# Eine möglichst große Augensumme, aber bitte ohne Sechs!

NORBERT HENZE, KARLSRUHE, UND REIMUND VEHLING, HANNOVER

***Zusammenfassung:*** *Beim gleichzeitigen Werfen von m Würfeln ergibt sich als Punktzahl null, falls mindestens einer der Würfel eine Sechs zeigt, andernfalls die gewürfelte Augensumme. Wie sollte man m wählen, um den Erwartungswert der Punktzahl zu maximieren? Wählen zwei Spieler A und B m bzw. n Würfel, wobei die höhere Punktzahl gewinnt, ist dann A im Vorteil, wenn er n kennt und seine Würfelanzahl m erst danach festlegt? Wir betrachten diese Probleme zum einen von einem höheren Standpunkt aus. Zum anderen zeigen wir auf, wie ein Einsatz in der Schule aussehen könnte. Dabei ergeben sich Vernetzungen der beiden Welten.*

## 1 Einleitung

Ein Spiel besteht darin, eine Anzahl $m$ von (echten) Würfeln festzulegen und dann diese Würfel gleichzeitig zu werfen. Als *Punktzahl* ergibt sich null, falls mindestens einer der Würfel eine Sechs zeigt, andernfalls die geworfene Augensumme. Wie sollte $m$ gewählt werden, damit der Erwartungswert dieser zufälligen Punktzahl möglichst groß wird?

Offenbar ist diese Situation verwandt mit der in Henze (2011) behandelten Fragestellung, den erwarteten Gewinn durch optimales Stoppen möglichst groß zu machen, wenn beim wiederholten Werfen *eines* Würfels möglichst viele Augen gesammelt werden sollen, wobei man jedoch beim ersten Auftreten einer Sechs alles verliert. Da eine Vergrößerung von $m$ tendenziell mit einer größeren Augensumme einhergeht, anderseits aber auch die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten mindestens einer Sechs erhöht, haben wir es auch hier mit einer Situation zwischen Angst (hoffentlich keine Sechs) und Gier (möglichst hohe Augensumme) zu tun.

Interessante weitere Aspekte ergeben sich in einer Zwei-Personen-Variante dieses Spiels. In dieser legen zwei Spieler A und B jeweils für sich fest, mit wie vielen Würfeln sie das Spiel angehen wollen, wobei die höhere Punktzahl gewinnt und sich bei gleicher Punktzahl ein Unentschieden ergibt. Überraschenderweise hilft hier die Kenntnis desjenigen Wertes von $m$, für den der *Erwartungswert* der Punktzahl maximal wird, wenig weiter. Es wird sich zeigen, dass bei dieser Variante des Spiels derjenige Spieler im Vorteil ist, der in bester Gentleman-Manier seinem Gegner den Vortritt bei der Festlegung der Anzahl der Würfel lässt und in Kenntnis dieser Anzahl seine eigene Anzahl von Würfeln wählt.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: In Abschnitt 2 betrachten wir den Erwartungswert und in Abschnitt 3 die Verteilung der Punktzahl. Abschnitt 4 ist der Zwei-Spieler-Variante gewidmet, und in Abschnitt 5 wird die Umsetzung im Unterricht diskutiert. In Abschnitt 6 zeigen wir, welche Möglichkeiten sich für den Unterricht durch den Einsatz des Computers ergeben. Abschnitt 7 macht deutlich, dass auch auf Schulniveau modelliert werden kann und sich gewisse Wahrscheinlichkeiten analytisch ermitteln lassen. In Abschnitt 8 greifen wir noch einmal den Erwartungswert der Punktzahl unter dem Gesichtspunkt des Computereinsatzes auf. Die Arbeit schließt mit einem Fazit.

## 2 Erwartungswert der Punktzahl

Wir betrachten zunächst die Ein-Spieler-Variante und nehmen an, der Spieler habe sich für $m$ Würfel entschieden. Die zufällige Punktzahl sei mit $X$ bezeichnet. Des Weiteren beschreibe $E$ das Ereignis, dass mindestens einer der $m$ Würfel eine Sechs zeigt. Das komplementäre Ereignis $E^c$ besteht dann darin, dass keine Sechs auftritt. Obwohl die Würfel gleichzeitig geworfen werden, werden wir sie gedanklich unterscheiden (was den Zufall nicht beeinflusst) und von 1 bis $m$ durchnummerieren. Bezeichnet $W_j$ die zufällige Augenzahl von Würfel $j$, so gilt wegen der Unabhängigkeit von $W_1, \ldots, W_m$

$$\mathbb{P}(E^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^m, \quad \mathbb{P}(E) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^m. \qquad (1)$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von mindestens einer Sechs wächst also streng monoton mit $m$ und konvergiert bei wachsendem $m$ gegen Eins. Diese banale Erkenntnis deutet schon an, dass man $m$ nicht zu groß wählen sollte.

Da die Verteilung von $X$ für allgemeines $m$ nicht so einfach zu erhalten ist (siehe Abschnitt 3), bestimmen wir den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ von $X$ nicht über die Formel $\mathbb{E}(X) = \sum_\ell \ell \cdot \mathbb{P}(X = \ell)$ durch Summation über alle Werte $\ell$ mit $\mathbb{P}(X = \ell) > 0$, sondern nutzen folgende einfache Überlegung aus: Wir bezeichnen mit $S$ die von allen $m$ Würfeln gezeigte Augensumme und schreiben allgemein $\mathbf{1}\{D\}$ für die Indikatorfunktion eines Ereignisses $D$. Diese nimmt den Wert 1 an, falls $D$ eintritt; andernfalls stellt sich der Wert 0 ein. Damit gilt die Summendarstellung

$$X \;=\; 0\cdot\mathbf{1}\{E\}+S\cdot\mathbf{1}\{E^c\} \;=\; S\cdot\mathbf{1}\{E^c\}$$

und folglich für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(S\cdot\mathbf{1}\{E^c\}).$$

Da ganz allgemein der Erwartungswert einer Summe von Zufallsvariablen gleich der Summe der Erwartungswerte der einzelnen Summanden ist, ergibt sich wegen $S=W_1+\ldots+W_m$ und der gleichen Verteilung aller $W_j$

$$\mathbb{E}(S\cdot\mathbf{1}\{E^c\})=m\cdot\mathbb{E}(W_1\mathbf{1}\{E^c\}).$$

Das Problem, $\mathbb{E}(X)$ zu bestimmen, reduziert sich also darauf, den Erwartungswert der Zufallsvariablen $W_1\cdot\mathbf{1}\{E^c\}$ anzugeben. Letztere nimmt (außer dem Wert 0, der sich beim Eintreten von $E$ einstellt) die Werte $1,2,3,4$ und 5 an. Dabei tritt genau dann der Wert $j$ mit $j\in\{1,2,3,4,5\}$ auf, wenn $W_1=j$ gilt und *zugleich keiner der Würfel eine Sechs zeigt*, also das Ereignis $E^c$ eintritt. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit von $W_1,\ldots,W_m$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{W_1=j\}\cap E^c) &= \mathbb{P}(W_1=j,W_2\le 5,\ldots,W_m\le 5)\\ &= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{m-1}=\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{m}\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[W_1\cdot\mathbf{1}\{E^c\}\right] &= \sum_{j=1}^{5} j\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{m}\\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{m}\sum_{j=1}^{5} j \;=\; 3\left(\frac{5}{6}\right)^{m}.\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\mathbb{E}_m(X)=3m\left(\frac{5}{6}\right)^{m}.$$

Dabei haben wir in dieser Darstellung die Abhängigkeit des Erwartungswertes von $m$ durch Indizierung mit $m$ betont.

Um dasjenige $m$ zu bestimmen, welches $\mathbb{E}_m(X)$ maximiert, kann man am einfachsten den Quotienten

$$\frac{\mathbb{E}_{m+1}(X)}{\mathbb{E}_m(X)}=\frac{m+1}{m}\cdot\frac{5}{6}$$

bilden. Das Ergebnis ist genau dann größer (bzw. kleiner) als 1, wenn $m<5$ (bzw. $m>5$) gilt. Des Weiteren gilt $\mathbb{E}_5(X)=\mathbb{E}_6(X)$. Unter dem Gesichtspunkt, den Erwartungswert des Spielgewinns größtmöglich zu machen, ist es also am besten, 5 oder 6 Würfel gleichzeitig zu werfen. Tabelle 1 zeigt die auf drei Nachkommastellen gerundeten Erwartungswerte $\mathbb{E}_m(X)$ für verschiedene Werte von $m$.

| $m$ | $\mathbb{E}_m(X)$ | $m$ | $\mathbb{E}_m(X)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2,500 | 5 | 6,028 |
| 2 | 4,167 | 6 | 6,028 |
| 3 | 5,208 | 7 | 5,861 |
| 4 | 5,787 | 8 | 5,582 |

**Tabelle 1:** $\mathbb{E}_m(X)$ für verschiedene Werte von $m$

Man beachte, dass die Maximierung des Erwartungswertes als physikalischem Schwerpunkt der Verteilung von $X$ nur *einen* Optimierungsaspekt darstellt. Möchte man die Wahrscheinlichkeit minimieren, eine Sechs zu werfen, so ist es angeraten, nur einen Würfel zu wählen.

## 3 Die Verteilung der Punktzahl

Insbesondere dann, wenn zwei Spieler gegeneinander antreten und es auf den Vergleich der erzielten Punktzahlen (die ja beim Auftreten von mindestens einer Sechs gleich null sind!) ankommt, ist die alleinige Kenntnis des Erwartungswertes von $X$ kein probates Mittel, um die Anzahl $m$ der Würfel festzulegen, mit denen man in das Spiel geht. Nach obigen Überlegungen ist es ja zudem unter dem Gesichtspunkt des Erwartungswertes egal, ob man fünf oder sechs Würfel wählt.

In diesem Abschnitt leiten wir die Verteilung der zufälligen Punktzahl $X$ her, also die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Zufallsvariable $X$ ihre möglichen Werte annimmt. Dabei lassen wir uns von folgender Überlegung leiten: Unter der Bedingung $E$, dass mindestens einer der Würfel eine Sechs zeigt, nimmt $X$ den Wert 0 an (und nur dann!), und die Wahrscheinlichkeit hierfür ist durch (1) gegeben. Nach der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit (siehe z.B. Henze (2017), Kap. 15) gilt für jeden Wert $\ell$ die Beziehung

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X=\ell)\\ =\;&\mathbb{P}(X=\ell|E)\mathbb{P}(E)+\mathbb{P}(X=\ell|E^c)\mathbb{P}(E^c).\end{aligned}\qquad(2)$$

In dieser Summe gelten $\mathbb{P}(X=0|E)=1$ und damit $\mathbb{P}(X=\ell|E)=0$, falls $\ell\ge 1$. Wir müssen uns also nur mit dem zweiten Summanden auseinandersetzen.

Hierzu beachte man, dass das komplementäre Ereignis $E^c$ genau dann eintritt, wenn keiner der Würfel eine Sechs zeigt. Unter dieser Bedingung tritt also bei jedem der $m$ Würfe nur eine der Augenzahlen $1,2,3,4$ oder 5 auf. Die Echtheit des Würfels hat zur Folge, dass nach Ausschluss des Auftretens der Sechs diese fünf Augenzahlen gleich wahrscheinlich sind. De facto wird also unter der Bedingung $E^c$ $m$-mal mit einem echten „fünfseitigen" Würfel geworfen, dessen Seiten von 1 bis 5 beschriftet sind. Für die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X=\ell|E^c)$ gilt also

$$\mathbb{P}(X=\ell|E^c)=\mathbb{P}(V=\ell). \tag{3}$$

Hierbei beschreibt $V$ die zufällige Augensumme beim $m$-fachen Werfen mit einem echten „Würfel", der die Werte 1,2,3,4 und 5 mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/5$ annimmt.

Für die Verteilung der Summe **m** unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen, die jeweils die Werte $1,2,\dots,s$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/s$ annehmen (und somit auch für die Verteilung von $V$) gibt es eine geschlossene Formel, die mithilfe erzeugender Funktionen erhalten werden kann, siehe z.B. Henze (2017), Kap. 25. Bezeichnet allgemein $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich einer reellen Zahl $x$, so gilt

$$\mathbb{P}(V=\ell)=\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{\ell-m}{5}\rfloor}\binom{\ell-5i-1}{m-1}(-1)^i\binom{m}{i}\frac{1}{5^m}$$

für $\ell\in\{m,m+1,\dots,5m\}$ und $\mathbb{P}(V=\ell)=0$, sonst.

In dieser Formel (sowie im Wertebereich von $V$) ist jede auftretende Fünf duch $s$ zu ersetzen, wenn jeder Wurf mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/s$ eine der Zahlen $1,2,\dots,s$ ergibt.

Aus obiger Darstellung ergibt sich zusammen mit (1), (2) und (3) das Resultat

$$\mathbb{P}(X=0)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^m \tag{4}$$

und

$$\mathbb{P}(X=\ell)=\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{\ell-m}{5}\rfloor}\binom{\ell-5i-1}{m-1}(-1)^i\binom{m}{i}\frac{1}{6^m} \tag{5}$$

für $\ell\in\{m,m+1,\dots,5m\}$.

Abbildung 1 zeigt ein Stabdiagramm der Verteilung von $X$ für den Fall $m=2$.

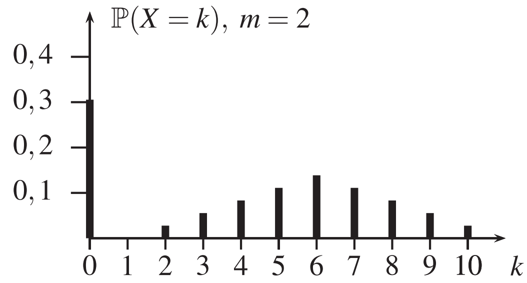


**Abb. 1:** Stabdiagramm der Verteilung von $X$, $m=2$

Hier gilt $\mathbb{P}(X=0)=0,305\cdots$. Vergleicht man dieses Stabdiagramm mit dem in Abb. 2 dargestellten für den Fall $m=3$, so erkennt man neben dem deutlich größeren Wert von $\mathbb{P}(X=0)=0,421\cdots$, dass die Werte $\mathbb{P}(X=k)$ für $k\geq 3$ im Vergleich zu dem entsprechenden Teil des Stabdiagrammes von Abb. 1 zu gößeren Werten hin tendieren. Dieser Effekt verstärkt sich bei weiterer Vergrößerung von $m$.

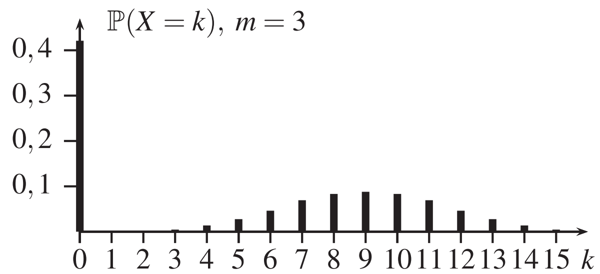


**Abb. 2:** Stabdiagramm der Verteilung von $X$, $m=3$

## 4 Die Zwei-Spieler-Variante

In diesem Abschnitt nehmen wir an, Spieler A wähle $m$ und Spieler B $n$ Würfel. Bezeichnen wir die zufälligen Punktzahlen von A und B mit $X$ bzw. $Y$, so sind $X$ und $Y$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, deren Verteilungen durch (4) und (5) gegeben sind. Dabei ist für $Y$ (anstelle von $X$) nur $m$ durch $n$ zu ersetzen. Wegen

$$\mathbb{P}(X>Y)=\sum_{i>j}\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j) \tag{6}$$

mit $i\in\{0,m,m+1\dots,5m\}$ und $j\in\{0,n,n+1,\dots,5n\}$ kann man die Gewinnwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X>Y)$ für A und in gleicher Weise die Gewinnwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y>X)$ für B mithilfe eines Computers berechnen. Tabelle 2 zeigt die auf drei Nachkommastellen gerundeten Werte von $\mathbb{P}(X>Y)$ (obere Werte) und $\mathbb{P}(Y>X)$ (untere Werte).

| $m\downarrow n\rightarrow$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .417 | .301 | .355 | .432 | .498 | .554 | .601 |
| | .417 | .602 | .567 | .481 | .402 | .335 | .279 |
| 2 | .602 | .421 | .348 | .369 | .417 | .462 | .501 |
| | .301 | .421 | .490 | .463 | .399 | .335 | .279 |
| 3 | .567 | .490 | .393 | .349 | .358 | .387 | .418 |
| | .355 | .348 | .393 | .411 | .382 | .331 | .278 |
| 4 | .482 | .463 | .411 | .355 | .329 | .333 | .350 |
| | .432 | .369 | .349 | .355 | .347 | .317 | .274 |
| 5 | .402 | .399 | .382 | .347 | .314 | .298 | .300 |
| | .498 | .417 | .358 | .329 | .314 | .295 | .264 |
| 6 | .335 | .335 | .331 | .317 | .295 | .274 | .265 |
| | .554 | .462 | .387 | .333 | .298 | .274 | .250 |
| 7 | .279 | .279 | .278 | .274 | .262 | .250 | 237 |
| | .601 | .501 | .418 | .350 | .300 | .265 | .237 |

**Tabelle 2:** $\mathbb{P}(X > Y)$ (obere Werte) und $\mathbb{P}(X < Y)$ (untere Werte) in Abhängigkeit von $m$ und $n$

Um Platz zu sparen, haben wir dabei die führende Null weggelassen und anstelle eines Kommas einen Dezimalpunkt geschrieben. Als Ablesebeispiel betrachten wir den Fall $m = 1$ und $n = 3$. Hier gewinnt A mit der Wahrscheinlichkeit 0,355 und verliert mit der Wahrscheinlichkeit 0,567. Mit Wahrscheinlichkeit $1 - 0,355 - 0,567 = 0,078$ endet das Spiel in einem Unentschieden.

Was bei näherer Betrachtung von Tabelle 2 auffällt, ist zunächst, dass selbst die Wahl $m = 1$, die die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eine Sechs minimiert, durchaus ihre Berechtigung hat, denn wenn Spieler B mindestens fünf Würfel wählt, so ist die Gewinnwahrscheinlichkeit für A größer als die Verlustwahrscheinlichkeit. Des Weiteren ist ersichtlich, dass im Fall $m = 5$ und $n = 6$, in dem beide Spieler den Erwartungswert von $X$ bzw. $Y$ maximiert haben, A gegenüber B leicht im Vorteil ist, denn seine Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 0,298, seine Verlustwahrscheinlichkeit aber nur 0,295. Man erkennt auch, dass bei dieser Wahl die Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden über 60 Prozent beträgt, weil bei beiden Spielern die Chance für das Auftreten mindestens einer Sechs recht hoch ist.

Was passiert mit den Werten in Tabelle 2, wenn bei festem $m$ die Anzahl $n$ über alle Grenzen wächst und umgekehrt? Nun, bei festem $m$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A eine positive Augensumme würfelt, gleich $(5/6)^m$. Er gewinnt auf jeden Fall dann gegen B, wenn letzterer mindestens eine Sechs würfelt. Da dieses Ereignis beim Werfen mit $n$ Würfeln mit der Wahrscheinlichkeit $1 - (5/6)^n$ eintritt und dieser Wert für $n$ gegen Unendlich gegen 1 konvergiert, nähern sich die oberen Werte in der $m$-ten (Doppel-)Zeile von Tabelle 2 für $n \to \infty$ dem Wert $(5/6)^m$ an. Die jeweils unteren Werte konvergieren gegen null, da A überhaupt nur dann verlieren kann, wenn B eine positive Augensumme wirft.

| $m\downarrow n\rightarrow$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | = | − | − | − | + | + | + |
| 2 | + | = | − | − | + | + | + |
| 3 | + | + | = | − | − | + | + |
| 4 | + | + | + | = | − | + | + |
| 5 | − | − | + | + | = | + | + |
| 6 | − | − | − | − | − | = | + |
| 7 | − | − | − | − | − | − | = |

**Tabelle 3:** Ein Plus bzw. Minus zeigt an, ob die Gewinnwahrscheinlichkeit von A größer oder kleiner als die von B ist

Reduziert man Tabelle 2 auf die Information, ob $\mathbb{P}(X > Y) > \mathbb{P}(Y > X)$ oder $\mathbb{P}(X > Y) < \mathbb{P}(Y > X)$ oder $\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}(Y > X)$ gilt, also die Gewinnwahrscheinlichkeit von A größer oder kleiner als die von B bzw. gleich derjenigen von B ist, so ergibt sich Tabelle 3. In dieser sind die entsprechenden Fälle mit einem Plus- oder Minuszeichen oder einem Gleichheitszeichen gekennzeichnet. Was auffällt ist, dass derjenige Spieler im Vorteil ist, der bei seiner Wahl der Anzahl der Würfel schon weiß, wie viele Würfel sein Kontrahent gewählt hat. Wählt etwa $B$ einen, zwei, drei oder vier Würfel, so kann A jeweils einen Würfel mehr nehmen und ist im Vorteil. Sucht sich B mindestens fünf Würfel aus, so kann A $m = 1$ wählen und ist ebenfalls im Vorteil.

## 5 Umsetzung im Unterricht

Stochastik in der Schule lebt von Experimenten, die echte Fragen beantworten sollten. Diese Forderung liegt bei dem hier betrachteten Augensummenspiel in besonderer Weise vor. Zu Beginn könnte man die Schülerinnen und Schüler auffordern, sich zu überlegen, wie viele Würfel sie nehmen würden, wenn sie beim oftmaligen wiederholten Spiel im Mittel eine möglichst hohe Punktzahl erhalten wollen (Ein-Personen-Variante). Sodann könnte man die Frage stellen, wie viele Würfel sie als Spieler A wählen würden, um die eigene Gewinnwahrscheinlichkeit zu maximieren, wenn Spieler B etwa $n = 4$ Würfel gewählt hat. Eine damit einhergehende Prognose fördert das stochastische Denken, bevor experimentiert, simuliert oder gerechnet wird.

Ehe man den Versuch einer mathematischen Modellierung unternimmt, sollte dann angesichts der

Komplexität des Problems zunächst mit Realwürfeln experimentiert werden. Dieses behutsame Vorgehen lässt Raum, um stochastische Erfahrungen zu sammeln, und solche macht man in einer motivierenden Spielsituation besonders gerne. Je zwei Schülerinnen und Schüler entscheiden sich für eine bestimmte Anzahl an Würfeln und spielen gegeneinander. Angst und Gier führen vermutlich zur Wahl ganz unterschiedlicher Würfelanzahlen, und eine anschließende Diskussion über das Spiel wirft sicherlich viele Probleme auf. Die folgende zentrale Frage, die mit großer Wahrscheinlichkeit aus dem Unterrichtsgespräch erwächst, soll nun genauer betrachtet werden:

*Wie viele Würfel sollte man nehmen, wenn man weiß, wie viele Würfel mein Gegenüber gewählt hat?*

## 6 Simulation

An dieser Stelle ist der Einsatz eines Rechners sinnvoll. Gerade in der Sekundarstufe II gehört zu einer Simulation auch die Interpretation des Ergebnisses. So sollte vor dem Simulieren klar sein, welche Schwankungsbreite für beobachtete relative Häufigkeiten als Schätzwerte unbekannter Wahrscheinlichkeiten zu erwarten ist. Die Schülerinnen und Schüler sollten also das $1/\sqrt{n}$-Gesetz kennen. Es kann auch nicht schaden, mit Konfidenzintervallen vertraut zu sein, die gerade bei unserem Problem überzeugend einsetzbar sind, dazu später mehr.

In Abschnitt 4 wurden für einige Kombinationen $m$ und $n$ von Würfelanzahlen die entsprechenden Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden Spieler auf analytischem Weg bestimmt. Dieses Vorgehen ist in der Schule natürlich nicht möglich, aber die Lehrkraft sollte (idealerweise) den damit verbundenen Weg kennen. Ein solches Hintergrundwissen kann helfen, im Unterricht eine „Tiefbohrung“ vorzunehmen.

Im Folgenden zeigen wir die Einsatzmöglichkeiten digitaler Werkzeuge auf. Die Simulationen und (exakten) Berechnungen können zwar ausnahmslos mit dem weit verbreiteten Programm GeoGebra durchgeführt werden. Wir möchten hier aber auch verdeutlichen, dass ein in einigen Bundesländern üblicher CAS-Rechner wie etwa der TI-Nspire sinnvoll eingesetzt werden kann.

Zuerst einmal sollte behutsam simuliert werden. Ziel ist es, für verschiedene Werte von $m$ und $n$ Gewinnwahrscheinlichkeiten zu ermitteln, um unsere Kernfrage zu beantworten. Das geht schon mit einem Zweizeiler, hier einmal exemplarisch durchgeführt mit dem TI-Nspire CAS. Abbildung 3 zeigt für $m = 2$ und $n = 4$ jeweils 5 Simulationen.

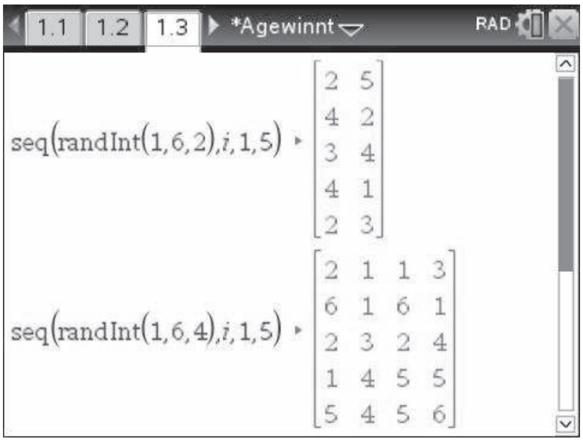


**Abb. 3: Simulation mit dem TI-Nspire CAS**

Hierbei erzeugt der Befehl *randInt(1,6,n)* das $n$-malige Werfen eines echten Würfels. Der wichtige Folge-Befehl *seq(Ausdruck,i,1,w)* bewirkt, dass ein *Ausdruck* – hier die Generierung mehrerer Zufallszahlen – $w$-mal wiederholt wird. Diese zur Simulation von Stichprobenverteilungen zentrale Vorgehensweise sollte von Schülerinnen und Schülern selbstständig durchgeführt werden. Auf der anderen Seite sind die nachstehenden Berechnungen und Simulationen mit dem TI-Nspire CAS und GeoGebra schon sehr komplex; hier sollte die Lehrperson Vorgaben machen.

Offenbar haben in der in Abb. 3 dargestellten Situation Spieler A und B jeweils zweimal gewonnen, und einmal endete das Spiel unentschieden.

Mithilfe solcher Simulationen kann jetzt ein Wechselspiel „*Rechner/Bleistift und Papier*“ erfolgen, wobei sich sukzessive eine Strichliste mit den drei Möglichkeiten „A gewinnt“, „B gewinnt“ oder „Unentschieden“ aufbaut. Ein solches „entschleunigtes“ Vorgehen schafft oft mehr Verständnis für die Sache als eine ausgearbeitete Lernumgebung, denn Schülerinnen und Schüler erfahren wieder einmal, dass Variabilität und Muster zentrale Erscheinungen des Zufalls sind. Auf diese Weise wird auch ein Bezug zur beurteilenden Statistik hergestellt. Zudem ist der Aufwand viel zu groß, die Simulation an dieser Stelle zu automatisieren.

Als effektiv hat sich das folgende Vorgehen herausgestellt: Jeder Lernende erzeugt eine gewisse Anzahl an Simulationen, z.B. 50. Danach werden alle Resultate als Kursergebnis zusammengefasst. Schnell entstehen somit etwa 1000 Simulationen und damit zwei relative Häufigkeiten als Näherungswerte für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten, mit $m$ Würfeln bzw. mit $n$ Würfeln zu gewinnen bzw. zu verlieren. Bei einem Stichprobenumfang von $N = 1000$ ergibt sich eine Abweichung von ca. $\pm 3$ Prozentpunkten, wenn bei einem Schätzwert $\widehat{p}_N$ (relative Trefferhäufigkeit aus $N$ Versuchen) für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit mit dem WALD-Konfidenzintervall

$$\widehat{p}_N \pm \frac{1,96}{\sqrt{N}} \sqrt{\widehat{p}_N(1-\widehat{p}_N)}$$

gerechnet wird, siehe auch Vehling (2015). Erst danach sollte die Lehrkraft eine komplexere Simulation als Demonstrationsexperiment einsetzen.

Hierfür eignet sich besonders das Programm GeoGebra[1]. Zum einen kann durch Änderung des Stichprobenumfangs $N$ die Variabilität verdeutlicht werden. Zum anderen lässt sich durch Variation der Werte für $m$ und $n$ analog zu Tabelle 2 eine Tabelle mit Schätzwerten der (an dieser Stelle für die Schülerinnen und Schüler noch unbekannten) Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten für Spieler A erstellen. Zudem sollten die erhaltenen Schätzwerte mit Konfidenzintervallen (deren Behandlung in einigen Bundesländern obligatorisch ist) versehen werden, um die Genauigkeit dieser Schätzwerte beurteilen zu können.

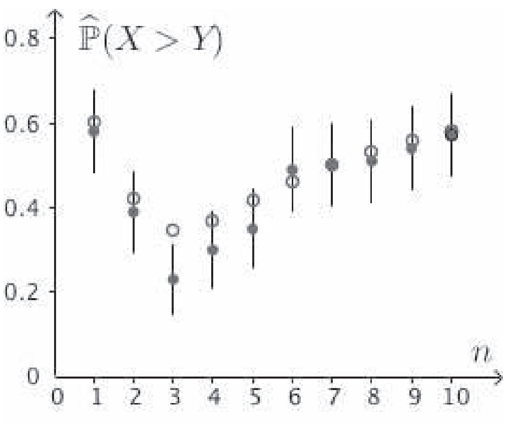


**Abb. 4: Simulation, $m = 2$, $n$ variabel**

Abbildung 4 zeigt eine mögliche Darstellung der Ergebnisse mithilfe von GeoGebra. Es wurden für $m = 2$ und jedes $n = 1, \ldots, 10$ jeweils 100 Simulationen durchgeführt und stets der relative Anteil derjenigen Fälle festgestellt, in denen Spieler A gewinnt. Da wir die zufälligen Punktzahlen von A und B mit $X$ bzw. $Y$ bezeichnet haben, ist diese relative Häufigkeit somit ein mit $\widehat{\mathbb{P}}(X > Y)$ bezeichneter Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > Y)$. Zusammen mit jedem solchen, als Punkt gekennzeichneten Schätzwert wurde das zugehörige 95%-Konfidenzintervall ermittelt und als Strich gekennzeichnet. Die nicht ausgefüllten Kreise geben die jeweiligen theoretischen Wahrscheinlichkeiten an. Es zeigt sich, dass nur für $n = 3$ die tatsächliche Wahrscheinlichkeit nicht vom Konfidenzintervall überdeckt wird, was in ca. 5% aller Fälle vorkommen sollte.

Die Bedeutung eines 95%-Konfidenzintervalls kann an dieser Stelle in einem Kursexperiment erfahren werden, wenn für feste Werte für $m$ und $n$ mehrmals simuliert und jeweils das zugehörige 95%-Konfidenzintervall berechnet wird. Von insgesamt 100 Intervallen sollten etwa fünf die (unbekannten) Wahrscheinlichkeit nicht überdecken. Allgemein erscheint uns wichtig, die Bedeutung der Überdeckungswahrscheinlichkeit in möglichst unterschiedlichen Situationen immer wieder anzusprechen.

Obgleich diese Simulation die Ausgangsfrage experimentell beantwortet und eine Simulation in vielen komplexen Problemstellungen ein effektives Mittel bereitstellt, zeigen die Überlegungen des nächsten Abschnitts, dass wir in unserer Situation zumindest teilweise den Schleier lüften und für bestimmte Werte für $m$ und $n$ exakte Wahrscheinlichkeiten bestimmen können.

## 7 Berechnungen auf Schulniveau

Auch wenn nicht alle Schülerinnen und Schüler die Frage nach einer rechnerischen Lösung stellen, sollte an dieser Stelle mathematisch modelliert werden, da sich hierdurch vielfältige Vernetzungen eröffnen. Auch wird die Diskussion ertragreicher, über Unterschiede und Gemeinsamkeiten der beiden Wege zu diskutieren.

Der Fall $m = 1$ und $n = 1$ lässt sich relativ leicht lösen: Es gilt: $\mathbb{P}(X > Y) = 15/36$. Für $m = 1$ und $n = 2$ kann die Darstellung

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,3) | (6,5) | (6,6) |

**Tab. 4: 36 gleich wahrscheinliche Augen-Paare im Fall $n = 2$**

[1] Die in dieser Arbeit verwendeten GeoGebra-Dateien sind vom zweiten Autor erhältlich.

helfen, die die möglichen, gleich wahrscheinlichen Ergebnisse des zweiten Spielers ($n = 2$) aufzeigt. Dabei unterscheiden wir die beiden Würfel gedanklich und bezeichnen allgemein mit $(i, j)$ das Ergebnis, dass Würfel 1 und Würfel 2 von Spieler B die Augenzahlen $i$ bzw. $j$ zeigen.

Offenbar ergeben sich für Spieler A ($m = 1$) für jede seiner fünf möglichen Augenzahlen $1, 2, \dots, 5$, die zumindest einen Gewinn in Aussicht stellen, 11 Ausgänge, in denen Spieler B mindestens eine Sechs würfelt. Diese Fälle führen schon einmal zu $5 \cdot 11 = 55$ günstigen Ergebnissen. Für die Augensummen 1 und 2 kommen keine weiteren Fälle hinzu, aber für die Augensumme 3 resultiert noch ein weiteres günstiges Ergebnis, wenn Spieler B zweimal die 1 würfelt. Insgesamt entstehen noch 10 weitere Möglichkeiten, und somit folgt

$$\mathbb{P}(X > Y) = \frac{65}{6^3} \approx 0,3009.$$

Anhand dieser Überlegungen lässt sich ein Muster erkennen: Benutzt Spieler B $n = 3$ Würfel, so kann man sich die Tabelle 4 dreidimensional vorstellen, wobei ein Gitterpunkt $(i, j, k)$ für die Augenzahlen $i$, $j$ und $k$ der wiederum durch Nummerierung unterscheidbar gemachten drei Würfel von B steht. Es ergeben sich für jede Augenzahl 1,2,3,4 oder 5 von Spieler A insgesamt $6^3 - 5^3 = 91$ Möglichkeiten, dass A gewinnt. Diese Situation kann man sich geometrisch so vorstellen, dass von einem $6 \times 6 \times 6$-Punktwürfel ein $5 \times 5 \times 5$-Punktwürfel „subtrahiert wird“, wobei $6^3 - 5^3$ Punkte übrig bleiben. Zu diesen $5 \cdot 91$ Möglichkeiten müssen noch 5 weitere Fälle addiert werden, da die Augenzahl 4 gegen einen Dreier-Pasch $(1, 1, 1)$ gewinnt und sich die Augenzahl 5 gegen jedes der Tripel $(1, 1, 1), (2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ und $(1, 1, 2)$ durchsetzt. Somit folgt

$$\mathbb{P}(X > Y) = \frac{5 \cdot 91 + 5}{6^4} = \frac{460}{6^4} \approx 0,3549.$$

Für $n = 4$ erhält man analog

$$\mathbb{P}(X > Y) = \frac{5 \cdot (6^4 - 5^4) + 1}{6^5} = \frac{3356}{6^5} \approx 0,4316.$$

Ab $n = 5$ liefert nur noch der $n$-dimensionale Restwürfel die günstigen Ergebnisse für Spieler 1, sodass sich das Resultat

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > Y) &= \frac{5 \cdot (6^n - 5^n)}{6^{n+1}} \\ &= \frac{5}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}, n \geq 5, \end{aligned} \tag{7}$$

ergibt. Somit kann auf Schulniveau im Fall $m = 1$ für jedes $n$ ein geschlossener Ausdruck für die Gewinnwahrscheinlichkeit von A angegeben werden.

Natürlich führen auch noch weitere Ansätze zu dieser Formel. So kommt man für $n \geq 5$ auch mit folgendem Ansatz sofort zu (7): Spieler A gewinnt genau dann für $n \geq 5$ gegen B, wenn er keine Sechs würfelt und sein Kontrahent mindestens eine Sechs. Diese Einsicht führt wegen der stochastischen Unabhängigkeit dieser Ereignisse zu $\frac{5}{6} \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$. Für $n \to \infty$ (Vernetzung mit der Analysis!) ergibt sich hieraus der auch schon in Abschnitt 4 hergeleitete Grenzwert $\frac{5}{6}$ als „Langzeit-Ergebnis eines begrenzten Wachstums“.

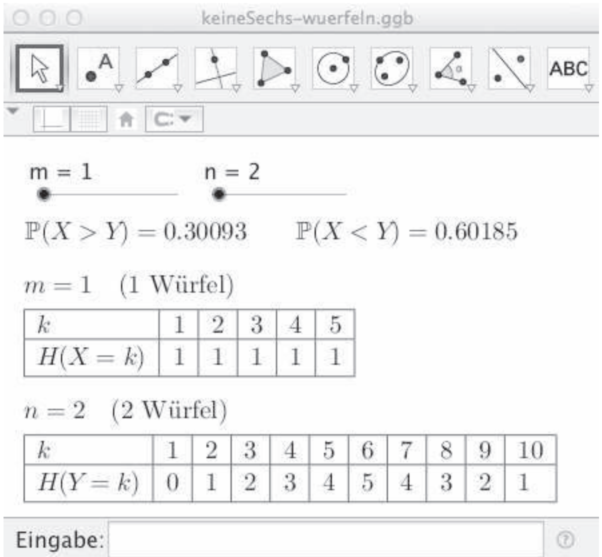


**Abb. 5: Hinführung zur allgemeinen Formel**

Will man das Tiefbohren noch weiter treiben und auf die Formel (6) hinaus, eignet sich z. B. Abbildung 5. Diese zeigt sämtliche Möglichkeiten für die Augenzahl ($m = 1$) bzw. die Augensumme ($n = 2$) ohne das Auftreten einer Sechs. Hiermit lässt sich auf Schulniveau der Kern der in (6) auftretenden Doppelsumme $\sum_{i>j} \mathbb{P}(X = i) \cdot \mathbb{P}(Y = j)$ und damit der Weg zur allgemeinen Darstellung verdeutlichen: Kennt man die Häufigkeitsverteilungen der Augensummen, so kann durch Multiplikation der betreffenden Anzahlen mit anschließender Summation die Gesamtanzahl der günstigen Möglichkeiten ermittelt werden. Letztlich werden für absolute Häufigkeiten nur die beiden Pfadregeln angewandt. Es sollte klar werden, dass wir das komplexe Problem auf etwas Bekanntes zurückführen können. Es handelt sich im Kern „nur“ um ein zweistufiges Baumdiagramm. Schwierig daran ist im Prinzip allein das Auffinden der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Diese Art der Modellierung sollte den Schülerinnen und Schülern aus vielfältigen Problemstellungen vertraut sein: Der erste Würfel liefert für $m = 1$ und $n = 2$ die erste Stufe des Baumdiagramms mit fünf Pfaden, die beiden anderen Würfel die zweite Stufe mit jeweils zehn Pfaden - neun Pfade für $k = 2, \dots, 10$ und ein Pfad für das Ereignis *„mindestens eine Sechs beim Wurf mit zwei Würfeln"*. In Abbildung 5 wurde bewusst darauf verzichtet, die Anzahl der absoluten Häufigkeiten anzugeben, mit zwei Würfeln mindestens eine Sechs zu würfeln. Diese Anzahl kann aus den gegebenen Informationen (hier: $6^2 - 5^2 = 11$) ermittelt werden. So können Schülerinnen und Schüler mit der GeoGebra-Datei für verschiedene Werte für $m$ und $n$ die angezeigten Wahrscheinlichkeiten verifizieren. Für das Beispiel $m = 1$ und $n = 2$ ergibt sich etwa

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > Y) &= \frac{1}{6^3} \cdot [11 + 11 + (1 + 11) \\ &\quad + (1 + 2 + 11) \\ &\quad + (1 + 2 + 3 + 11)] \\ &= \frac{65}{6^3} \approx 0,3009 \end{aligned}$$

Soll auch ein Verständnis für die Ermittlung der absoluten Häufigkeiten in den beiden Tabellen (Abbildung 5) erzielt werden, kann an dieser Stelle schon auf Schulniveau mit erzeugenden Funktionen gearbeitet werden. So folgt z.B. für den Term $(x^1 + x^2)^2$ durch Anwendung der ersten binomischen Formel

$$\begin{aligned} (x^1 + x^2)^2 &= 1 \cdot x^{1+1} + 2 \cdot x^{1+2} + 1 \cdot x^{2+2} \\ &= 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten vor den $x$-Termen geben die absoluten Häufigkeiten (Anzahlen) für die möglichen Augensummen 2, 3 und 4 beim Wurf mit zwei Würfeln wieder, wobei die Würfel nur die Augenzahlen 1 und 2 aufweisen. Diese schöne Anwendung einer binomischen Formel sowie eines Potenzgesetzes kann vorher ohne Rechnereinsatz von den Schülerinnen und Schülern durchgeführt werden, um die zugrunde liegenden Muster und Strukturen zu erkennen.

Um nun die Häufigkeitsverteilung der Augensummen beim $n$-fachen Würfelwurf (ohne Auftreten einer Sechs) zu erhalten, kann die durch

$$f_n(x) = (x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^n \qquad (8)$$

definierte erzeugende Funktion $f_n$ dieser Augensummen-Anzahlen betrachtet werden. Ausmultipliziert finden sich wieder die einzelnen absoluten Häufigkeiten (Anzahlen) für die Augensummen beim $n$-fachen Würfelwurf als Koeffizienten vor den einzelnen $x$-Termen wieder. Mit Schülerinnen und Schülern kann man etwa den Fall $n = 2$ und vielleicht auch den Fall $n = 3$ betrachten. Hier ergibt sich

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^4 + 4 \cdot x^5 \\ &\quad + 5 \cdot x^6 + 4 \cdot x^7 + 3 \cdot x^8 + 2 \cdot x^9 + 1 \cdot x^{10} \\ f_3(x) &= 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^4 + 6 \cdot x^5 + 10 \cdot x^6 + 15 \cdot x^7 + 18 \cdot x^8 \\ &\quad + 19 \cdot x^9 + 18 \cdot x^{10} + 15 \cdot x^{11} + 10 \cdot x^{12} + 6 \cdot x^{13} \\ &\quad + 3 \cdot x^{14} + 1 \cdot x^{15}, \end{aligned}$$

und man erkennt schon das Wesentliche. Übrigens erhält man hiermit eines der wenigen Beispiele für einen sinnvollen CAS-Einsatz in der Stochastik. Da ein CAS-System die in (8) auftretende $n$-fache Multiplikation auf Knopfdruck realisiert und sogar die einzelnen Koeffizienten des resultierenden Polynoms $5n$-ten Grades herausfiltert, kann auch in der Schule für jede Spielsituation die betreffende Wahrscheinlichkeit berechnet werden. Abb. 6 und Abb. 7 zeigen eine mögliche Umsetzung mit dem TI-Nspire CAS, wobei als Beispiel $m = 1$ und $n = 2$ gewählt wurde.[2]

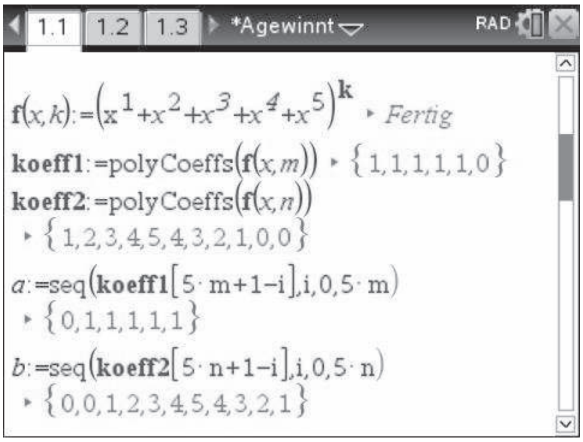


**Abb. 6: CAS-Einsatz 1**

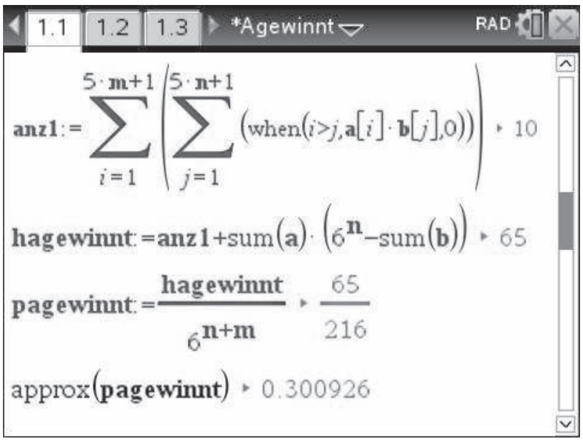


**Abb. 7: CAS-Einsatz 2**

[2] Die Dateien sowie genaue Erläuterungen der verwendeten Befehle sind vom zweiten Autor erhältlich.

Eine solche Umsetzung kann und soll sicherlich nicht jeder Lernende leisten; hier ist eine Binnendifferenzierung sinnvoll. Es gibt aber immer wieder begeisterungsfähige Schülerinnen und Schüler, die auch selbstständig höheren Gesichtspunkten nachgehen wollen. Mit dieser kleinen Lernumgebung können nun auch die Werte von Tabelle 2 berechnet werden, womit die Ausgangsfrage vollständig gelöst wäre. Weiß man, wie viele Würfel der Gegenspieler ausgewählt hat, kann man immer eine Würfelanzahl finden, sodass die eigene Gewinnwahrscheinlichkeit größer als die Verlustwahrscheinlichkeit ist. Dass man bei wenigen Spielen trotzdem verlieren kann, sollte nach den früher angestellten Überlegungen klar sein. Hier sind gerade Simulationen geeignet, die Variabilität in den Vordergrund zu stellen.

## 8 Nochmals Erwartungswerte

Mit Kenntnis der erzeugenden Funktion (8) und der Benutzung eines CAS-Systems ist die Ermittlung des Erwartungswertes $\mathbb{E}_m(X)$ (zur Erinnerung: der Index $m$ gibt die Anzahl der gewählten Würfel an) auch in der Schule möglich, wobei in den Fällen $m=1$ und $m=2$ ein Computer sogar unnötig sein sollte. Idealerweise sollte die Lehrperson über genügend Fachwissen verfügen und wie im Abschnitt 2 beschrieben den allgemeinen Term $\mathbb{E}_m(X) = 3m\left(\frac{5}{6}\right)^m$ ermitteln können. Ein sicheres Fachwissen ist notwendig, um den Schülerinnen und Schülern genügend Tiefbohrung zu bieten, im Hinblick auf einen guten Unterricht aber selbstverständlich nicht hinreichend! Natürlich kann auch hier ein Vergleich von simulierten arithmetischen Mitteln des Spielgewinns mit den jeweiligen Erwartungswerten als Prognosen für „Mittelwerte auf lange Sicht“ (Gesetz großer Zahlen) erfolgen.

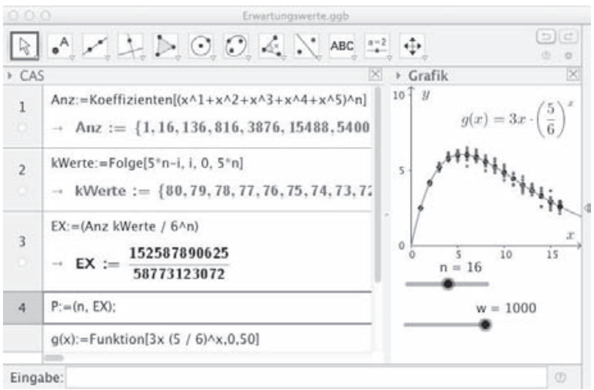


**Abb. 8: Erwartungswerte**

Auch an dieser Stelle ergeben sich wieder Vernetzungen zur Analysis, denn eine Funktion $f$ mit $f(x) = x \cdot e^{-x}$ wird oft im Unterricht behandelt. Wieso sollte man nicht einmal die Funktion $g$ mit

$$g(x) = 3x \cdot e^{x \cdot \ln \frac{5}{6}}$$

betrachten und eine Funktions-Diskussion durchführen? Hier hat die Suche nach dem Maximum wenigstens einen inhaltlichen Grund! Zudem bieten sich genügend Argumentationsanlässe, denn es ist allein schon ein erstaunliches Ergebnis, dass sich für $m=5$ und $m=6$ gleiche Erwartungswerte ergeben, die auch gleichzeitig das Maximum der Funktion $g$ über die diskreten Abszissenwerte $1, 2, \ldots$ beschreiben.

Abb. 8 zeigt die besonderen Stärken von GeoGebra. So können z. B. durch die Verknüpfung der verschiedenen Welten berechnete Werte überzeugend im Grafikfenster dargestellt werden. Weiterhin erkennt man die besonderen Vorteile einer Listenverarbeitung, mit der in GeoGebra gearbeitet werden kann. Die Ermittlung des Erwartungswertes erfolgt einfach durch Multiplikation zweier Listen. Diese besondere Multiplikation entspricht dem Skalarprodukt in der Analytischen Geometrie. Hierdurch wird das dem Erwartungswert zugrunde liegende Prinzip „Summe von Wert mal Wahrscheinlichkeit“ besonders deutlich. Insgesamt werden nur drei Zeilen benötigt, um im CAS-Fenster den Erwartungswert $\mathbb{E}_m(X)$ für jedes $m$ zu erhalten. Eine geschlossene Formel kann so natürlich nicht erzeugt werden. Aber nachdem die CAS-Lösung erarbeitet wurde, darf sich eine Lehrperson im Unterricht sicherlich auch einmal einbringen und den exakten Term vorgeben. Auch an dieser Stelle bietet es sich an, vorher zu simulieren. Man kann, wie in Abb. 8 dargestellt, die Simulation automatisieren. Eine solche Automatisierung erfordert schon gute Kenntnisse in GeoGebra. Sinnvoller ist es, auch hier entweder mit Realwürfeln zu arbeiten oder den Rechner zu benutzen, um jeweils nur eine Simulation durchzuführen. Mit dem GeoGebra-Befehl „*Alle Objekte neu berechnen*“ lässt sich dann die Simulation z. B. 10-mal durchführen. Die einzelnen Summen können nacheinander in die Tabelle eingegeben werden, in der sich auch der Mittelwert berechnen lässt. Dieses Vorgehen hat mehrere Vorteile: Zum einen ist eine derartige Simulation für Schülerinnen und Schüler transparenter, zum anderen schälen sich als Nebeneffekt zentrale stochastische Phänomene heraus. So haben sich etwa bei der ersten Durchführung der Simulation die Punktzahlen 12, 12, 10, 7, 0, 0, 0, 0, 0, 13 ergeben. Fordern Sie doch einmal ihre Schülerinnen und Schüler auf, 10 ausgedachte mögliche Punktzahlen zu notieren. Das oben angegebene Muster wird aller Voraussicht nach nicht vorkommen, weil der Zufall für viele Menschen „weniger extrem“ und damit nach ihrer persönlichen Vorstellung „zufälliger“ ist. Fünf Nullen hintereinander erscheinen „eher unwahrscheinlich“ zu sein.

Die Umsetzung der elementaren Simulation gelingt wieder durch die Datenstruktur „Liste“ kompakt und übersichtlich. Nur zwei Befehle sind notwendig, wenn die Definition eines Schiebereglers $m$ für die Anzahl der Würfel nicht mitgezählt wird: (*wurf=Folge[Zufallszahl[1, 6], i, 1, m]; Wenn[6 ∈ wurf, 0, Summe[wurf]]*).

## 9 Fazit

Im Stochastikunterricht werden gern Beispiele aus der Welt des Glücksspiels benutzt. Es darf bei den Lernenden aber nicht der Eindruck entstehen, Stochastik sei nur „Würfelbudenmathematik“. Unser gewähltes Beispiel ist zwar ein Glücksspiel, es bleibt aber nicht dabei, irgendwelche Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Zum einen handelt es sich um ein echtes Problem, dass umfassend gelöst wird: Ein Spieler mit dem Wissen über die stochastischen Zusammenhänge dieses Spiels kann bei Kenntnis der gewählten Würfelanzahl des zweiten Spielers eine Würfelanzahl wählen, die eine höhere Gewinnwahrscheinlichkeit aufweist. Zum anderen geht es uns um Vernetzungen Universität/Schule und um die Vernetzungen innerhalb der Stochastik. Eine Lehrkraft benötigt gerade im Bereich Stochastik eine fundierte Ausbildung, die (deutlich) über den Schulstoff hinausgeht. Sie benötigt besonders ein Wissen über Zufallsvariablen und deren Verteilung und über die Variabilität und die Muster des Zufalls. Konkret auf das Spiel bezogen sollte sie auch eine Antwort wissen, wenn ein Lernender nach einer allgemeinen Formel für die Augensummen-Verteilung beim $n$-fachen Würfelwurf fragt. Diese Frage kann z. B. auf Schulniveau mit Mitteln eines CAS beantwortet werden. Ein Lehrender sollte auch die Möglichkeiten für den Einsatz von Simulationen kennen. Ein fundiertes Wissen ist zudem eine Grundvoraussetzung dafür, dass man sich darauf einlässt, immer wieder nach verschiedenen Lösungswegen zu suchen und diese auch im Unterricht zuzulassen. Des Weiteren soll unser Beispiel aufzeigen, dass es vielfältige Vernetzungen innerhalb der Stochastik gibt, s. Vehling (2012). Daten und Zufall gehören zusammen. So kann z.B. auch bei einem Glücksspiel der Nutzen von Konfidenzintervallen aufgezeigt werden. Die beschreibende Statistik, die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die beurteilende Statistik bilden eine Einheit. Diese aufzuzeigen, sollte immer wieder versucht werden, auch unter gelegentlicher Heranziehung eines Glücksspiels.

**Danksagung:** Die Autoren danken den Gutachtern sowie Herrn Prof. Dr. Joachim Engel für diverse Verbesserungsvorschläge.

## Literatur

Henze, N. (2011): Zwischen Angst und Gier: Die Sechs verliert. In: *Stochastik in der Schule* 31, S.2 – 5.

Henze, N. (2017): Stochastik für Einsteiger. 11. Auflage: Verlag Springer Spektrum. Heidelberg.

Vehling, R. (2012): Vernetzungen in der Stochastik. In: *PM - Praxis der Mathematik in der Schule* (54)48, S.31 – 35.

Vehling, R. (2015): Konfidenzintervalle mit dem TI-Nspire TM CAS. In: *TI-Nachrichten* 2/15. S. 21 – 26. Download (Stand: 16.10.2016): www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Anschriften der Verfasser:

Prof. Dr. Norbert Henze
Institut für Stochastik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Englerstr. 2
76131 Karlsruhe
Henze@kit.edu

Reimund Vehling
Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien
Hannover I
vehling@icloud.com