

# Verteilungen über geladene Würfel einführen<sup>1</sup>

BART K. HOLLAND, NEW JERSEY, USA

<sup>1</sup> Original: An Introduction to Distributions Using Weighted Dice.  
In *Teaching Statistics* 33 (2011) 1, 20–22.  
Kürzung, Bearbeitung und Übersetzung: JÖRG MEYER

**Zusammenfassung:** Es geht um das Verständnis des Begriffs „Verteilung“ und um dessen Zusammenhang zum Hypothesentesten.

## 1 Hintergrund und Ziele

Verteilungen bilden die Basis für den enormen Bestand an Arbeiten zur theoretischen und angewandten Stochastik. Zwar gibt es formale Definitionen zu diesem Begriff und auch viele Formeln, die ihn charakterisieren, gleichwohl ist es wichtig, dass Lernende zunächst eine klare Einführung in diesen Begriff bekommen. Für viele Lernende ist es so, dass weder Formeln noch das Reden über Verteilungen dem Eindruck gleichkommt, den eine Vorführung in Bezug auf ein intuitives Verständnis erreichen kann (dieses unterscheidet sich grundlegend von der Fertigkeit, wie ein Papagei etwas wiederholen zu können). Nach meiner Erfahrung kann solch eine Vorführung aus Würfelexperimenten bestehen und so einen lebendigen Start in das Thema ermöglichen. In diesem Artikel wird eine solche Vorführung beschrieben, bei der es um die Wahrscheinlichkeit von Würfelergebnissen geht, wobei die Würfel nicht fair, also „geladen“ sind.

## 2 Die Situation im Unterricht

Ich frage zunächst danach, mit welchen Wahrscheinlichkeiten die Augensummen zweier Würfel auftreten. Es wird schnell klar, dass einige Summen eine höhere Wahrscheinlichkeit als andere haben, da sie aus mehr Kombinationen gebildet werden können. Die Lernenden entwickeln dann Tabelle 1 unter der Voraussetzung, dass beide Würfel fair sind.

Das Ergebnis von Tabelle 1 kann „Verteilung“ genannt werden: Es handelt sich um eine Liste aller möglichen Werte der interessierenden Zufallsvariablen (hier: der Augensumme) zusammen mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Das Beispiel von Tabelle 1 ist sehr einfach; allerdings ist es nicht immer praktikabel, alle möglichen Werte der Zufallsvariablen aufzulisten. In solchen Fällen werden Verteilungen durch Gleichungen beschrieben.

Nun ist es Zeit für ein Anwendung des Begriffs. Ich habe zwei geladene Würfel; einer davon zeigt die „1“ übermäßig häufig, und der andere zeigt die „6“ übermäßig häufig. Daher wird die Augensumme 7 gegenüber der in Tabelle 1 aufgelisteten Wahrscheinlichkeit häufiger zu sehen sein. Man kann solche Würfel in Zauberläden kaufen.

Ich verrate den Lernenden nicht, dass meine Würfel unfair sind, weil sie das anhand von Wurfexperimenten selber herausfinden sollen. Um die Angelegenheit zu dramatisieren, gehe ich zu einem Tisch, lasse den leerräumen und entfalte darauf eine Decke (damit die Würfel nicht auf den Fußboden fallen) und fordere einige Lernende auf, zwei Würfel wiederholt zu werfen, und andere, über die Ergebnisse Buch zu führen.

Bei meiner letzten Vorführung gab es in 9 von 20 Fällen eine 7 als Augensumme, also in 45 % aller Fälle. Ist dieser Prozentwert überraschend bzw. deutet er darauf hin, dass die Würfel nicht fair sind?

	Kombinationen
$P(\text{Summe} = 2) = \frac{1}{36}$	(1,1)
$P(\text{Summe} = 3) = \frac{2}{36}$	(1,2), (2,1)
$P(\text{Summe} = 4) = \frac{3}{36}$	(1,3), (2,2), (3,1)
$P(\text{Summe} = 5) = \frac{4}{36}$	(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)
$P(\text{Summe} = 6) = \frac{5}{36}$	(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)
$P(\text{Summe} = 7) = \frac{6}{36}$	(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)
$P(\text{Summe} = 8) = \frac{5}{36}$	(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)
$P(\text{Summe} = 9) = \frac{4}{36}$	(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)
$P(\text{Summe} = 10) = \frac{3}{36}$	(4,6), (5,5), (6,4)
$P(\text{Summe} = 11) = \frac{2}{36}$	(5,6), (6,5)
$P(\text{Summe} = 12) = \frac{1}{36}$	(6,6)

Tab. 1: Die Verteilung der Summe zweier Würfel

Nach Tabelle 1 sollte der Anteil der Augensumme 7 so groß sein wie  $6/36$  bzw. knapp 17 %.

Die Nullhypothese für dieses Experiment ist  $P(\text{Summe} = 7) = \frac{1}{6} \approx 17\%$ . (Dies ist eine gute Stelle, um die Terminologie des Hypothesentestens einzuführen und zu zeigen, wie eng sie mit Verteilungen in der elementaren parametrischen Statistik verknüpft ist.) Die Frage an die Lernenden ist nun: Ist 45 % in statistisch signifikanter Weise unterschiedlich von 17 % bei einer Stichprobengröße von 20? Wir beantworten diese Frage durch ein Konfidenzintervall um den Stichprobenanteil  $p = 45\%$ , das den Begriff des Standardfehlers beinhaltet.

Der Standardfehler des Stichprobenanteils ist  $\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0,45 \cdot 0,55}{20}} \approx 11,12\%$ . Ein 95 %-Konfidenzintervall ist dann  $0,45 \pm 1,96 \cdot 0,1112$ . Das Konfidenzintervall erstreckt sich also von 0,232 bis 0,668. Es enthält nicht den Wert 17 % der Nullhypothese. Daher werden wir die Nullhypothese ablehnen und dabei mit  $\alpha = 5\%$  einen Fehler machen.

Die Berechnung des Konfidenzintervalls beruht auf dem zentralen Grenzwertsatz, und manche Stochastiker werden Bedenken haben, den zentralen Grenzwertsatz bei einer derartig kleinen Stichprobe anzuwenden. In meinen Vorführungen führten die ermittelten Konfidenzintervalle stets zu Verwerfungen

der Nullhypothese, aber man sollte schon mit einer größeren Anzahl von Versuchen arbeiten.

Man könnte jetzt mit Goodness-of-fit-Tests weitermachen und hätte dann auch gleich die Daten, um zu überprüfen, ob die gemessenen Anteile mit Tabelle 1 konsistent sind oder nicht. Solche Tests werden etwa in Gravetter/Wallnau (2006) beschrieben.

### 3 Schlussfolgerung

Der Nutzen der beschriebenen Vorführung besteht darin, dass Lernende mehrere Begriffe lernen. Da Vorführungen leichter verständlich sind als abstrakte Begriffe, ist der Nutzen nicht zu unterschätzen. Ferner gibt es einerseits etwas Spaß an der Durchführung, andererseits wird auch die intellektuelle Neugierde geweckt. Die Durchführung dauert nur wenige Minuten und erzeugt positive Reaktionen seitens der Lernenden.

#### Literatur

Gravetter, F. J.; Wallnau, L. B. (2006): Statistics for the Behavioral Sciences (7th edn), S. 582–592. Belmont, CA: Wadsworth Publishing.

#### Anschrift des Verfassers

Bart K. Holland  
New Jersey Medical School, USA  
holland@njms.rutgers.edu