„Forschung und Entwicklung zum Lehren und Lernen von Wahrscheinlichkeit“ – ICME 11 – ein Bericht über die Arbeitsgruppe

Manfred Borovcnik, Klagenfurt

Die Serie der ICME zählt zu den größten Kongressen zur Didaktik der Mathematik weltweit. Die 11. Veranstaltung dieser Art fand vom 6.–13. Juli 2008 in Monterrey in Mexiko statt. Hier wird über die Arbeitsgruppe zur didaktischen Forschung zur Wahrscheinlichkeit berichtet. Der Berichterstatter gliedert die Vorträge nach Themen, die auch im Aufruf, Beiträge einzusenden, explizit enthalten waren.

Perspektive des Individuums

Zu diesem Themenkomplex „Individuelles Verstehen und Missverstehen fundamentaler Begriffe – Vorstellungen von Wahrscheinlichkeit bei Kindern und Erwachsenen“ können eine Reihe von Beiträgen zugeordnet werden. In der empirischen Forschung hat sich ein Wechsel vollzogen und zwar von Fehlvorstellungen, die durch geeignete Unterweisung geändert und durch richtige ersetzt werden müssen, hin zu Vorbegriffen, die aufgegriffen und verfeinert werden sollen.
Das kann man u. a. an der Studie von K. Rolka (mit S. Prediger) erkennen, die sich mit der Diskussion einer Gruppe 10- bis 12-Jähriger in einer Spielsituation eingehend auseinandersetzen. Spielfiguren werden dabei durch das Ergebnis eines Würfels auf einem Feld vorangerückt. Der 20-flächige Würfel hat mehr rote als andere Flächen und bevorzugt daher die rote Figur. Interessant sind die Auseinandersetzungen der Kinder untereinander, die letztlich gemeinsam erkennen, was eine gute Strategie ausmacht. Dabei setzen sich gleichermaßen die Ansichten „weil der Würfel mehr rote Flächen hat“ und „weil die rote Figur öfters gewinnt“ gegen andere Begründungen durch. Weil aber auch andere Figuren gewinnen und entsprechend von einigen Kinder „forciert“ werden, gibt es ein stärkeres gemeinsames Bewusstsein um so etwas wie ein Risiko der einmal gewählten Strategie: Auch die rote Figur verliert eben manches Mal. Das bleibt – stärker als durch gewöhnliches Beobachten des Spiels – durch die persönliche Auseinandersetzung der Kinder untereinander haften.
Ist bei Rolka die soziale Situation mitentscheidend für die Untersuchung (und auch für den späteren Begriffserwerb), spielt die individuelle Auseinandersetzung des Forschers mit dem Kind bei D. Abrahamson eine stärkere Rolle; unterstützt wird der Verlauf durch Urnenexperimente, die im Weiteren vom Computer übernommen und auch ausgewertet werden. Die Schwierigkeit – sowohl im Interview zur Erschließung der intuitiven Vorstellungen einer Person als auch im Unterricht zur Verfeinerung derselben – liegt in in der Interaktion *und* im Angebot verschiedener Medien, welche die Begriffe auf unterschiedlichen Ebenen repräsentieren. Im Einzelinterview beobachtet er dann die Reaktionen von Probanden. Seine Überlegungen treffen den Kern von Unterricht, nämlich die Weitergabe von Begriffen in den persönlichen „Besitz“ des Lernenden: Wie kann man die Aktivität eines Lernenden durch Verkörperungen des Begriffes auf verschiedenen Ebenen beschleunigen, ohne den Lernenden zu stark fremdzubestimmen, was sich nicht nur auf die Motivation nachteilig auswirken könnte.

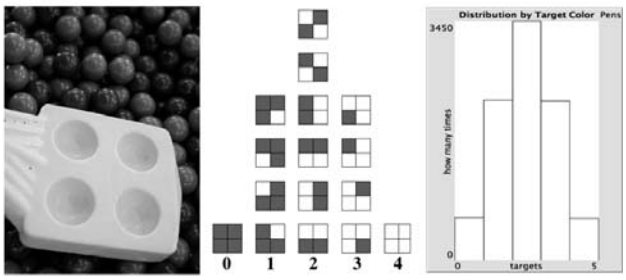


Abb. 1: Viererblöcke als verbindendes Element bei D. Abrahamson: „Löffel“ zum „Schöpfen“ von zufälligen Stichproben – Kombinationsturm aller Möglichkeiten – Stabdiagramm vieler Stichproben

Mit heuristischen Strategien – im Gefolge von Kahneman und Tversky – befassen sich die empirischen Studien von F. Chiesi und C. Primi sowie von L. Zapata. Bei Chiesi und Primi geht es vornehmlich um die intuitiven Strategien der „negative“ bzw. „positive recency“.
Aus einem Sack mit blauen und grünen Murmeln wird der Reihe nach gezogen und wieder zurückgelegt. Als Ergebnis präsentiert man alle Murmeln in einer Farbe (vier Blaue etwa). Die Anzahl der Murmeln beider Farben ist dabei bekannt; die Zahl wurde im Experiment variiert, von gleicher Anzahl bis jeweils eine Farbe stark bevorzugt.

Nach der „negative recency“ setzen Probanden auf den Wechsel der Farbe: bei 4 Blauen sagen sie für die fünfte Ziehung eine Grüne voraus. Bei der positiven Variante setzen sie auf die gezogene Farbe. Wie stark sind diese Strategien vorhanden und zwar unabhängig von der tatsächlichen Zusammensetzung der Farben im Sack? Verglichen wurde das Verhalten von 9-, 11- und 25-jährigen Probanden. Als interessant und weiter aufklärungsbedürftig kann angesehen werden, dass nach dieser Studie die Verwendung der normativen Lösung zuerst zunimmt (von 9 auf 11), bei den Erwachsenen jedoch wieder schlechter vertreten ist. Im Gegenzug geht die Beliebtheit, auf den „Bruch der gesehenen Serie“ zu setzen, erst zurück (von 9 auf 11) und wird dann (bei den 25-Jährigen) wieder stärker. Beim „Fortsetzen der Serie“ gibt es einen Rückgang von 9 auf 11, der dann bei Erwachsenen auf demselben Niveau bleibt. Klar, die Ergebnisse stellen keinen Längsschnitt derselben Personen dar. Dennoch kann man die Frage stellen, warum die richtige Lösung bei den 11-Jährigen am häufigsten gewählt wird und dann bei den Erwachsenen wesentlich geringer vertreten ist. Schon die einfachsten Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung fordern „Widerspruch“ heraus.

Bei L. Zapata waren weitere, altbekannte Aufgaben aus dem Kahneman-Tversky-Kreis Ausgangspunkt der Untersuchungen: Die Konjunktion von 2 Aussagen wird häufig als wahrscheinlicher eingestuft als die einzelnen Aussagen – dies u. a., weil die Verbindung der beiden Aussagen viel authentischer wirkt und von daher als plausibler und damit wahrscheinlicher angesehen wird. Oder die üblichen Auffassungen von „Gesetzen“ großer sowie kleiner Zahlen, wonach Probanden den Einfluss der Stichprobengröße nicht wirklich gut abschätzen können. Neu bei Zapata sind Einzelinterviews von *Lehrern*. Ihr Ziel war es, abzuklären, was man von Lehrern mit Erfahrung abschauen kann; inwieweit sind diese besser in der Lage, solche Schwierigkeiten bei den Lernenden zu antizipieren, und durch geeignete Hilfsmittel und Repräsentationen aufzufangen.

Eine bis dato nicht dokumentierte Neigung zur Umdeutung der Aufgabenstellung findet man bei K. Lyso: Probanden formulieren zweistufige Experimente als einstufige um und finden in ihrer Rekonstruktion natürlich eine falsche Antwort – sie sehen aber nur schwer ein, dass ihre Bearbeitung nicht zum Ziel führt:

Anna hat drei rote, zwei grüne und einen blauen Stift in ihrem Federpennal. Sie bittet Maria, zwei Stifte herauszunehmen. Anna denkt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass beide Stifte rot sind, 1/5 beträgt, während Maria denkt, dass diese Wahrscheinlichkeit 1/3 ist. Hat eine der beiden die richtige Antwort?

„Ich stimme mit Maria überein – Argument: Es gibt insgesamt 6 Stifte und Maria nimmt 2 heraus, das führt zu einer Wahrscheinlichkeit von 2/6 = 1/3 für rote Stifte (mehr als 20 % der Antworten).“

„Nein, man muss die Anzahl 3 der roten Stifte durch die Anzahl 6 aller Stifte dividieren. 3/6 = 50 % Chance für einen roten Stift (rund 15 % der Antworten).“

S. Anastasiadou analysiert in ihrer empirischen Studie (mithilfe von Ähnlichkeitsdiagrammen und einer Batterie von Aufgaben) Zusammenhänge im Verständnis von algebraischen und graphischen Fertigkeiten und kommt zum Schluss: Der Mangel an Fähigkeit, zwischen verschiedenen Repräsentationen zu wechseln, behindert ein breiteres Verständnis der Begriffe. Es gibt eine Neigung, mathematische Begriffe mitsamt ihrer Repräsentation zu lernen und zu übersehen, dass es sich um ein und denselben Begriff in einer anderen Repräsentation handelt.

Auswirkungen Neuer Medien

Eine systematische Bewertung der Möglichkeiten Neuer Medien ist nicht erfolgt. Man kann aber beobachten, dass, sofern sich die Vortragenden auf Unterricht oder Lehrerfortbildung beziehen, Software eine wichtige Rolle spielt. Tabellenkalkulation (wie EXCEL), Fathom oder Tinkerplot werden einerseits zur effizienten Berechnung, aber auch zur Illustration von wichtigen Ideen (Verteilungsbegriff, Gesetz der großen Zahlen etwa) genützt (S. Inzunsa, R. Peard).

Indirekt bilden Neue Medien das Rückgrat bei D. Pratt: Er zeigt, wie man mithilfe seines Programms „ChanceMaker“ die intuitiven Vorstellungen von Lernenden prägen kann. Pratt spricht von neuen Herausforderungen für Designer von Software und für Lehrende, die diese Software nutzen: In einer Vermischung von Kontrolle über Eingangsparameter (über den Zufall) und Darstellungen von Ergebnissen (Histogramme für die Verteilung oder Kennzahlen wie Mittelwerte) meint er, NEUE Einsichten über den Zufall zu ermöglichen und so die intuitiven Ideen, die vielleicht zu eng (und daher manches Mal irreführend) sind, zu erweitern. Software bietet effizientere, vor allem auch grafische Möglichkeiten, Erfahrungen mit dem Zufall – auch im Zeitraffer – zu ordnen. Seine Ausführungen könnte man gleichermaßen unter Fundamentale Ideen einordnen: „Wie formt man diese nach und nach – mithilfe Neuer Medien?“ Es entsteht nach Pratt eine bisher noch nicht gekannte Welt von Intuitionen, welche sich auf die Begriffe und ihr Verständnis auswirkt.

Perspektive der Lehrenden

Das Thema deckt auch die Aus- und Weiterbildung von Lehrenden sowie Vorstellungen von Lehrenden ab, wie man Wahrscheinlichkeitsrechnung unterrichten kann. Einige der Beiträge zu diesem Thema kann man ohne Schwierigkeiten auch zu empirischer Forschung oder zu fundamentalen Ideen einordnen.

Einen interessanten Ansatz zum Einstieg in die Wahrscheinlichkeitsrechnung findet man bei K. Lyso: In einer Vorlesung für Lehramtsstudenten beginnt er mit einer empirischen Untersuchung und gewinnt einmal deren Motivation, zum anderen kann er im späteren Verlauf der Vorlesung immer wieder auf die intuitiven Anknüpfungspunkte verweisen. Damit gelingt es ihm, die Brücke von den formalen Begriffen zum vorhandenen, intuitiven Vorwissen zu schlagen. Der Berichterstatter selbst hat wiederholt Interviews aus der empirischen Forschung als bereicherndes Element in die universitäre Ausbildung eingebaut und kann nur bestätigen, dass dies von den Lernenden mit Vorteil aufgegriffen wird. Dabei sind die verwendeten Items gar nicht so entscheidend, wichtig ist, *wie* man damit umgeht. Das heißt, wie man über verschiedene, mögliche Ansätze zur Lösung spricht, welche dann unter welchen Bedingungen doch zutreffen, warum man in der normativen Aufgabenstellung eine bestimmte Modellierung bevorzugt, und schließlich, warum Personen (manches Mal, aber nicht immer, zu Recht) davon abweichen und zu anderen Lösungen kommen.

L. Zapata versucht, aus ihrer empirischen Studie Metawissen für Lehrer abzuleiten: Worin unterscheidet sich ein Lehrer mit Erfahrung von einem Neuling? Welche Probleme hinsichtlich des Verständnisses aufseiten der Lernenden kann man durch Expertise vorhersehen und entsprechende Hilfen in den Unterricht einbauen? Überraschend, oder besser, nicht überraschend ist, dass Lehrende mit wenig Erfahrung oft dieselben unpassenden intuitiven Vorstellungen wie ihre Schüler haben und daher wohl kaum Hilfestellung leisten können. Vielleicht ein weiteres Argument für die Ausbildung von Lehrenden an der Universität, die Unterweisung nicht nur auf die Mathematik des Gegenstands zu beschränken, sondern auch (mindestens) eine didaktische Vorlesung dazu in den Kanon aufzunehmen; die Wahrscheinlichkeitsrechnung wäre dafür vordringlich zu empfehlen.

J. Watson and S. Ireland berichten über die Ergebnisse von Einzelinterviews zu Fragen über den Zusammenhang mit empirischen und theoretischen Wahrscheinlichkeiten. Vorangegangen sind zwei Unterrichtseinheiten bei 12-Jährigen: zuerst konventionell mit Münzwerfen und Auswertung der Ergebnisse von 10 Würfen, die entsprechend wiederholt werden; dann dieselben Experimente mit Tinkerplot (einer didaktischen Software, die jetzt doch schon eine gewisse Reichweite hat). Daran schließen sich Einzelinterviews mit fünf der Lernenden an. Die Ergebnisse zeigen, wie schwierig es ist, dieses Einpendeln der relativen Häufigkeiten auf das Niveau der Wahrscheinlichkeit einerseits und die volle „Freiheit“ des Zufalls für die einzelnen nächsten Experimente andererseits verständlich zu machen. Der Einsatz der didaktischen Software hat hierbei zu einer Verbreiterung der Erfahrung geführt, die sich im Lernerfolg niederschlägt. Einzelne Fragen, die auch für den Unterricht offenbleiben, sind: Kann der Computer Zufall erzeugen? Wie geht man als Lehrer mit den Diagrammen aus der Software um? (wie hilft man, sie richtig zu lesen, etwa das Augenmerk auf den Maßstab zu lenken?) Wie stellt man sicher, dass die Kinder ausreichend Übung im proportionalem Denken haben? (reicht hierzu die Bruchrechnung ohne Bezug zu Wahrscheinlichkeiten?)

V. Kataoka berichtet von Workshops im Rahmen der Lehrerfortbildung in Brasilien. Die Probleme von Lehrenden sind erstaunlich ähnlich den Schwierigkeiten, die bei uns beobachtet werden. Die Interaktivität und die aktive Einbindung der Lehrenden in den Workshop könnten aber auch bei uns zu innovativeren Ansätzen in der Fortbildung zählen. In besonderer Erinnerung ist dem Berichterstatter ein Experiment geblieben, das nachhaltig auf die Bedeutung ordentlicher Modellierung sowie wirklich auf der Basis von Zufall erhobener Daten (wann hat man die schon?) hinweist:

Wir brechen einen Stab zufällig in drei Teile. Danach werden die Probanden aufgefordert, ein Dreieck mit den Teilen zu bilden. Schließlich stellt man in der Gruppe die Erfolgsquote fest, mit der tatsächlich Dreiecke gebildet werden konnten. Versuchen Sie das Experiment mit Spaghettis – ohne vorher zu erklären, was man damit beabsichtigt. Erfolgsquoten mit rund 75 % sind keine Seltenheit. Dem stehen mindestens zwei Modellierungen gegenüber (mit 25 % bzw. ca. 18 % Erfolgswahrscheinlichkeit). Die offensichtliche Diskrepanz zwischen Theorie und Modell lässt so nach und nach an unserer Fähigkeit, einen Stab wirklich zufällig in 3 Teile brechen zu können, zweifeln. Relative Häufigkeiten können manchmal ganz ohne Wert sein, um die unbekannte Wahrscheinlichkeit zu schätzen. In der Diskrepanz der Begriffe liegt – manchmal – recht viel Einsichtpotenzial. Die weitere Klärung im Unterricht wird dann schon mit Spannung erwartet. Analoge Beispiele, weniger „emotional“ geladen, kann man zuhauf anführen.

Eine interessante Bereicherung in Richtung außerschulische Aktivitäten stellt der Beitrag von H. Trevethan dar, der ein Projekt von Schülern beschreibt, welche ein Glücksspiel auf einer Wissenschaftsmesse der Öffentlichkeit gegenüber vorgeführt haben. Das Konzept solcher Wissenschaftsmessen sieht vor, dass Lernende sich vom Fach her in ein Projekt einarbeiten und dieses gegenüber einer interessierten Öffentlichkeit vorstellen. Neben der Auseinandersetzung mit dem Publikum gibt es eine Fachjury, welche die Beiträge bewertet und mit Preisen auszeichnet. Die Vorteile einer solchen Vorgangsweise liegen auf der Hand. Die Eigentätigkeit der Lernenden, die Eigenverantwortlichkeit, das Auftreten in der Öffentlichkeit etc. Sie müssen schon ganz gut beschlagen sein, um sich den Unwägbarkeiten eines Liveauftritts zu stellen. Im konkreten Fall geht es um das Glücksspiel „Dreh die Plättchen", welches durchaus Strategien zulässt. Diese auszuarbeiten, sie zu spielen und gegen das Publikum erfolgreich einzusetzen, sie dann schließlich den neugierig gewordenen Leuten zu erklären, war die Aufgabe eines Teams von Jugendlichen. Der Rollentausch vom (oft passiven) Lerner zu dem, der (aktiv und verantwortlich) erklärt, ist für Lernende von nachhaltiger Wirkung. Diese echte (und nicht vorgetäuschte) Übertragung von Verantwortlichkeiten könnte durchaus im Unterricht (von vielleicht besonders Interessierten) verstärkt ausgereizt werden. Mathematisch spielen bedingte Wahrscheinlichkeiten und die Bayes-Formel eine Schlüsselrolle.

Bedingte Wahrscheinlichkeit und das Bayes-Theorem

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Bayesianisches Schließen sind wichtige Bestandteile auch der universitären Lehre, auch in Anwendervorlesungen. Viele Typen von Fehlern sind isoliert untersucht worden. Was nach C. Batanero und C. Diaz fehlt, ist eine Untersuchung von Zusammenhängen zwischen solchen Fehlstrategien und der Zusammenhang mit zunehmender Ausbildung in Mathematik. Dazu entwickeln die beiden Forscherinnen – aus durchaus bekannten Aufgaben – eine Testbatterie, testen diese aus und wenden sie auf Universitätsstudenten an. Die Daten werden mittels Faktorenanalyse analysiert. Sie beschreiben einige Phänomene, die trotz zunehmender mathematischer Ausbildung gleich bleiben, i. a. weisen sie aber eine deutliche Abnahme verzerrter Strategien mit zunehmenden Mathematikkenntnissen nach. Allerdings sind die beobachteten Fehlstrategien oft wirklich sehr lokal, Zusammenhänge zwischen diesen lassen sich in der Studie nämlich nicht nachweisen. Das hat für den Unterricht zur Konsequenz, dass tatsächlich einerseits mehr Wert auch auf die mathematische Ausbildung gelegt werden soll; allerdings sollten im Unterricht mögliche Fehler auch auf intuitivem Wege behandelt werden.

Die meisten empirischen Untersuchungen zum Verständnis von bedingter Wahrscheinlichkeit sind nach P. Huerta im Umfeld kognitiver oder psychologischer Forschung angesiedelt. Da wird u. a. auch der Einfluss der Repräsentation von Daten im Rahmen der gestellten Aufgabe untersucht.

Das Diagnoseproblem ist eines der meist gestellten Probleme: Mit den bekannten Wahrscheinlichkeiten für positive bzw. negative Befunde sowie der bekannten Wahrscheinlichkeit für die Krankheit in der Bezugsgruppe fragt man nach der Wahrscheinlichkeit, im Fall eines positiven Befundes tatsächlich krank zu sein.

Nun kritisiert Huerta es als gravierenden Mangel der bestehenden Forschung, wenn diese auf die Struktur der Aufgabenstellung keinen Bezug nimmt: Dann kann man die Ergebnisse doch nicht wirklich (auf alle Arten von Problemen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten) verallgemeinern. Er beschreibt die mathematische Struktur von „ternären" Problemen und klassifiziert insgesamt 20 verschiedene Typen von Aufgaben mit bedingten Wahrscheinlichkeiten, von denen höchstens eine Unterklasse (und daraus vornehmlich ein und derselbe Typ) Gegenstand der bisherigen Forschung waren. Ein Graph mit allen Problemen hilft zu veranschaulichen, wie man die Lösung eines Problems am Graphen nachvollziehen kann, was gleichzeitig die Schwierigkeit des Problems einstufen lässt. Damit zeichnet Huerta perspektivisch einen Plan zur Erforschung des Verständnisses bedingter Wahrscheinlichkeiten. In letzter Konsequenz beabsichtigt er nicht nur individuelles Bearbeiten solcher Aufgaben zu untersuchen, sondern auch Interaktionen im Unterricht zu beschreiben und ordnen.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten gelten als schwierig, Baysianisches Schließen gilt als nicht minder schwer. Unbestritten ist deren Bedeutung für ein erfolgreiches Curriculum in Stochastik. L. Martignon und S. Krauss stellen ein Unterrichtsexperiment gerade zu diesem Thema vor, das sich 10-Jährigen (!) widmet. Mithilfe von Wason-Karten schaffen sie es, dass Kinder sich tatsächlich erfolgreich einbringen.

Welche der vier Karten musst du umdrehen, damit du weißt, ob die folgende Regel eingehalten wird: „Wenn auf der einen Seite der Karte ein Selbstlaut steht, dann muss auf der anderen Seite eine ungerade Zahl stehen."

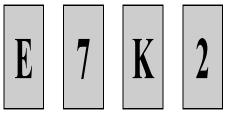


Abb. 2: Die originalen Wason-Karten

Während im „logischen“ Kontext Kinder die Aufgabe schlecht bewältigen, wird sie recht gut gelöst, wenn die Fragestellung dem Alltag nahe kommt. Martignon und Krauss verwenden 32 Karten (gleich viele von den einzelnen Typen) und lassen die Kinder im Team die „richtigen“ Karten umdrehen. In dieser statistischen Variante sind die Kinder recht erfolgreich. Sie gehen dann dazu über, die Wason-Karten in Steckwürfel (mit 2 Farben) abzubilden mit dem Vorteil, dass man nun beide Seiten der Karte gleichzeitig sieht. Mit diesen Hilfsmitteln begünstigen sie Lernfortschritte im proportionalen Denken, gleich im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeiten. Sie berichten jedenfalls von ermutigenden Pilotprojekten.
Wir kennen alle die Fallstricke in der Interpretation der Ergebnisse aus statistischen Tests oder aus Vertrauensintervallen. Diese haben auch damit zu tun, dass man dabei die Interpretation von Wahrscheinlichkeit reduziert auf relative Häufigkeiten bei unabhängiger Wiederholung ein und desselben Zufallsexperiments. Dazu hat es – auch in der didaktischen Diskussion – heftige Auseinandersetzungen gegeben. Diese nimmt Ö. Vancsó zum Anlass, einen parallelen Zugang zur klassischen und zur Bayesianischen Statistik zu entwickeln. Er hat seine Ideen in mehreren Zyklen an Lehramtsstudenten ausprobiert und berichtet von seinen positiven Erfahrungen damit. „Jetzt habe ich erst verstanden, was mit den Vertrauensintervallen gemeint ist“, so die Aussage eines seiner Studenten. Vancsó vergleicht die Debatte, welcher Zugang nun besser sei, mit der Geometriediskussion im 19. Jh. Dabei vergessen wir den Fortschritt durch die moderne Mathematik, die sich längst nicht mehr mit *absolut* wahren Sätzen befasst. Nach Vancsó ist es daher eine falsche Dichotomie, *entweder* klassische Statistik *oder* Bayesianische Statistik zu lehren. Beide bieten konsistente Theorien – die Wahl kommt erst mit der Anwendung. Seine didaktische Leitlinie ist: „Eine Theorie versteht man besser, wenn man sie mit einer anderen vergleicht.“ Dementsprechend arbeitet er an einem Konzept und an Materialien für den Unterricht in beiden statistischen Schulen *parallel* zueinander, ohne einen der beiden Zugänge zu forcieren.

Fundamentale Ideen

Unter diesem Themenkomplex war daran gedacht, Beiträge zu probabilistischen Ideen wie „Zufallsvariable – Verteilung – Erwartungswert“ oder die Konvergenz relativer Häufigkeiten bzw. den zentralen Grenzverteilungssatz betreffend in die Arbeitsgruppe hereinzubekommen. Ein weiteres Thema „Anpassen von Wahrscheinlichkeiten – Bayes-Theorem – Unabhängigkeit“ hat so viele Beiträge angezogen, dass sie eigens – weiter oben – behandelt wurden.
R. Peard geht in seinem Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung wieder an die Wurzeln zurück, er motiviert die Begriffe an Fragestellungen aus dem Glücksspiel. Interessanterweise argumentiert er nicht mit den Möglichkeiten, die Begriffe aus dem historischen Kontext des Entstehens besser verstehen zu lernen. Glücksspiele sind ja mittlerweile durch die (nicht immer leichte) Kombinatorik als Lösungsmethode sowie durch ihre Künstlichkeit (wir wollen und müssen den Lernenden doch wirkliche Anwendungen näherbringen!) angefeindet worden. Nein, er argumentiert mit dem Anwendungsargument: Glücksspiele sind (in Australien) so weit verbreitet, dass sie sich zu einem sehr wichtigen Wirtschaftssektor entwickelt haben. Es sei daher notwendig, die jungen Menschen mit den Praktiken dieses Bereiches vertraut zu machen und aufzuklären, worin ihre Chancen denn nun wirklich bestehen.
R. Kapadia skizzierte Aufgaben aus dem nationalen britischen Vergleichstest (Test der „national attainment targets“) und schließt aus dem schlechten Abschneiden der Lernenden, dass der Unterricht im Vergleich zu 20 Jahre vorher nicht besser geworden ist. Das liegt u. a. darin, dass im Trend zur Statistik, und zwar zur einfachen deskriptiven Statistik (im Gewand der explorativen Datenanalyse, neuerdings als „data handling“ gehandelt), Begriffe und Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung eher zurückgedrängt werden.
Im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird nach wie vor das Augenmerk zu sehr auf Gleichwahrscheinlichkeit und experimentelle Wahrscheinlichkeit gelegt, auf Fehlvorstellungen wird zu wenig eingegangen, die Verbindung von Wahrscheinlichkeit und Risiko wird kaum aufgegriffen. Klar, wenn Leute dann Wahrscheinlichkeiten einschätzen müssen, haben sie eine starke Verzerrung in Richtung „gleiche Wahrscheinlichkeiten zuordnen“, speziell, wenn zwei Möglichkeiten angeboten werden bzw. vorhanden sind. Die fundamentale Idee der (subjektiv gefärbten und durch objektive Information unterstützten) Bewertung von Wahrscheinlichkeiten und Risiken hat noch immer keine nachhaltige unterrichtliche Ausgestaltung erfahren.

Panel-Diskussion zum Thema „Fundamentale Ideen zur Wahrscheinlichkeit auf Schulniveau“

R. Kapadia vertieft seine Überlegungen aus dem Vortrag und gibt eine Liste von Verhaltensweisen von Menschen, die sehr nachhaltig sind. Diesen gilt es, durch Unterricht geeignet zu begegnen:

- Menschen nützen ihre Erfahrung zur Beurteilung von Zufall und den damit verbundenen Chancen wahllos und unvollständig; eine verzerrende Rolle spielt dabei auch ihr Gedächtnis.
- Menschen tun sich sehr schwer, sehr kleine oder sehr große Wahrscheinlichkeiten richtig einzuschätzen, speziell wenn damit schwerwiegende Folgen verbunden sind.
- Menschen neigen dazu, *gleiche* Chancen zuzuordnen, speziell wenn es um zwei Möglichkeiten geht.
- Menschen ordnen Wahrscheinlichkeiten zu und verarbeiten diese zu neuen, ohne Regeln zu beachten (etwa die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist 1)

Y. Wu liefert einen Überblick über den Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung in China, das ja einen sehr zentral organisierten Unterricht hat. Der Schulalltag wird durch zwei (!) Lehrbücher und zentral organisierte Lehrerfortbildung geprägt. Es überrascht, wie die Details denen eines Unterrichts hierzulande ähneln. Für Einzelheiten sei auf die Internetseite der Arbeitsgruppe hingewiesen.

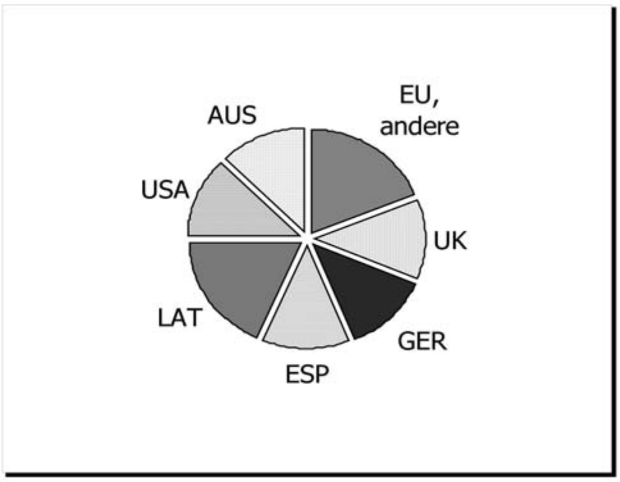
M. Borovcnik skizzierte einige Charakteristika von stochastischen Denken; dazu zählen:

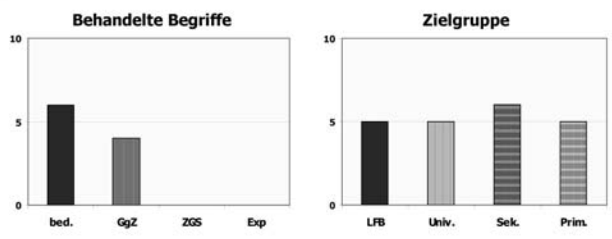
- Erfolgskontrolle bei Wahrscheinlichkeiten ist nur indirekt – das seltenste Ereignis kann einfach eintreten und damit die beste Strategie zunichte machen.
- Überlagerung mit kausalen Vorstellungen kann in die Irre führen.
- Unsere Kriterien in Situationen mit Unsicherheit können aus gänzlich „anderen“ Bereichen stammen und emotional sehr aufgeladen sein – so waren Wahrscheinlichkeit und Gottesurteile in der Antike ganz eng verbunden.

Vor diesem Hintergrund ist u. a. das Paradoxon des Stabilisierens relativer Häufigkeiten bei gleichzeitig (vollständig) aufrechter Fluktuation neuer Ereignisse nicht verwunderlich. Wir sind rationalen Zugängen im Zusammenhang mit Zufall gar nicht so offen gegenüber, wie wir dies als Lehrende uns gern wünschten. Die genannten Aspekte beeinflussen unser Verständnis einschlägiger Situationen und das, was wir als mathematische Lösung akzeptieren wollen. Eine Schwierigkeit mag auch darin liegen, dass wir Wahrscheinlichkeit allzu sehr als einen Wesenscharakter der realen Situation auffassen und vernachlässigen, dass es sich nur um eine *Sichtweise* von den Dingen handelt: „Es gibt keine Wahrscheinlichkeit – es handelt sich dabei nur um *eine* von vielen Möglichkeiten, über die Welt nachzudenken.“

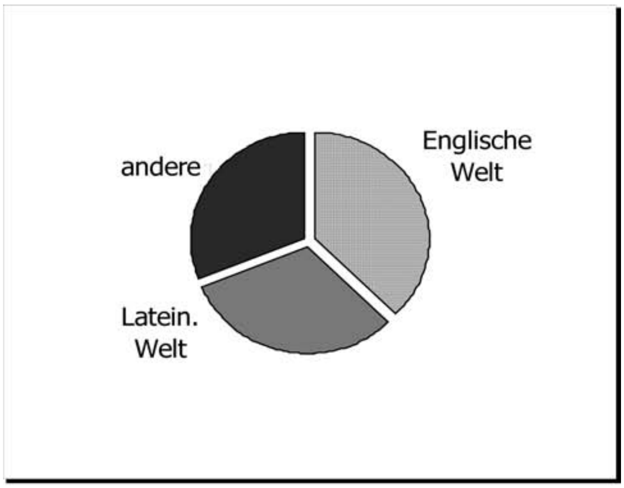
Eine allgemeine Einordnung der Beiträge und ein Ausblick

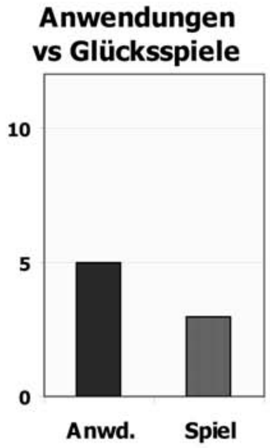
Die Arbeitsgruppe konnte 17 Referenten – nach eingehender Begutachtung der eingelangten Vorschläge – die Möglichkeit zur Darstellung ihrer Ergebnisse bieten, eine Panel-Diskussion rundete das Angebot ab. Die Autoren stammen aus Europa, den USA, Australien und Lateinamerika; der Rest verteilt sich gleichmäßig auf den ganzen Globus. Einige Graphen illustrieren die thematische Vielfalt der Beiträge.

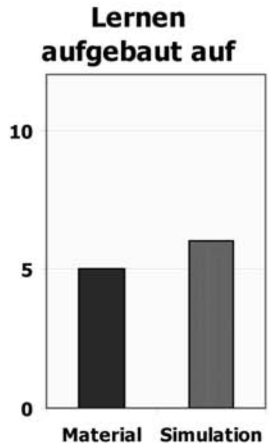


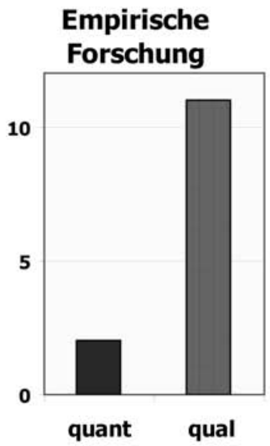


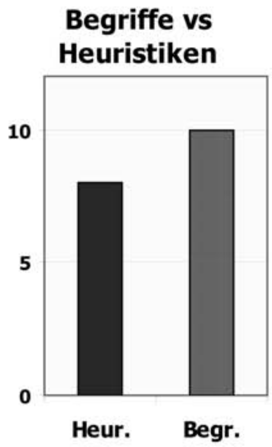
bed.: bedingte Wahrscheinlichkeit und Bayes,
GgZ: Gesetz großer Zahlen,
ZGS: Zentraler Grenzverteilungssatz,
Exp: Erwartungswert; LFB Lehrerfortbildung











Weitere Details kann man auf der Internet-Seite der Arbeitsgruppe finden. ICME hat erstmals die Statistik und die Wahrscheinlichkeitsrechnung in zwei getrennten Arbeitsgruppen beherbergt. Zwar teilt man die potentiellen Interessenten während der Tagung auf. Einerseits hat das große Interesse, welches die Wahrscheinlichkeitsgruppe gefunden hat, vielleicht einen Impuls gegeben, sich auch verstärkt wieder diesem Thema aus der Stochastik zu widmen. Andererseits gibt es ja auch nach der Tagung Ergebnisse in Form von Aufsätzen und da ist die Zweiteilung sehr erfolgreich: Wir können dadurch eine Fülle einschlägiger Arbeiten international präsentieren und beide Bereiche der Stochastik dadurch gut abdecken.

Entgegen dem internationalen Trend in Curricula, die Wahrscheinlichkeitsrechnung zugunsten der Statistik zu kürzen, hat diese Arbeitsgruppe – und die gemeinsame Tagung der ICME und IASE – Joint ICME/IASE Study, welche eine Woche vorher auch in Monterrey stattgefunden hat – gezeigt, dass die wissenschaftliche Gemeinschaft ein vitales Interesse an der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufrechterhalten hat. Das wird letztlich auch den einschlägigen didaktischen Forschungen zur Statistik weitere Anregungen geben und vielleicht auch die Entwicklung hinsichtlich der Curricula neu beleben.

Adressen im Internet:

Arbeitsgruppe zur Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der ICME 11: http://tsg.icme11.org/tsg/show/14
Arbeitsgruppe zur Statistik: http://tsg.icme11.org/tsg/show/15
Joint ICME/IASE study: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Manfred Borovcnik
Institut für Statistik,
Alpen-Adria-Universität Klagenfurt
9020 Klagenfurt, Österreich
manfred.borovcnik@uni-klu.ac.at