JUAN CARAMUELs sichere Wette beim Lotto in Cosmopolis

FRIEDRICH BARTH UND RUDOLF HALLER, MÜNCHEN

Zusammenfassung: *Üblicherweise werden beim Lotto nur die Wahrscheinlichkeiten untersucht, mit denen bestimmte Trefferzahlen oder -kombinationen auftreten. CARAMUEL behandelte eine andere Frage, die sich sicher schon so mancher Lottospieler gestellt hat: Wie viele Tippreihen muss ich ausfüllen, um sicher* k *Treffer zu erzielen, und wie muss ich sie ausfüllen? Diese von CARAMUEL aufgeworfenen Fragen sind noch heute Gegenstand wissenschaftlicher Forschung. Im Folgenden wird CARAMUELS Versuch vorgestellt, diese Fragen zu lösen, die um einige naheliegende Probleme ergänzt werden. Schließlich soll CARAMUELS Vorgehen einer kritischen Würdigung unterzogen werden.*

Kupferstich (1654)
von SEBASTIAN FURCK (um 1600–1655)

1 Biografisches

JUAN CARAMUEL Y LOBKOWITZ wurde in Madrid als Sohn des LORENZO DE CARAMUEL und dessen Ehefrau CATALINA DE FRISIA geboren und dort am 4.6.1606 getauft. In einem Brief an GASSENDI schreibt CARAMUEL, er stamme von einer böhmischen Mutter – daher der zweite Name – und einem luxemburgischen Vater ab (Bellazzi 1982, S. 16), wohingegen der *Dictionnaire des Auteurs Cisterciens* von einem *père originaire de Bohème* und einer *mère qu'on croit frisonne* spricht (Ineichen 1998, S. 45). Vermutlich 1627 wird er Zisterziensermönch, von 1635 bis 1644 lebte er in den Niederlanden, bis 1646 in Deutschland, bis 1655 in Österreich und Böhmen, dann in Italien. Dem höfischen Leben stand er ablehnend gegenüber, wie aus NEMO SACER IN AULA – Keiner im Palast hat saubere Hände – , einem Anagramm seines Namens IOANNIS CARAMUEL, hervorgeht (Bellazzi 1982, S. 16). 1657 wurde er Bischof von Campagna-Sartiano (Königreich Neapel) und 1673 Bischof von Vigẹvano (Lombardei), wo er am 7.9.1682 starb. Er beherrschte 24 Sprachen, darunter auch mehrere asiatische wie das Chinesische, aber auch das in Mexiko verbreitete Nahuatl. Dem Ideal des Polyhistors nacheifernd, verfasste er mehr als 70 Bände im Folioformat über nahezu alle Fachgebiete. Unter ihnen finden sich zwei gewichtige mathematische Werke, die *Mathesis audax* (1644) und die zweibändige *Mathesis biceps vetus et nova* – »Mathematik zweigeteilt, alt und neu« – (1670), eine Enzyklopädie des mathematischen Wissens seiner Zeit (Caramuel 1670).

2 CARAMUELs sichere Wette

2.1 Aufgabenstellung und Lösung der ersten Frage

Im Kapitel *Combinatoria der Mathesis nova* beschäftigt sich der Abschnitt *Kybeia* mit der Mathematik des Würfelspiels, der Abschnitt *Arithmomantica* mit Problemen im Zusammenhang mit dem Genueser Zahlenlotto, das CARAMUEL »bildungshalber« statt in Genua in der fiktiven Stadt Cosmopolis ansiedelt. Als Abschluss seiner Lottobetrachtungen stellt er die beiden folgenden Fragen und beantwortet sie.

> *Aus 100 Kandidaten sind fünf Konsuln zu wählen. Jeder Lottospieler schreibt auf einen Zettel fünf der 100 Namen, von denen er meint, dass sie gewählt werden. Wie viele Zettel muss ein Spieler ausfüllen, damit er <u>sicher</u> 1) mindestens einen, 2) mindestens zwei der Gewählten richtig angegeben hat?*

Die erste Frage nach der Anzahl der nötigen Zettel für mindestens einen Richtigen ist leicht zu beantworten. Man teilt die 100 Namen in Portionen zu je fünf auf, die jeweils auf einen Zettel geschrieben werden. Diese zwanzig Zettel enthalten alle 100 Namen; mindestens ein Zettel enthält mindestens einen Treffer.

2.2 Lösung der zweiten Frage für *n* Kandidaten, wobei $n = 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$

Wesentlich schwieriger ist die Lösung der zweiten Frage. CARAMUEL geht sie mit einem genialen Einfall schrittweise an. Er beginnt mit einem Lotto mit nur fünf Kandidaten. Dann reicht offenbar ein Zettel mit diesen fünf Namen, um mindestens zwei Richtige zu haben. Für jedes neue Lotto vergrößert er die Anzahl der Kandidaten um vier und bestimmt die Anzahl der nun nötigen Zettel. Seine richtigen Werte gibt er in einer sechsspaltigen Tabelle an, deren Konstruktion er nicht mitteilt. ROBERT INEICHEN (1998, S. 34ff.) gibt eine plausible Deutung, wie die Tabelle erzeugt worden sein könnte.

Wir entwickeln nun induktiv, ausgehend von CARAMUELS Idee, angeregt durch INEICHEN, eine Formel für die gesuchte Anzahl z_n der Zettel, wenn fünf Konsuln aus n Kandidaten auszuwählen sind.

Induktionsanfang: $z_5 = 1$.

Induktionsschritt: Für die n Kandidaten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ braucht man z_n Zettel. Für die $n + 4$ Kandidaten $A_1, A_2, \ldots, A_n, N_1, \ldots, N_4$ erzeugt man die nötigen z_{n+4} Zettel folgendermaßen. Zunächst nimmt man die schon vorhandenen z_n Zettel und deckt damit alle Fälle der Form A_iA_j $(i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j)$, ab. Dann füllt man n neue Zettel so aus: An der ersten Stelle steht A_i $(i = 1, \ldots, n)$, gefolgt von $N_1, \ldots, N_4$. Damit deckt man alle Fälle der Form A_iN_k $(i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, 4)$ und N_kN_l $(k, l = 1, \ldots, 4;\ k \neq l)$ ab. Also gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{z_{n+4} = z_n + n}$$

Das liefert der Reihe nach die Werte

$z_5 = 1$; $\quad z_9 = z_{5+4} = z_5 + 5 = 1 + 5 = 6$;

$z_{13} = z_{9+4} = z_9 + 9 = 1 + 5 + 9 = 15$;

$z_{17} = z_{13+4} = z_{13} + 13 = 1 + 5 + 9 + 13 = 28$;

……

$$z_n = z_{1+4k} = z_{1+4(k-1)} + [1 + 4(k-1)] =$$
$$= 1 + 5 + 9 + \ldots + [1 + 4(k-2)] + [1 + 4(k-1)],$$
$k \in \mathbb{N}$.

Man erkennt: z_{1+4k} ist der Wert der endlichen arithmetischen Reihe mit der Differenz 4, dem Anfangsglied 1 und dem Endglied $[1 + 4(k - 1)]$. Damit erhält man

$$z_{1+4k} = \frac{1}{2}(1 + [1 + 4(k-1)]) \cdot k = (2k-1) \cdot k.$$

Für $n = 4k + 1$ Kandidaten ist $k = \frac{n-1}{4}$, also $z_n = \frac{1}{8}(n-1)(n-3)$.

Damit ist die Aufgabe gelöst für alle Lotti, bei denen $n = 4k + 1$ Kandidaten zur Auswahl stehen $(k \in \mathbb{N})$. Für $n = 5$ bis $n = 105$ und $n = 4k + 1$ findet man die Werte von z_n in der sechsten Spalte von CARAMUELS Tabelle.

2.3 Lösung der zweiten Frage für *n* Kandidaten, wobei $n \neq 4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, ist.

Auch hier gibt CARAMUEL für z_n wieder eine undurchsichtige Interpolationstabelle mit richtigen Werten an, die er, ausgehend vom nächstniedrigeren Wert z_{1+4k} aus der sechsten Spalte seiner Tabelle berechnet. Für z_{100} ist der nächstniedrigere Wert $z_{97} = 1128$. INEICHEN zufolge geht CARAMUEL wie folgt vor: Die 97 A_i $(i = 1, \ldots 97)$ werden in 24 Viererpakete $A_1, \ldots, A_4$; $A_5, \ldots, A_9$; …; $A_{93}, \ldots, A_{96}$ eingeteilt. Übrig bleibt A_{97}. Nun schreibt man jedes Viererpaket mit einem der drei neuen Namen N_1, N_2, N_3 auf einen Zettel. Dafür braucht man 72 Zettel. Auf einen weiteren Zettel schreibt man A_{97}, N_1, N_2 und N_3 sowie einen beliebigen Namen A_i, $i \neq 97$. Damit sind alle Treffer A_iA_j $(i, j = 1, \ldots, 96,\ i \neq j)$, A_iN_k $(i = 1, \ldots, 96,\ k = 1, \ldots, 3)$, $A_{97}N_k$ $(k = 1, \ldots, 3)$ und N_kN_l $(k, l = 1, \ldots, 3,\ k \neq l)$ abgedeckt. Man benötigt CARAMUEL zufolge also bei 100 Kandidaten 1128 + 72 + 1 = 1201 Zettel.

CARAMUEL folgend entwickeln wir, ebenfalls ausgehend von den bekannten Werten z_{1+4k}, allgemeine Ausdrücke für z_{4k}, z_{2+4k} und z_{3+4k}.

<u>$n = 2 + 4k$</u>. Man beginnt mit z_6, d. h., zu den fünf Namen $A_1, \ldots, A_5$ kommt der Name N_1 hinzu. Man beschriftet die Zettel nun folgendermaßen:

1. Zettel: $A_1, \ldots, A_5$. Deckt alle Treffer A_iA_j $(i, j = 1, \ldots, 5,\ i \neq j)$ ab.
2. Zettel: $A_1, \ldots, A_4, N_1$. Deckt alle Treffer A_iN_1 $(i = 1, \ldots, 4)$ ab.
3. Zettel: A_5, N_1, X_1, X_2, X_3 mit $X_k \in \{A_1, \ldots, A_4\}$. Deckt den Treffer A_5N_1 ab.

Also ist $z_6 = 3$. Mithilfe der allgemein gültigen Beziehung $z_{n+4} = z_n + n$ berechnen wir nun

$z_6 = 3 = 1 + 2$; $\ z_{10} = z_6 + 6 = 3 + 6 = 1 + (2 + 6)$;

$z_{14} = z_{10} + 10 = 3 + 6 + 10 = 1 + (2 + 6 + 10)$;

$z_{18} = z_{14} + 14 = 3 + 6 + 10 + 14 =$
$= 1 + (2 + 6 + 10 + 14)$;

……

$$z_{2+4k} = 1 + \{2 + 6 + 10 + 14 + \ldots + [2 + 4(k-1)]\} =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}k\{2 + [2 + 4(k-1)]\} =$$
$$= 2k^2 + 1,\ k \in \mathbb{N}.$$

<u>$n = 3 + 4k$</u>. Man beginnt mit z_7, d. h., zu den fünf Na-

men $A_1, \ldots, A_5$ kommen die Namen N_1 und N_2 hinzu. Man beschriftet die Zettel nun folgendermaßen:
1. Zettel: $A_1, \ldots, A_5$. Deckt alle Treffer A_iA_j ($i, j = 1, \ldots, 5, i \neq j$) ab.
2. Zettel: $A_1, \ldots, A_4, N_1$. Deckt alle Treffer A_iN_1 ($i = 1, \ldots, 4$) ab.
3. Zettel: $A_1, \ldots, A_4, N_2$. Deckt alle Treffer A_iN_2 ($i = 1, \ldots, 4$) ab.
4. Zettel: A_5, N_1, N_2, X_1, X_2 mit $X_k \in \{A_1, \ldots, A_4\}$. Deckt den Treffer N_1N_2 und alle Treffer A_5N_k ($k = 1, 2$) ab.
Also ist $z_7 = 4$. Mithilfe der allgemeingültigen Beziehung $z_{n+4} = z_n + n$ berechnen wir nun

$$z_7 = 4 = 1 + 3;\ z_{11} = z_7 + 7 = 4 + 7 = 1 + (3 + 7);$$

$$z_{15} = z_{11} + 11 = 4 + 7 + 11 = 1 + (3 + 7 + 11);$$

$$z_{19} = z_{15} + 15 = 4 + 7 + 11 + 15 = $$
$$= 1 + (3 + 7 + 11 + 15);$$

……

$$z_{3+4k} = 1 + \{3 + 7 + 11 + 15 + \ldots + [3 + 4(k-1)]\} =$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}k\{3 + [3 + 4(k-1)]\} =$$
$$= 2k^2 + k + 1,\ k \in \mathbb{N}.$$

$\underline{n = 4k}$. Man beginnt mit z_8, d. h., zu den fünf Namen $A_1, \ldots, A_5$ kommen die Namen N_1, N_2 und N_3 hinzu. Man beschriftet die Zettel nun folgendermaßen:
1. Zettel: $A_1, \ldots, A_5$. Deckt alle Treffer A_iA_j ($i, j = 1, \ldots, 5, i \neq j$) ab.
2. Zettel: $A_1, \ldots, A_4, N_1$. Deckt alle Treffer A_iN_1 ($i = 1, \ldots, 4$) ab.
3. Zettel: $A_1, \ldots, A_4, N_2$. Deckt alle Treffer A_iN_2 ($i = 1, \ldots, 4$) ab.
4. Zettel: $A_1, \ldots, A_4, N_3$. Deckt alle Treffer A_iN_3 ($i = 1, \ldots, 4$) ab.
5. Zettel: A_5, N_1, N_2, N_3, X_1 mit $X_1 \in \{A_1, \ldots, A_4\}$. Deckt die Treffer N_kN_l ($k, l = 1, \ldots, 3, k \neq l$) und alle Treffer A_5N_k ($k = 1, 2, 3$) ab.
Also ist $z_8 = 5$. Mithilfe der allgemeingültigen Beziehung $z_{n+4} = z_n + n$ berechnen wir nun

$$z_8 = 5 = 1 + 4;\ z_{12} = z_8 + 8 = 5 + 8 = 1 + (4 + 8);$$

$$z_{16} = z_{12} + 12 = 5 + 8 + 12 = 1 + (4 + 8 + 12);$$

$$z_{20} = z_{16} + 16 = 5 + 8 + 12 + 16 =$$
$$= 1 + (4 + 8 + 12 + 16);$$

……

$$z_{4k} = 1 + \{4 + 8 + 12 + 16 + \ldots + [4 + 4(k-2)]\} =$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}(k-1)\{4 + [4 + 4(k-2)]\} =$$
$$= 1 + 2k(k-1) = 2k^2 - 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Drücken wir k durch n aus, dann ergibt sich nach einer einfachen Rechnung:

$n =$	$z_n =$
$4k + 1$	$\frac{1}{8}(n-1)(n-3)$
$4k + 2$	$\frac{1}{8}(n^2 - 4n + 12)$
$4k + 3$	$\frac{1}{8}(n^2 - 4n + 11)$
$4k$	$\frac{1}{8}(n^2 - 4n + 8)$

Damit können wir die zweite Frage beantworten und finden wie CARAMUEL:

$$z_{100} = z_{4 \cdot 25} = \frac{1}{8}(100^2 - 4 \cdot 100 + 8) = 1201.$$

Nach CARAMUELs Verfahren müssen 1201 Zettel nach dem angegebenen Schema ausgefüllt werden, um sicher mindestens zwei Richtige zu erzielen.

2.4 Resümee und Kritik

1) Mit seinem Vorgehen hat CARAMUEL einen Weg aufgezeigt, wie man in Cosmopolis beim Lotto $\binom{100}{5}$ sicher zu zwei Treffern kommt. Dabei gibt er genau an, wie man diese Zettel ausfüllen kann. Offenbar war er aber auch der Überzeugung, dass die von ihm errechnete Anzahl z_n von Zetteln auch ausgefüllt werden muss, d. h., dass z_n die Minimalzahl $N(n, w, r)$ der auszufüllenden Zettel ist, wenn aus n Kandidaten w Konsuln auszuwählen und mindestens r der w Gewählten richtig angegeben werden sollen. Tatsächlich kann man aber viele Fälle finden, bei denen die von CARAMUEL angegebene Zahl z_n lediglich eine obere Schranke für die Anzahl der wirklich nötigen Zettel ist. So ergab sich in **2.2** für z_9 der Wert 6, wohingegen $N(9, 5, 2) = 2$ ist. Es reichen für die Kandidaten 1, 2, …, 9 nämlich die Zettel (1, 2, 3, 4, 5) und (6, 7, 8, 9, x) mit $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. – Im Allgemeinen gilt: Die von CARAMUEL mithilfe seines Induktionsverfahrens ermittelte obere Schranke ist viel zu hoch.
Eine nahezu triviale obere Schranke lässt sich leicht angeben: Man bildet alle $\binom{n}{r}$ möglichen r-Teilmengen der n-Menge der Kandidaten und schreibt jede auf einen Zettel, den man mit beliebigen $w - r$ Kandidaten ergänzt. Dann finden sich auf mindestens einem Zettel mindestes r Richtige. Für mindestens zwei Richtige beim Lotto in Cosmopolis wäre also $\binom{100}{2} = 4950$ eine obere Schranke. CARAMUELs Wert $z_{100} = 1201$ ist wesentlich besser, aber immer noch sehr schlecht.

Über die von CARAMUEL aufgeworfenen Fragen wird heute weltweit immer noch geforscht. Dabei finden auch Methoden der Graphentheorie und der endlichen Geometrie Verwendung. Bei der Suche nach optimalen Lottodesigns konnten zwar einige Fragen gelöst werden, aber viele harren noch ihrer Lösung. So weiß man z. B. heute nur, dass man beim Lotto »6 aus 49« für den sicheren Dreier mit weniger als 87 Tippreihen nicht auskommt, dass aber 163 Tippreihen auf alle Fälle ausreichen. Die genaue Zahl $N(49, 6, 3)$ der wirklich nötigen Tippreihen ist also auch in diesem vermeintlich einfachen Fall nicht bekannt (Van Rees).

2) Nach dem von DIRICHLET vermutlich 1834 erstmals verwendeten Schubfachprinzip lässt sich in Sonderfällen $N(n, w, 2)$ leicht ermitteln.[1] Man zerlegt die Menge der n Kandidaten in disjunkte Teilmengen der Mächtigkeit w. Man braucht dazu $\frac{n}{w}$ Teilmengen, wenn w Teiler von n ist. Andernfalls benötigt man $\left[\frac{n}{w}\right] + 1$ Teilmengen, wobei die letzte Teilmenge beliebig aufgefüllt wird; damit ist sie aber nicht mehr disjunkt mit allen vorhergehenden Mengen. Es gilt:

Ist w ein Teiler von n und $\frac{n}{w} < w$, dann benötigt man w Zettel.

Ist w kein Teiler von n und $\left[\frac{n}{w}\right] + 1 < w$, dann benötigt man $\left[\frac{n}{w}\right] + 1$ Zettel.

Beispiele:

$N(6, 3, 2) = 2$, da 3 Teiler von 6 und $\frac{6}{3} = 2 < 3$. Es genügen die Zettel (1, 2, 3) und (4, 5, 6).

$N(7, 4, 2) = 2$, da 4 kein Teiler von 7 und $\left[\frac{7}{4}\right] + 1 = 2 < 4$. Es genügen die Zettel (1, 2, 3, 4) und (5, 6, 7, x) mit $x \in \{1, 2, 3, 4\}$.

3 Andere Trefferzahlen

3.1 Sicher mindestens drei oder sicher mindestens vier Richtige beim Lotto in Cosmopolis

Mit CARAMUELs Idee können wir auch die Frage der »nötigen« Zettel für mindestens drei Richtige beantworten. Wir beginnen wieder mit einem Lotto von fünf Kandidaten, für die offenbar ein Zettel mit diesen fünf Namen reicht, um mindestens drei Richtige zu haben. Für jedes neue Lotto vergrößern wir die Anzahl der Kandidaten um drei und bestimmen die Anzahl der »nötigen« Zettel.

Für die n Kandidaten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ braucht man z_n Zettel. Für die $n + 3$ Kandidaten $A_1, A_2, \ldots, A_n, N_1, N_2, N_3$ erzeugt man die nötigen z_{n+3} Zettel folgendermaßen. Zunächst nimmt man die schon vorhandenen z_n Zettel und deckt damit alle Fälle der Form $A_iA_jA_k$ ($i, j, k = 1, \ldots, n$; $i < j < k$) ab. Es gibt $\binom{n}{2}$ verschiedene 2-Mengen aus der n-Menge der A_i. Dann füllt man $\binom{n}{2}$ neue Zettel so aus: An den ersten beiden Stellen stehen zwei der A_i ($i = 1, \ldots, n$), gefolgt von N_1, N_2 und N_3. Damit deckt man alle Fälle der Form $A_iA_jN_k$ ($i, j = 1, \ldots, n$; $i < j$, und $k = 1, 2, 3$), der Form $A_iN_kN_l$ ($i = 1, \ldots, n$; $k, l = 1, 2, 3$; $k < l$) und der Form $N_1N_2N_3$ ab. Also gilt

$$z_{n+3} = z_n + \binom{n}{2},\ n \in \mathbb{N}.$$

Damit hat man die entscheidende Rekursionsformel, mittels derer man die gesuchten Werte wie oben unter **2.2** und **2.3** berechnen kann.

Für mindestens vier Richtige beginnt man wieder mit $z_5 = 1$ und vergrößert die Anzahl der Kandidaten um zwei. Analog wie oben erhält man dann $z_{n+2} = z_n + \binom{n}{3}$, $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Genau fünf Richtige beim Lotto in Cosmopolis

Für diesen Fall gibt CARAMUEL die Minimalzahl $N(100, 5, 5)$ der nötigen Zettel richtig an, nämlich $\binom{100}{5} = 75\,287\,520$. Er liefert aber kein Verfahren, wie man diese Zettel ausfüllen muss. Ein Verfahren, das sich auch leicht programmieren lässt, verwendet ineinander geschachtelte Zählschleifen.

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_{99}, A_{100}$ die zur Wahl stehenden Kandidaten. Auf den Zetteln werden sie nach steigendem Index angeordnet, nämlich als $A_iA_jA_kA_lA_m$ mit $i < j < k < l < m$. Dann bilden wir die Schleifen mit der Schrittweite 1:

i läuft von 1 bis 96; j läuft von $i + 1$ bis 97;
k läuft von $j + 1$ bis 98; l läuft von $k + 1$ bis 99;
m läuft von $l + 1$ bis 100.

Ein einfaches Beispiel möge diesen Algorithmus veranschaulichen. Aus sechs Kandidaten $A_1, \ldots, A_6$ werden drei ausgewählt. Um genau drei Richtige zu haben, müssen $N(6, 3, 3) = \binom{6}{3} = 20$ Zettel ausgefüllt werden. Dies geschehe folgendermaßen:

i läuft von 1 bis 4; j läuft von $i + 1$ bis 5;
k läuft von $j + 1$ bis 6; Schrittweite jeweils 1.

1				**2**			**3**		**4**
2	*3*	*4*	*5*	*3*	*4*	*5*	*4*	*5*	*5*
3 4 5 6	4 5 6	5 6	6	4 5 6	5 6	6	5 6	6	6

1 *Schubfachprinzip*: Legt man w Objekte in weniger als w Schubfächer, dann liegen in mindestens einem Schubfach mindestens zwei der Objekte.

4 Aufgaben

1) Überträgt man Caramuels Fragestellung nach »sicher mindestens zwei Richtigen« und sein Lösungsverfahren auf das Lotto »6 aus 49« und nennt man eine Tippreihe Zettel, dann erhält man für die Anzahl z_n der jeweils »nötigen« Zettel für das Lotto »6 aus n« die folgende Tabelle für »sicher mindestens zwei Richtige«:

$n =$	Startwert	$z_n =$
$5k + 1$	$z_6 = 1$	$\frac{1}{10}(n-1)(n-4)$
$5k + 2$	$z_7 = 3$	$\frac{1}{10}(n^2 - 5n + 16)$
$5k + 3$	$z_8 = 4$	$\frac{1}{10}(n^2 - 5n + 16)$
$5k + 4$	$z_9 = 5$	$\frac{1}{10}(n^2 - 5n + 14)$
$5k$	$z_{10} = 6$	$\frac{1}{10}(n^2 - 5n + 10)$

Da $49 = 5 \cdot 9 + 4$ ist, muss man nach Caramuel beim Lotto »6 aus 49« genau $z_{49} = \frac{1}{10}(49^2 - 5 \cdot 49 + 14) = 217$-mal sechs Zahlen ankreuzen, um sicher mindestens zwei Richtige zu haben. Tatsächlich ist $N(49, 6, 2) = 19$ (Bate 1998).

2) In der DDR gab es ab 1954 mehrere Lottosysteme, nämlich neben dem Sportfesttoto »6 aus 49« auch bis 1985 das Zahlenlotto »5 aus 90«, also das historische *Lotto di Genova*, ferner das Lotto-Toto »5 aus 45« und ab 1972 das Tele-Lotto »5 aus 35«. Mit einer letzten Ziehung am 30.9.1992 endeten diese Systeme. Man berechne für sie die Anzahl der für mindestens zwei Richtige nach Caramuel »nötigen« Tippreihen.[2]

3) In der alten Bundesrepublik Deutschland gab es am Mittwoch ein Lotto »7 aus 38«, dessen erste Ziehung am 28.4.1982 stattfand. Wegen nachlassenden Interesses wurde es mit der letzten Ziehung am 28.5.1986 eingestellt. Man bestimme die Anzahl der für mindestens zwei Richtige nach Caramuel »nötigen« Tippreihen und bestimme die wirklich nötige Anzahl unter Verwendung des Dirichlet'schen Schubfachprinzips.

2 Beim *Lotto di Genova* würde man nach Caramuel 969 Zettel benötigen. Tatsächlich braucht man aber nur $N(90, 5, 2) = 100$ Zettel auszufüllen (Füredi 1996).

Verwendete Literatur

Bellazzi, Pietro (1982): Juan Caramuel. Editrice Opera Diocesana Buona Stampa, Vigevano 1982

Caramuel y Lobkowitz, Juan (1670): Mathesis biceps vetus, et nova. Officina Episcopali, Campania 1670

Ineichen, Robert (1998): Über die KYBEIA und die ARITHMOMANTICA von Juan Caramuel y Lobkowitz. In: Bulletin de la Société fribourgeoise des sciences naturelles **87** (1998) p. 5–55

Weiterführende Literatur

Bate, J. A.; van Rees, G. J. H. (1998): Lotto designs. In: Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing **28**, 15–39.

Füredi, Zoltán; Székely, Gábor J.; Zubor, Zoltán (1996): On the lottery problem. In: Journal of Combinatorial Design **4**, 5–10.

Jans, Raf; Degraeve, Zeger (2008): A note on a symmetrical set covering problem: the lottery problem. In: European Journal of Operational Research **186**, 104–110

Li, P. C.; van Rees, G. J. H. (2002): Lotto Designs Tables. In: Journal of Combinatorial Design **10**, 335–359

Van Rees, G. J. H.: Lotto designs (Vortrag, s. http://www.cs.umanitoba.ca/~vanrees/jvr.html#links)

Dank

Die Autoren danken den beiden Gutachtern für wertvolle Hinweise und Anregungen.

Anschriften der Verfasser

Friedrich Barth
Abbachstraße 23
80333 München
e.f.barth@t-online.de

Rudolf Haller
Nederlinger Straße 32 a
80638 München
rudolf.haller@arcor.de