Was man noch über die Wahrscheinlichkeiten beim Würfeln und Münzwurf lernen kann

PETER K. DUNN; UNIVERSITY OF SOUTHERN QUEENSLAND, AUSTRALIEN

Übersetzung und Bearbeitung: HANS-DIETER SILL, ROSTOCK

Zusammenfassung:
Das Würfeln und der Münzwurf können im Stochastikunterricht verwendet werden, auch wenn die Schüler schon wissen oder glauben zu wissen, was bei diesen Experimenten passiert. Im Artikel werden einige einfache Varianten dieser Experimente betrachtet, die interessant unterhaltsam und faszinierend sein können. Die Verwendung dieser Varianten kann Schüler und Lehrer anregen, über die darin enthaltenen stochastischen Probleme nachzudenken und neue Erkenntnisse zu gewinnen.

Einleitung

Das Würfeln und der Münzwurf sind oft ein Hauptbestandteil des grundlegenden Stochastikunterrichts. In diesem Artikel wollen wir zeigen, dass diese wohlbekannten Experimente durch einfache Variationen noch weiteres Potenzial für den Unterricht enthalten.

Truran (1984) zeigte, dass bei Kindern unter 10 Jahren viele grundlegende Wahrscheinlichkeitskonzepte, die auf der Verwendung von Münzen und Würfeln beruhen, missverstanden werden. Green (1983) und Kerslake (1974) zeigten ebenfalls, dass jüngere Schüler Schwierigkeiten haben, die gleiche Wahrscheinlichkeit bei Würfeln zu beschreiben. Sie zeigten weiterhin, dass dies vor allem bei Schülern mit geringen geistigen Fähigkeiten auftrat und es sich mit zunehmendem Alter verbesserte. Hawkins und Kapadia (1984) zeigten, wie Kinder Wahrscheinlichkeitskonzepte erlernen können und betrachteten viele interessante Fragen bezüglich der Lernwege der Schüler.

Wenn die Schüler in die Sekundarstufe kommen, hat die Mehrzahl der Schüler bereits gelernt, dass die Ergebnisse beim Münzwurf und Würfeln gleichwahrscheinlich sind und sie haben eine große Anzahl von Würfelversuchen und Münzwürfen erlebt. Es ist deshalb nicht einfach, Interesse an einem Problem zu entwickeln, mit dem sich die Schüler nicht nur in der Schule sondern auch außerhalb der Schule bei Spielen und ähnlichen Anlässen ausführlich beschäftigt haben.

Im Artikel sollen einige Varianten dieser Standardexperimente vorgestellt werden, die Schüler interessieren können, bei denen die hauptsächlichen Eigenschaften der Originalexperimente erhalten bleiben, die leicht verstanden und durchgeführt werden können, und die günstige Möglichkeiten zur schnellen und leichten Erfassung und Analyse der Daten bieten.

Werfen von Würfeln

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns speziell mit dem Würfeln. Historische Daten und verschiedene Varianten werden diskutiert. Wir beschäftigen uns nicht mit regulären n-seitigen Würfeln obwohl jede der diskutierten Varianten auf einer Veränderung des sechsseitigen Standardwürfels beruht.

Geschichte

In Hand u. a. (1994) sind die bekannten Wolf-Daten über die Häufigkeit der einzelnen Augenzahlen bei 20.000 Würfen enthalten (Tab. 1). Diese Daten sind geeignet, die fundamentalen Ideen der Streuung und der Zufälligkeit zu diskutieren.

Augenzahl	Häufigkeit	relative Häufigkeit
1	3407	0,1704
2	3631	0,1816
3	3176	0,1588
4	2916	0,1458
5	3448	0,1724
6	3422	0,1711

Tab. 1: Daten von Wolf: Häufigkeit der Augenzahlen bei 20.000 Würfen mit einem Würfel (Quelle: Hand u. a. 1994, Datensatz 131)

Als eine Frage ergibt sich unmittelbar, ob der Würfel verfälscht ist, da die 4 relativ selten und die 2 relativ häufig erscheint. Die erwartete relative Häufigkeit ist 1/6 = 0,167; sind die Differenzen von Bedeutung? Wie kann man dieses herausfinden?

Originalartikel in Teaching Statistics 27 (2005) 2, S: 37-41

Diese Fragen mögen sehr einfach erscheinen, sie sind aber grundlegend für das Verständnis der Stochastik. Sie können den Schülern ein Verständnis des Begriffs der Stichprobenvarianz ermöglichen, einer der nach meiner Erfahrung schwierigsten Begriffe der Stochastik.

Die Standardlösung zur Beantwortung dieser Frage ist die Durchführung eines Hypothesentests. Eine Alternative, die Schülern gefallen könnte, ist die Durchführung einer Computersimulation von 20.000 Würfen und die Erfassung der relativen Häufigkeit der Zahl 4. Nach 1000 Simulationen hat man 1000 relative Häufigkeiten gefunden und kann diese in einem Histogramm darstellen (siehe Abbildung 1).

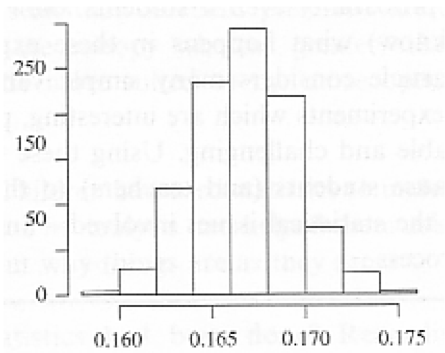

Abb. 1: relative Häufigkeit der Augenzahl 4 bei 20000 Würfen bei 1000 Simulationen

Dies deutet stark daraufhin, dass eine relative Häufigkeit kleiner als 0,1458, wie sie in den Daten von Wolf auftrat, sehr selten ist; möglicherweise war der Würfel unregelmäßig oder Wolf hat 20.000-mal schlecht gewürfelt.

Ein weiterer historischer Datensatz ist der von Weldon (s. Hand u. a. 1994, Datensatz 263). Weldon warf 12 Würfel 26.306-mal. Es werden verschiedene Teilmengen der Ergebnisse angegeben und diskutiert.

Efron’s Würfel

Efron’s Würfel, die von Bradlay Efron erfunden wurden, sind 4 Würfel, deren Netze Abb. 2 zeigt.

Die interessante Eigenschaft der Würfel besteht darin, dass gilt
P(A schlägt B) = 2/3, P(B schlägt C) = 2/3,
P(C schlägt D) = 2/3 und P(D schlägt A) = 2/3. Dies ist absolut überraschend und kann benutzt werden um einige kuriose Ergebnisse zu erzeugen.

Die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Würfel einen anderen schlägt, lassen sich leicht ermitteln (s. etwa Tab. 2). Auf diese Weise können die Schüler selber die Behauptung des Lehrers überprüfen. Ein beeindruckende Weg zur Untersuchung der Wahrscheinlichkeiten ist die Durchführung eines Spiel zwischen dem Lehrer und der Klasse; denn fast ausnahmslos glauben die Schüler zu Anfang nicht, dass Würfel D den Würfel A schlägt, wenn A B schlägt, B C schlägt und C D schlägt. Rouncefield und Green (1989) diskutierten weitere Gruppen von Würfel mit ähnlichen Eigenschaften.

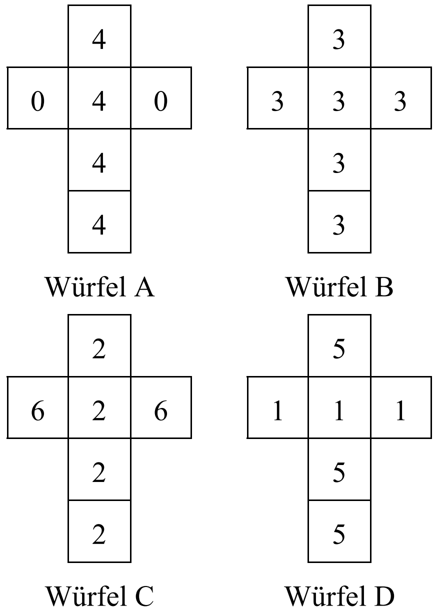

Abb. 2: Efron’s Würfel

		Würfel A					
		0	0	4	4	4	4
Würfel B	3	-	-	+	+	+	+
	3	-	-	+	+	+	+
	3	-	-	+	+	+	+
	3	-	-	+	+	+	+
	3	-	-	+	+	+	+
	3	-	-	+	+	+	+

Tab. 2: Ein Plus bedeutet, dass A Würfel B schlägt. Es muss vorausgesetzt werden, dass die Wahrscheinlichkeiten aller Augenzahlen gleich sind.

Unregelmäßige Würfel

Gelman und Nolan (2002) nutzten ein einfaches Unterrichtsexperiment zur Herstellung von unregelmäßiger Würfeln. Sie gaben kleinen Gruppen von Schülern Holzwürfel und ein Stück Sandpapier und forderten die Schüler auf, den Würfel zu verändern wie sie wollten mit dem Ziel, einen unregelmäßigen Würfel zu erhalten. Die Autoren berichteten, dass ein erheblicher Aufwand von Schleifearbeiten nötig ist bevor eine bemerkbare Differenz entsteht. (Vgl. Gelman und Nolan, 2002 für weitere Details zum Experiment).

Dies ist eine interessante Aktivität für Schüler, da sie die Möglichkeit haben, selbst einen nicht regulären Würfel herzustellen. Viele Schüler scheinen zu glauben, dass sie dies gut tun könnten und sind bei der Lösung dieser Aufgabe sehr kreativ. Eine interessante Diskussion kann sich dann auf die Frage konzentrieren, wie man die Unregelmäßigkeit der Würfel in Anbetracht des Stichprobenfehlers nachweisen kann.

Eine interessante Variante dieses Experimentes ist es, den Schülern fünf Würfel zu geben von denen nur einer nicht regulär ist (wobei dies nicht erkennbar ist) und sie auffordern, diesen herauszufinden.

Würfel der Größe 1 x 1 x r

Für einen anderen Zugang habe ich eine Kollektion von Würfeln der Größer 1 x 1 x r konstruiert, wobei r als Streckungsfaktor des Würfels betrachtet werden kann (vgl. Abb. 3).

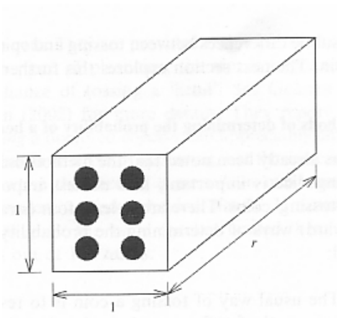

Abb. 3: Ein nichtsymmetrischer Würfel der Größe 1 x 1 x r, wobei sich die 6 auf beiden 1 x 1 Flächen befindet.

Es sollten die Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden, eine 6 zu würfeln (Man beachte, dass eine 6 an zwei Seiten vorhanden ist). Dieses Problem war einfach zu stellen, aber es ist durchaus nicht klar, wie groß die Wahrscheinlichkeiten sind. Es gibt allerdings einige spezielle Fälle, für die die Wahrscheinlichkeiten bekannt sind:

(1) Wenn r gegen Null geht, geht P(6) gegen 1.

(2) Wenn r gegen Unendlich geht, geht P(6) gegen Null.

(3) Wenn r = 1, ist P(6) = 1/3.

In einer meiner Klassen schlug ein Schüler eine formale Lösung vor, die Wahrscheinlichkeit eine 6 zu würfeln könnte dem Verhältnis der Seitenflächen entsprechen. Der Oberflächeninhalt beträgt 2 + 4r, deshalb sei die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu erhalten gleich 2/(2 + 4r) = 1/(1 + 2r). Interessanterweise ist die Form dieses Graphen gewiss nicht korrekt, obgleich er die drei oben genannten Bedingungen erfüllt.

Es ist ebenfalls interessant zu bemerken, dass der Graph von P(6) bezüglich r nicht symmetrisch zu r = 1 ist, da die Wahrscheinlichkeit eine 6 zu erhalten dann 1/3 beträgt, was nicht die Hälfte zwischen den Grenzen 0 und 1 ist.

Mit diesen nichtregulären Würfeln können einfache Experimente mit Schülern zum Schätzen der Wahrscheinlichkeit für eine 6 geplant werden. Es kann eine Vielzahl statistischer Ideen im Zusammenhang mit diesem Experiment diskutiert werden:

– Welche Werte von r sollten benutzt werden und warum?
– Wie oft sollte gewürfelt werden?
– Sollte es eine unterschiedliche Anzahl von Würfen in Abhängigkeit von r geben?
– Welche anderen Faktoren können die Ergebnisse bezüglich der Werte von r beeinflussen?
– Wie sollten die Daten erfasst werden?
– In welchen Schritten sollte das Experiment durchgeführt werden? (Probleme der Versuchsbedingungen)
– Wie sollten die Würfel geworfen werden?

Jede dieser Fragen ist in gewissem Maße offen, was die Studenten entweder lieben oder hassen. Mit den Fragen wird eine erstaunlich breite Anzahl von statistischen Problemen erfasst. Die Antworten zu diesen Fragen variieren innerhalb einer Klasse sehr stark und oft basieren die Antworten eher auf praktischen als auf statistischen Überlegungen (z. B. die betrachteten Werte für r hängen davon ab, welche Würfel ein Schüler gerade hat). Aber es können auch wichtige statistische Konzepte in diesem einfach zu verstehenden und einfach durchzuführenden Experiment diskutiert werden.

Der Zusammenfassung von Daten aus zwei Experimenten mit den Würfeln werden in Tabelle 3 dargestellt. Jeder Würfel wurde insgesamt 760-mal geworfen.

r	P(6)	r	P(6)
0,25	0,98	1,10	0,25
0,5	0,80	1,15	0,24
0,75	0,61	1,25	0,18
0,85	0,52	1,50	0,06
0,90	0,47	1,75	0,03
1,00	0,33	2,00	0,02

Tab. 3: Ergebnisse des Werfens von 1 x 1 x r - Würfel, die für jedes r 760-mal geworfen wurden

Es sei bemerkt, dass die Beziehung zwischen dem Verhältnis r und den Wahrscheinlichkeiten eine 6 zu werfen in einer meiner Klassen mit anspruchsvollen statistischen Techniken untersucht wurde; Details können bei Dunn (2003) gefunden werden.

Festlegung von Wurfbedingungen

Es wurden kurz einige Experimente zum Abschätzen der Wahrscheinlichkeiten beim Würfeln für bestimmte Ergebnisse beschrieben. Man sollte sich doch darüber im Klaren sein, dass zuerst bestimmte Versuchsbedingungen festgelegt werden müssen, um die Gleichheit der Bedingungen während des Experimentes zu gewährleisten. Sowohl Gelman und Nolan (2002) als auch Dunn (2003) diskutieren dies ausführlicher. Zum Beispiel können die Wurftechniken eine große Rolle bei der Bestimmung der Ergebnisse des Experimentes spielen. Gelman und Nolan (2002) demonstrierten dies ihren Schülern bevor diese mit den Experimenten begannen.

Das Werfen von Münzen

Im letzten Abschnitt wurden Varianten der Standardexperimente zum Würfeln betrachtet. Bei Münzwurf kann man ähnliche Varianten verwenden. Zuerst sollen einige historische Daten angegeben werden.

Geschichte

Drei historische Beispiele für den Münzwurf gibt Moore (2003, S. 225) an.

(1) Count Buffon warf eine Münze 4.040-mal und erhielt 2.048-mal Kopf, ein Verhältnis von 0,5069.

(2) Karl Pearson warf eine Münze 24.000-mal und erhielt 12.012-mal Kopf, ein Verhältnis von 0,5005.

(3) John Kerrich warf 10.000-mal eine Münze und erhielt 5.067-mal Kopf, ein Verhältnis von 0,5067.

Alle diese Ergebnisse liegen dicht am erwarteten Verhältnis von 0,5; es ist aber interessant, dass alle diese Verhältnisse größer als 0,5 sind. Mit einer Simulationsstudie analog zum Würfeln können diese Resultate bewertet werden.

Die aktuelle Einführung des Euro in Europa verschafft neue Möglichkeiten zur Untersuchungen von Münzen. Studenten aus Polen drehten eine belgische 1-Euro-Münze 250-mal und erhielten 140-mal Kopf (vgl. Gelman und Nolan, 2002). Dem wurde in der Presse viel Aufmerksamkeit geschenkt, einschließlich der Konsequenzen für sportliche Wettkämpfe, deren Beginn oft mit dem Werfen einer Münze beginnt. In den Kommentaren wurde aber der Unterschied zwischen dem Werfen und dem Drehen von Münzen wenig beachtet. Im nächsten Abschnitt soll dies genauer erklärt werden.

Methoden zum Werfen von Münzen

Es wurde schon angemerkt, dass beim Würfeln die Wurftechnik von Bedeutung ist; dies ist nicht weniger beim Münzwurf. Es gibt mindestens vier direkte Wege zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten beim Münzwurf.

(1) Die übliche Methode zum Werfen einer Münze ist es, die Münze auf den Zeigefinger zu legen und ihr mit dem Daumen eine Drehung zu verpassen. Vorausgesetzt alles klappt, wird sich die Münze sehr oft in der Luft drehen und zufällig landen.

(2) Die Münze kann an eine Tischkante gelegt werden und es wird auf den Tisch geschlagen, so dass sie dann hinunter fällt und Kopf oder Zahl zeigt.

(3) Eine Münze kann ebenfalls gedreht werden. Die Münze wird dabei senkrecht zum Tisch mit einem Zeigefinger gehalten und mit dem Zeigefinger schnell gedreht nach dem schnellen Loslassen der Hand wird beobachtet, auf welche Seite die Münze fällt.

(4) Man kann eine Münze auch auf einer glatten Oberfläche solange rollen lassen bis sie auf eine Seite fällt.

Ein Vergleich dieser vier Methoden kann sehr konstruktiv seien und einige fruchtbare Diskussionen eröffnen. Erfahrungsberichte zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit für Kopf bei diesen Methoden nicht gleich ist. Weitere Ergebnisse findet man bei Humble (2001), der eine mathematische Betrachtung der Physik des Werfens und Drehens von Münzen durchführt.

Das Werfen von Reißzwecken

Das Werfen von Münzen ist üblich, aber es können auch andere Dinge geworfen werden, z. B. Reißzwecken. Dabei können allerdings nicht alle oben beschriebenen Methoden zum Werfen verwendet werden. Man kann ebenfalls die Wahrscheinlichkeit bestimmen, mit der ein Kronkorken mit der offenen Seite oben liegt. Als Jungs haben wir oft unsere Kricketschläger geworfen, um zu sehen, ob die flache oder gewölbte Seite oben liegt. Es nicht überraschend, dass alle diese Wahrscheinlichkeiten nicht gleich sind, sie hängen von den verwendeten Reißzwecken, Kronkorken oder Kricketschläger ab.

Versuche zur Beeinflussung von Münzen

Gelman und Nolan (2002) diskutierten ein Experiment, indem Schüler angeregt wurden zu versuchen, die Wahrscheinlichkeit bei Münzen zu beeinflussen. Die Schüler erhielten Plastikchips und etwas Plastilin; das Ziel war, die Wahrscheinlichkeit von „Kopf" zu maximieren. Gelman und Nolan berichten, dass das Drehen eines manipulierten Chips die Wahrscheinlichkeit von „Kopf" erheblich beeinflussen kann, während dies beim Werfen desselben Chips nicht passiert. In einem Beispiel zeigte der Plastikchip eines Schülers 23-mal bei 100 Drehungen „Kopf" und bei 100 Würfen 53-mal „Kopf".

Schlussbemerkungen

Die üblichen statistischen Experimente mit Würfeln und Münzen sind gut für den Unterricht geeignet, da sie schnell und einfach zu erklären und zu analysieren sind. Aber sie können für die Schüler langweilig werden, da diese wissen (oder mindestens glauben zu wissen) was beim Würfeln oder Münzwurf passiert. Wir haben einige Varianten dieser klassischen Experimente erörtert, die wieder etwas mehr Spaß und Herausforderungen erzeugen können ohne das auf die Einfachheit der Experimente verzichtet werden muss.

Es würde einige einfache Versuche diskutiert, verschiedene andere können analog entwickelt werden. Die Antwort auf viele der aufgeworfenen Fragen ist natürlich nicht einfach. Aber das Finden von Antworten ist nicht so wichtig wie die Diskussionen und das Verständnis, die von Fragen ausgelöst werden können.

Literaturangaben

Dunn, P.K. (2003). What happens when a 1 x 1 x r die is rolled? The American Statistician, 57,258-264.

Gelman, A. and Nolan, D. (2002). You can load a die, but you can't bias a coin. The American Statistician, 56, 308-11.

Green, D.R. (1983). Shaking a six. Mathematics in School, 12, 29-32.

Hand, D.J., Daly, E, Lunn A.D., McConway, K.J. and Ostrowski, E. (1994). A Handbook of Small Data Sets. London: Chapman and Hall.

Hawkins, A.S. and Kapadia, R. (1984). Children's conceptions of probability: a psychological and pedagogical review. Education Studies in Mathematics, 15, 349-77.

Humble, S. (2001). Rolling and spinning coin: a level gyroscopic processional motion. Teaching Mathematics and its Applications, 20, 18-24.

Kerslake, D. (1974). Some children's views on probability. Mathematics in School, 5, 22.

Moore, D.S. (2003). The Basic Practice of Statistics (3rd edn). New York: WH Freeman.

Rouncefield, M. and Green, D. (1989). Condorcet's Paradox. Teaching Statistics, 11, 46-9.

Truran, J. (1984). Children's understanding of symmetry. Teaching Statistics, 7, 69-74.

Als Ergänzung zwei deutsche Literaturangaben:

Büchter, Andreas: Ein Spiel mit merkwürdigen Würfeln. In: PM, Praxis der Mathematik 47(2005)4, S.45

Behrends, Ehrhard: Über das Fälschen von Würfeln. In: Elemente der Mathematik 54(1999)1, S. 15-29