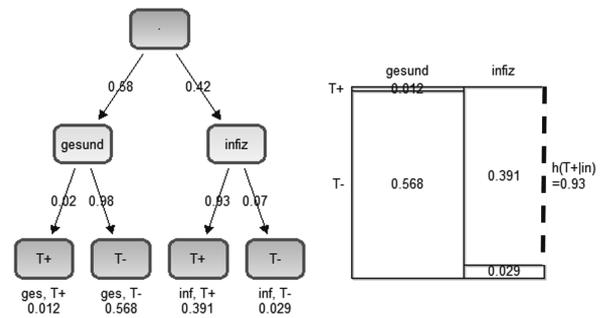


Abb. 10: Sensitivität und Spezifität von Antikörper-Tests

Das Einheitsquadrat in Abbildung 10 rechts wurde automatisch aus dem Baumdiagramm links abgeleitet.

Mit den Daten von Abbildung 10 ergibt sich ein Assoziationsmaß von 0,91. Die hochgradige Abhängigkeit von Testergebnis und Gesundheitszustand ist somit evident.

Von eigentlichem Interesse ist aber die Wahrscheinlichkeit, bei Erhalt eines positiven Testergebnisses tatsächlich infiziert zu sein. Dies lässt sich direkt am transponierten Einheitsquadrat ablesen: Abbildung 11.

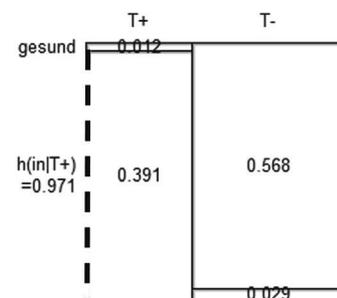


Abb. 11: Das transponierte Einheitsquadrat zu Abbildung 10

Interessanterweise ist die Wahrscheinlichkeit bei Erhalt eines positiven Tests tatsächlich infiziert zu sein größer als die Wahrscheinlichkeit, wenn man tatsächlich infiziert ist, auch ein positives Testergebnis zu bekommen ( $0,971 > 0,93$ ). Das liegt an der hohen Inzidenzrate.

Neben einer Verknüpfung der Methoden und der Übernahme der Rechenarbeit kann ein digitales Werkzeug auch die primären Stärken der Visualisierungsmethoden weiter ausbauen.

**Anforderung 6 – Grafische Darstellung dynamisieren und Visualisierung bestmöglich unterstützen** Ein digitales Werkzeug zur Erstellung von Baumdiagrammen und Einheitsquadraten soll eine übersichtliche, situationsadäquate Darstellung unterstützen (z. B. Abbildung 11). Hierzu zählen Möglichkeiten Bäume zu bearbeiten, Änderungen wie neue Äste einheitlich zu integrieren und einen Wechsel zwischen horizontaler und vertikaler Anordnung durchzuführen (z. B. Abbildung 3). Weitere hilfreiche Funktionen sind etwa die visuelle Differenzierung von besonderen Knoten in Baumdiagrammen oder die pointierte Hervorhebung des Assoziationsmaßes und anderer Strecken und Flächen in Einheitsquadraten (z. B. Abbildung 7). Ebenso sollen das Skalieren der Seitenlänge eines Einheitsquadrats und die einheitliche Ausrichtung von Bäumen möglich sein (z. B. Abbildung 2).

Unter der Überschrift „Visualisierungswerkzeug“ findet sich dazu in BIFIE (2011, S. 75):

„Die Möglichkeit der grafischen Darstellung abstrakter Objekte ist für die Kompetenzentwicklung im Allgemeinen und für alle Phasen des Problemlöseprozesses im Besonderen von großer Bedeutung. [...] Mit Technologie steht die grafische Darstellung sehr rasch [...] zur Verfügung. Dadurch werden Vermutungen möglich, es wird Reflektieren unterstützt, und oft kann das Finden einer Lösung grafisch erfolgen. Auch die Auswirkungen von Parameteränderungen [...] sind durch Technologieinsatz schnell sichtbar und können Ausgangspunkt spannender Diskussionen im Unterricht werden.“

Zur bestmöglichen Unterstützung gehört auch das Aufzeigen von fehlerhaften Einträgen. Wenn wir nochmals das Baumdiagramm in Abbildung 1 betrachten, dann können wir daraus einen Wahrscheinlichkeitsbaum gewinnen: Abbildung 12 oben. Dort fehlen die konjunktiven Wahrscheinlichkeiten in der letzten Zeile. In PROVIS ist es gemäß Anforderung 3 möglich, Eintragungen auch händisch durchzuführen. Mit dem Programm können die Eintragungen (der Schülerinnen und Schüler) geprüft werden. In Abbildung 12 unten ist die letzte Zeile (in PROVIS rot) markiert, da die Summe der Eintragungen nicht eins ergibt.

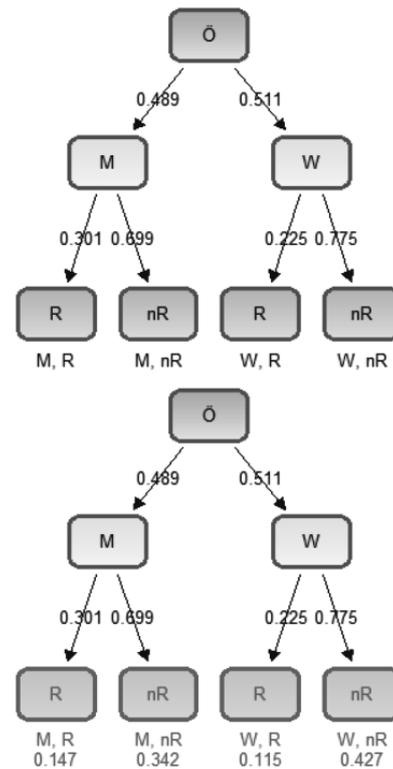


Abb. 12: (Fehlerhafter) Wahrscheinlichkeitsbaum zum Rauchverhalten in Österreich

Selbständiges Experimentieren mit stochastischen Sachverhalten ist der Königsweg des Wissenserwerbs. Gerade hier kann eine geeignete Software durch die Dynamisierung der Diagramme und eine unmittelbaren Rückmeldung auf Änderung der Daten, Parameter etc. unterstützen. Den Schülerinnen und Schülern wird dadurch ermöglicht, die Visualisierungsmethoden interaktiv, konstruktiv, experimentell zu gebrauchen, Vermutungen aufzustellen und sofort zu überprüfen.

**Anforderung 7 – Experimentieren anregen** Ein digitales Werkzeug, das die Visualisierungsmethoden Baumdiagramm und Einheitsquadrat unterstützt, soll durch die effiziente Nutzbarkeit dieser Methoden Schülerinnen und Schüler zu „Was wäre, wenn ...“-Fragen anregen. Etwa können die Werte in einem Einheitsquadrat variiert und die Änderung der Flächen beobachtet werden oder es kann untersucht werden, wie sich die Baumstruktur ändert, wenn der Ereignisraum eines Teilvorgangs angepasst wird oder die Reihenfolge der Teilvorgänge verändert wird. Zusätzlich sollen neue Perspektiven eröffnet werden, wie zum Beispiel durch die Möglichkeit der Ableitung der einen Darstellungsform aus der anderen.

„Die so wichtige experimentelle Phase, in der Vermutungen aufgestellt und Lösungswege gefunden werden, wird oft erst durch Technologie überhaupt möglich.“ (BIFIE, 2011, S. 75)

**Fortsetzung Beispiel 4** Wenn wir eine Sensitivität von 53% voraussetzen und eine Spezifität von 91%, dann ergibt sich ein ganz anderes Bild als Abbildung 10: Abbildung 13.

In Abbildung 13 erkennen wir, dass das Assoziationsmaß gesunken, aber immer noch groß ist. Wenn der Antikörper-Test nicht besser als ein Münzwurf wäre, das heißt Spezifität und Sensitivität betragen beide 50%, würde das Assoziationsmaß null ergeben.

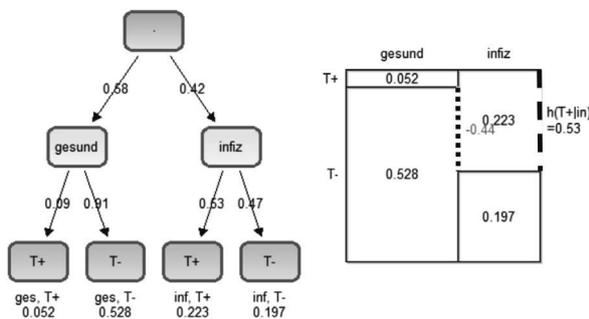


Abb. 13: Veränderte Sensitivität und Spezifität

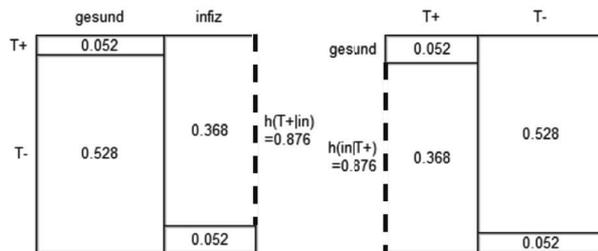


Abb. 14: Sensitivität =  $P(inf|T+)$

Wie im ersten Fall ist jetzt die Wahrscheinlichkeit tatsächlich infiziert zu sein, wenn das Testergebnis positiv ist, immer noch höher als jene, ein positives Testergebnis zu bekommen, wenn man infiziert ist: 81,1% ( $= \frac{0,223}{0,223+0,052}$  aus Abbildung 13 rechts) zu 53%.

Wir können die Frage stellen, wann diese beiden Wahrscheinlichkeiten bei gegebener Prävalenz (42%) gleich sind:  $P(inf|T+) \stackrel{?}{=} P(T+|inf)$ . Aus dem BAYES'schen Theorem gewinnen wir die Bedingung  $f(x) = \frac{29}{21}x - \frac{8}{21}$ , wobei  $x$  für die Spezifität

und  $f(x)$  für die Sensitivität steht. Als Definitionsbereich legen wir  $[\frac{8}{29}; 1]$  fest, um den Wertebereich  $[0; 1]$  zu erhalten. Für die hier vorausgesetzte Spezifität von 91% ist die Sensitivität nach dieser Bedingung gleich  $f(0,91) = \frac{29}{21} \cdot 0,91 - \frac{8}{21} = 87,6\%$  (gerundet) und  $P(inf|T+)$  ebenfalls 87,6%: Abbildung 14.

Für andere Spezifitäten aus dem Intervall  $[\frac{8}{29}; 1]$  können gemäß  $f$  zugehörige Sensitivitäten ermittelt werden, sodass  $P(inf|T+) = P(T+|inf)$  gilt.

Eine andere Möglichkeit, solche Werte zu bestimmen, eröffnet das Experimentieren mit PROVIS, indem an verschiedenen Parametern (Sensitivität, Spezifität, Prävalenz) „gedreht“ wird.

## 4 Handhabung von PROVIS

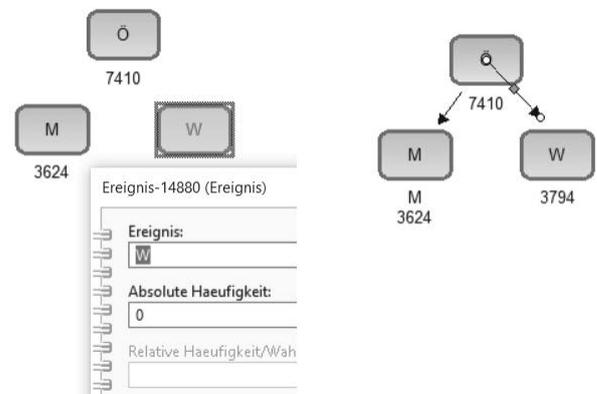


Abb. 16: Schritte zur Erstellung eines Baumdiagramms

PROVIS bietet eine simple Anwendungsoberfläche mit den wesentlichen Funktionen: Abbildung 15. Die zentrale Position nimmt die *Modellierungsfläche* ein. Hier werden die Diagramme erstellt. In der schmalen, vertikalen Leiste links daneben sind die Modellierungselemente gelistet, die für die verschiedenen Diagrammtypen verwendet werden können. Um ein *Baumdiagramm* zu erstellen, werden die *Ereignisse* erstellt (via Klick auf das (grüne) Rechteck und anschließenden Klick in die Modellierungsfläche) und mit Pfeilen, den *Übergängen* zwischen den Ereignissen, verbunden: Abbildung 16.

Außerdem gibt es die Möglichkeit *Teilvorgänge* festzulegen, die in Bäumen verwendet werden können. Diese sind mit einem  $T$  gekennzeichnet.

Das *Symbol für Einheitsquadrate* in der Modellierungsleiste ist selbsterklärend. Zusätzlich besteht die

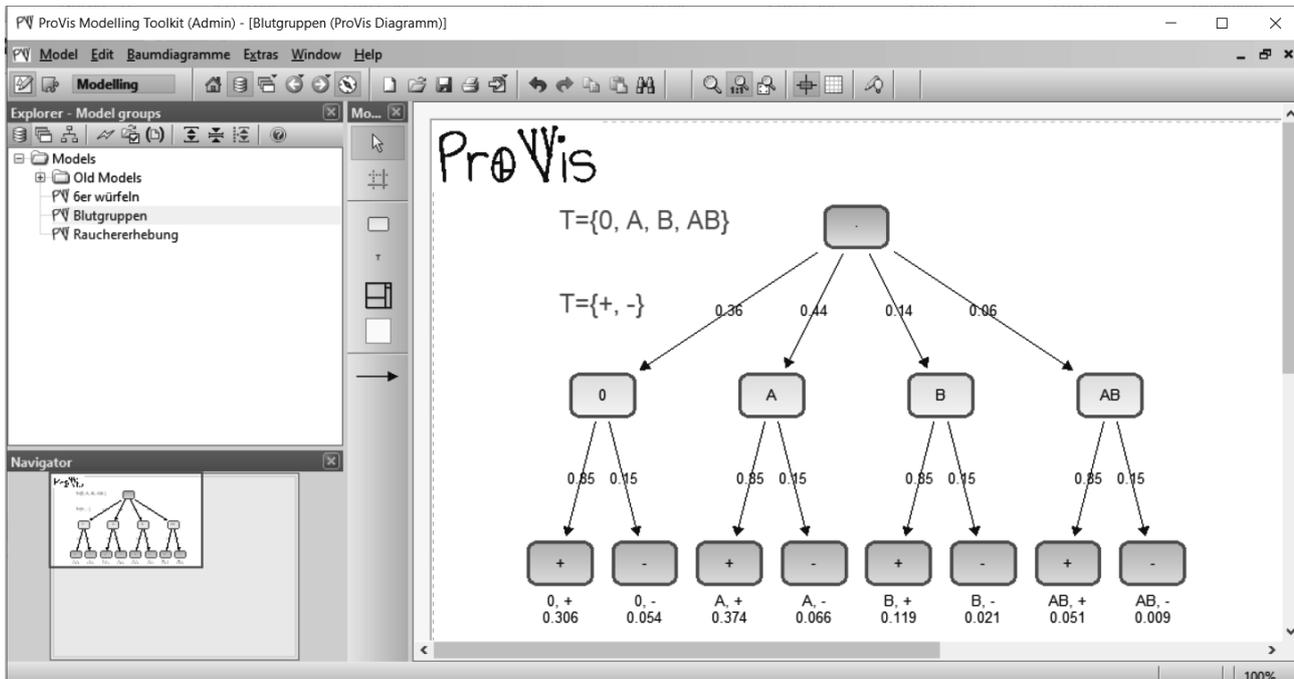


Abb. 15: Die Modellierungsumgebung von PROVIS

Möglichkeit *Notizen* einzufügen: (hellgelbes) Quadrat darunter.

Eines der wichtigsten Instrumente im Umgang mit den Elementen im Modell ist das zugehörige *Notebook*. Dieses wird durch Doppelklick auf das Element aufgerufen und enthält alle Eingabefelder, spezifischen Attribute und berechneten Werte und die meisten Funktionalitäten: Abbildung 17.

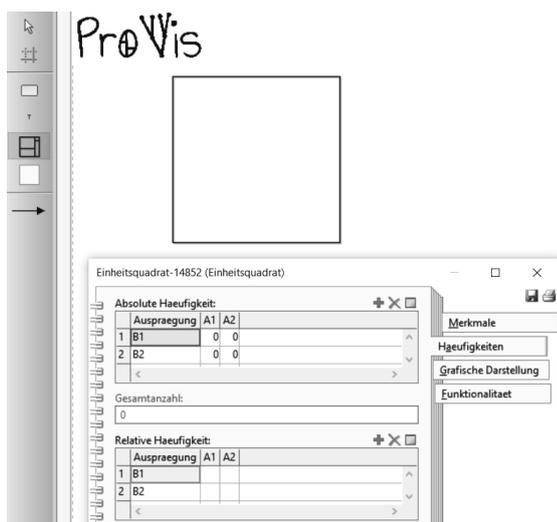


Abb. 17: Ein neu erstelltes, leeres Einheitsquadrat und sein Notebook

In der Aktionsleiste über der Modellierungsfläche finden sich die zwei verfügbaren Komponenten *Mo-*

*delling* und *Import/Export* (die beiden Icons Papier & Bleistift und Puzzleteil ganz links). Die erste Komponente bietet grundlegende Funktionen wie Speichern, Rückgängig machen, Suchen oder Zoomen. Durch Klick auf den Puzzleteil gelangt man zur *Import/Export*-Komponente, die es erlaubt, existierende Modelle im toolspezifischen Format .abl in PROVIS zu laden oder eigene Modelle zu exportieren. Auf diese Weise können Diagramme zur Weiterbearbeitung geteilt werden.

In der Menüleiste ganz oben findet sich eine der wichtigsten Funktionen: unter dem Menüpunkt *Model*, Unterpunkt *New* kann ein neues Modell erstellt werden. Die Menüleiste enthält neben den weiteren üblichen Menüfunktionen auch den Menüpunkt *Baumdiagramme* mit speziellen Funktionalitäten zum automatischen Generieren eines Baumdiagramms aus Teilvorgängen nach Anforderung 3.

Im *Modell-Explorer* links wird die Liste aller gespeicherten Modelle angezeigt. Dort kann auch eine Ordnerstruktur erstellt werden, sodass die Modelle sortiert abgelegt werden können. Neue Modelle können auch direkt hier durch Rechtsklick auf einen Ordner erstellt werden.

## 5 Schlussbemerkungen

Wie gezeigt wurde, handelt es sich bei PROVIS um ein mächtiges Software-Instrument zur flexiblen Erstellung von Baumdiagrammen und Einheitsquadra-

ten. Die sieben im Artikel formulierten Anforderungen an (stochastische) Unterrichtssoftware erfüllt PROVIS, wie an Beispielen illustriert wurde. Die Entwicklung von PROVIS kann als weiterer Schritt zur Digitalisierung des Mathematikunterrichts gesehen werden, wo sie einen Mehrwert darstellt: die schnelle und interaktive Modellierungsmöglichkeit von stochastischen Situationen kann einen wichtigen Beitrag zu anwendungsorientierten Themen im Stochastikunterricht liefern.

Es wurde auf Benutzerfreundlichkeit beim Einsatz von PROVIS Wert gelegt. Dazu gehört auch die Möglichkeit, die mit PROVIS erstellten Grafiken in andere Dokumente einbinden zu können. Einer selbständigen Verwendung des Programms von Schülerinnen und Schülern steht somit nichts im Wege.

PROVIS kann sowohl am Beginn der Behandlung von stochastischen Themen im Unterricht eingesetzt werden, als auch bei der Behandlung von komplexen Problemstellungen. Die Software bietet dazu Funktionalitäten wie das automatisierte Abarbeiten von Routineberechnungen (konjunktive Wahrscheinlichkeiten, relative, bedingte Häufigkeiten etc.).

In diesem Sinne wollen wir die Überschrift unseres Artikels verstanden wissen: Die Digitalisierung dieser beiden Visualisierungsmethoden macht sie für einen breit(er)en Adressatenkreis zugänglich und erweitert deren Einsatzmöglichkeiten im Unterricht.

Verbesserungsvorschläge für PROVIS werden von der Erstautorin gerne entgegengenommen.

## Anmerkungen

<sup>1</sup>[https://www.statistik.at/web\\_de/statistiken/menschen\\_und\\_gesellschaft/gesundheitsdeterminanten/rauchen/index.html](https://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/gesundheitsdeterminanten/rauchen/index.html) (Zugriff: 12.05.2021)

<sup>2</sup><https://austria.omilab.org/psm/content/provis/info> (Zugriff: 12.05.2021), aktuell für Windows und Linux verfügbar. PROVIS wurde auf der Metamodellierungsplattform ADOxx entwickelt ([www.adoxx.org](http://www.adoxx.org), Zugriff: 12.05.2021).

<sup>3</sup>Karl Landsteiner (1868 – 1943) war ein österreichisch-US-amerikanischer Mediziner, der 1900 das AB0-System der Blutgruppen entdeckte, wofür er 1930 den Nobelpreis für Medizin erhielt. 1940 beschrieb er mit seinem Schüler Alexander So-

lomon Wiener den Rhesusfaktor, den er im Blut von Rhesusaffen entdeckt hatte. ([https://de.wikipedia.org/wiki/Karl\\_Landsteiner](https://de.wikipedia.org/wiki/Karl_Landsteiner), Zugriff: 12.05.2021)

<sup>4</sup><https://www.rotekreuz.at/blutspende/blut-im-detail/wissenswertes-ueber-blut/blutgruppen> (Zugriff: 08.01.2021)

<sup>5</sup>Es kann auch nur das Baumdiagramm ohne bedingte Häufigkeiten ausgegeben werden, sodass die Schülerinnen und Schüler diese erst berechnen müssen: Anforderung 3.

<sup>6</sup>In PROVIS sind die entsprechenden Linien farblich markiert: blau die bedingten relativen Häufigkeiten und grün das Assoziationsmaß.

<sup>7</sup>Hinweis von J. Engel.

<sup>8</sup><https://www.scinexx.de/news/medizin/corona-hotspot-ischgl-knapp-die-haelfte-der-einwohner-waren-infiziert/> Publiziert am 26. Juni 2020, Quelle: Medizinische Universität Innsbruck (Zugriff: 12.05.2021)

<sup>9</sup><https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7225716> (Zugriff: 12.05.2021)

## Literatur

- Bea, W.; Scholz, R. (1995): Graphische Modelle bedingter Wahrscheinlichkeiten im empirisch-didaktischen Vergleich. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 16 (3–4), S. 299–327.
- Böcherer-Linder, K.; Eichler, A.; Vogel, M. (2018): Visualising Conditional Probabilities — Three Perspectives on Unit Squares and Tree Diagrams. In: Batanero, C.; Chernoff, E. (Eds.): *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research*. Cham: Springer, 73–88.
- Bosch, K. (1987): Elementare Einführung in die angewandte Statistik. 4. Auflage. Braunschweig: Vieweg.
- Bruner, J. S. (1970): Der Prozeß der Erziehung. Berlin: Berlin-Verlag.
- Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens (BIFIE) (Hrsg.) (2011): *Praxishandbuch Mathematik AHS Oberstufe – Auf dem Weg zur standardisierten kompetenzorientierten Reifeprüfung*. Teil 1. Graz: Leykam.
- Döller, V. (2020): *ProVis – Probability Visualized: Technologische Unterstützung für den Einsatz von*

- Einheitsquadraten und Baumdiagrammen im Stochastikunterricht. Universität Wien: Diplomarbeit. <http://othes.univie.ac.at/61461/1/66162.pdf>. (Zugriff: 04.05.2021)
- Eichler, A.; Vogel, M. (2013): Leitidee Daten und Zufall: Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik. 2. Auflage. Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Götz, S.; Döller, V. (2020): Vorschläge für einen datenorientierten Stochastikunterricht in der Sekundarstufe. In: *R & E Source: open online journal for research and education*, S19: Tag der Mathematik 2020 – Mathematik geht uns alle an! Von der Primarstufe zur Sekundarstufe, 4 Seiten. <https://journal.phnoe.ac.at/index.php/resource/article/view/882>. (Zugriff: 30.11.2020)
- Krauss, S. (2003): Wie man das Verständnis von Wahrscheinlichkeiten verbessern kann: Das „Häufigkeitskonzept“. In: *Stochastik in der Schule* 23 (1), S. 2–9.
- Krüger, K.; Sill, H.-D.; Sikora, C. (2015): Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Sedlmeier, P.; Gigerenzer, G. (2001): Teaching Bayesian reasoning in less than two hours. In: *Journal of Experimental Psychology: General* 130, Nr. 3, 380–400.
- Strick, H. K. (1999): Vierfeldertafeln im Stochastikunterricht der Sekundarstufen I und II. In: *Praxis der Mathematik* 41 (2), S. 49–58.
- Vogel, M.; Eichler, A. (2014): Die computergestützte Leitidee Daten und Zufall. In: Henn, H.-W.; Meyer, J. (Hrsg.): *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 1*. Wiesbaden: Springer, S. 126–138.
- Wolpers, H.; Götz, S. (2002): Didaktik der Stochastik. Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 3. Braunschweig: Vieweg.

Anschrift der Verfasserin bzw. des Verfassers

Victoria Döller  
Fakultät für Informatik  
Universität Wien  
Währinger Straße 29  
A-1090 Wien  
Österreich  
[victoria.doeller@univie.ac.at](mailto:victoria.doeller@univie.ac.at)

Stefan Götz  
Fakultät für Mathematik  
Universität Wien  
Oskar-Morgenstern-Platz 1  
A-1090 Wien  
Österreich  
[stefan.goetz@univie.ac.at](mailto:stefan.goetz@univie.ac.at)