Ergänzungen zum Paradoxon der beiden Kinder

GERD RIEHL, BARSINGHAUSEN

***Zusammenfassung**: Wir untersuchen das kürzlich (Motzer 2008) in SiS behandelte Problem unter neuem Aspekt. Eine genaue Analyse der jeweiligen Situation und Information zeigt, dass scheinbar isomorphe Aufgaben durchaus unterschiedliche Lösungen haben können. Konkretes Datenmaterial stützt die theoretisch gewonnenen Ergebnisse.*

1 Formulierung der Aufgabe

Das Problem des Paradoxons der beiden Kinder findet man in unterschiedlichen Versionen und mit wechselndem Kontext, der nicht unbedingt für die Lösung des Problems relevant ist, aber von dessen Kern ablenken kann. So beschreibt Motzer (2008, S. 3) folgende Situation: „Sie wissen, dass Ihr Kollege zwei Kinder hat. Zufällig treffen Sie ihn, und er hat eine Tochter dabei.“ Die daran anschließende Frage ist, unabhängig vom Kontext (und ggf. für Söhne statt für Töchter formuliert), immer dieselbe: „Wie wahrscheinlich ist es, dass das andere Kind auch eine Tochter ist?“

Bisweilen wird die Aufgabe noch durch Zusatzinformationen oder Zusatzfragen ergänzt, die eine andere Antwort als die oben gestellte Frage haben können (aber nicht müssen); in jedem Fall geht es jedoch um Familien mit zwei Kindern. Varianten der Aufgabenstellung hinsichtlich Information und Situation betrachten wir erst im Abschnitt 5.

2 Das Paradoxon

Eigentlich müsste das Problem mit der schlichten Frage zu erledigen sein, ob die Information in unserer Version der Aufgabe (also das Geschlecht eines zufällig getroffenen Kindes) einen Einfluss auf das Geschlecht des anderen Kindes der betreffenden Familie haben kann. Die Antwort *nein* führt auf die korrekte Lösung 0,5 (wobei wir zunächst wie auch Motzer Jungen- und Mädchengeburten als gleichwahrscheinlich annehmen).

Zu dem hiervon abweichenden Ergebnis ⅓ führt das zur formalen Lösung der Aufgabe unzureichende Argument, es liege bei der Familie – da ja die Konstellation JJ unmöglich ist – einer der drei gleichwahrscheinlichen Fälle MM, MJ, JM vor (wobei z. B. MJ „*älteres Kind Mädchen, jüngeres Kind Junge*“ bedeutet).

Wir benennen diesen Widerspruch, wie in der Literatur üblich, als *Paradoxon der beiden Kinder*, obwohl man sonst von einem Paradoxon spricht, wenn die naiv gewonnene Lösung die falsche ist.

3 Daten aus Stichproben

Motzer beschreibt die unbefriedigende Suche nach einer Simulation zur Klärung des Paradoxons; wir haben einen direkteren Zugang mit konkretem Datenmaterial gewählt und alle Schülerinnen und Schüler eines Jahrgangs einen Fragebogen wie in Abbildung 1 ausfüllen lassen.

1. Dein Geschlecht:	○ Mädchen	○ Junge
	Zutreffendes bitte ankreuzen!	
2. Deine Geschwister:	__ Schwester(n)	__ Brüder
	Anzahlen (ggf. 0) eintragen!	
3. Davon älter als Du:	__ Schwester(n)	__ Brüder
	Anzahlen (ggf. 0) eintragen!	
4. Bist du ein Zwilling?	○ nein	○ ja
	Zutreffendes bitte ankreuzen!	
Vielen Dank für deine Mitarbeit!		

Abb. 1: Schülerfragebogen

Es wurden nur Probanden aus Familien mit zwei Kindern berücksichtigt, die also Frage 2 mit „0 Schwestern und 1 Bruder“ oder „1 Schwester und 0 Brüder“ beantwortet hatten (und Frage 4 mit *nein*, wie später begründet wird). Das war mit 65 etwa die Hälfte des Jahrgangs; auch die Daten der anderen Schüler können aber für Variationen des Problems nützlich sein.

Die in die Auswertung kommenden Probanden kann man nun in eine Vierfeldertafel nach den Kriterien *Geschlecht* und *Geschwisterteil gleichen Geschlechts* einordnen (Abb. 2). Dadurch kann man außer für P(Schwester | M) auch für die dazu symmetrische Wahrscheinlichkeit P(Bruder | J) einen Schätzwert gewinnen – und natürlich auch für diejenige der beiden zugehörigen Gegenereignisse P(Bruder | M) und P(Schwester | J).

	Geschlecht des Geschwisterteils		
	gleich	nicht gleich	Σ
M	*a*	*b*	*a* + *b*
J	*c*	*d*	*c* + *d*
Σ	*a* + *c*	*b* + *d*	*n*

Abb. 2: Vierfeldertafel zur Auswertung der Schülerfragebogen

Da die naiv gewonnene Lösung in 2 stimmt, sollten die Besetzungszahlen der Spalten *gleich* und *nicht gleich* in jeder Zeile annähernd übereinstimmen ($a \approx b;\ c \approx d;\ a + c \approx b + d$); dagegen würde es für die falsche Lösung sprechen, wenn in der linken Spalte jeweils deutlich kleinere Werte als in der rechten aufträten.

Tabelle 1 zeigt am Hannah-Arendt-Gymnasium in Barsinghausen im November 2008 erfasste Daten. Sie sprechen trotz Schwankungen zwischen den Klassen insgesamt für die intuitive Lösung.

Stichprobe	*a*	*b*	*c*	*d*	*a* + *c*	*b* + *d*
9 a	5	6	3	2	8	8
9 b	3	5	4	2	7	7
9 c	5	1	2	4	7	5
9 d	0	4	7	1	7	5
9 e	2	1	5	3	7	4
Jahrgang 9	15	17	21	12	36	29

Tab. 1: Daten verschiedener Stichproben

Natürlich kann man anhand der empirischen Daten nicht mit Sicherheit zwischen richtiger und falscher Lösung entscheiden; es ist aber sicher motivierend und lehrreich für Schülerinnen und Schüler, Daten an der eigenen Schule zu sammeln und auszuwerten. Dabei kann deutlich werden, dass eine einzelne Klasse als Datenbasis zu klein ist, um eine Tendenz zu erkennen, bei einem ganzen Jahrgang als Stichprobe sollte dies aber möglich sein (vgl. Tab. 1).

Die Planung der Umfrage kann auch Grundlage für die Modellierung einer Simulation sein, mit der die Stabilisierung der relativen Häufigkeiten mit wachsendem Stichprobenumfang beobachtet und die Vermutung über die Richtigkeit der alternativen Lösungen sicherer gemacht werden kann. Die gewonnene Vermutung bedarf aber auf jeden Fall noch der theoretischen Absicherung, die wir im folgenden Abschnitt auf zwei Arten vornehmen.

4 Korrekte formale Lösungen

Die Analyse unserer Aufgabe (und später noch zu behandelnder ähnlicher Probleme) zeigt, dass stets die beiden Merkmale *Geschlecht eines Kindes* und *Typ einer 2-Kinder-Familie* eine wichtige Rolle bei der Mathematisierung spielen. So ist in unserer Aufgabe die Information über das Geschlecht (M oder J) eines zufällig getroffenen Kindes gegeben. Die in Abbildung 2 benutzten Ausprägungen *gleich* und *ungleich* kann man auch interpretieren als Familientypen T_1 und T_2, wobei der Index die Anzahl der Geschlechter unter den Kindern angibt.

Unsere erste theoretische Bestätigung der aus den Daten gewonnenen Vermutung knüpft direkt an die Vierfeldertafel der Abbildung 2 an. Nimmt man an, dass Jungen- und Mädchengeburten unabhängig voneinander und gleichwahrscheinlich sind, so kann man für eine fiktive Gesamtzahl von 20 Familien mit zusammen 40 Kindern zunächst die erwarteten Randsummen berechnen (je 20, vgl. Abb. 3), und aus diesen dann die für die inneren Zellen erwarteten Besetzungszahlen, also die sog. natürlichen Häufigkeiten (Martignon und Krauss, 2007, S. 18 f.), das sind hier jeweils 10.

Wie man aus Abbildung 3 unmittelbar entnehmen kann, ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Familientyp (und damit auch für das Geschlecht des Geschwisterteils) bei gegebenem Geschlecht des getroffenen (= zufällig gewählten) Kindes in jedem Fall 10 : 20 = 0,5.

	T_1	T_2	Σ
M	10	10	← 20
J	10	10	← 20
Σ	↑ 20	↑ 20	← 40 ↑

Abb. 3: Erwartete Verteilung der 40 Kinder aus 20 Zweikinderfamilien

Besonders lehrreich hinsichtlich des Denkfehlers bei der falschen Lösung ist die Veranschaulichung in einem Baumdiagramm, wobei wir jetzt je nach Anzahl der Mädchen in einer Familie *drei* Typen F_0, F_1 und F_2 unterscheiden (Abb. 4).

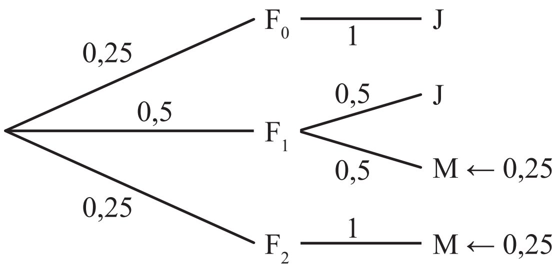

Abb. 4: Baumdiagramm zum Paradoxon

Die entscheidende Stelle ist der Fall F_1; man trifft zwar, wenn man den oberen Pfad ausschließt (wie üblicherweise argumentiert wird), nur in ⅓ aller Fälle auf ein Kind (also ein Mädchen) aus einer F_2-Familie, auf ein *Mädchen* aus einer F_1-Familie aber auch nur in der Hälfte der restlichen Fälle. Somit ergibt sich auch als Summe von $P(F_1 \wedge M)$ und $P(F_2 \wedge M)$ die totale Wahrscheinlichkeit von M – wie es ja sein muss – zu $P(M) = 0{,}5$.

Die in der Aufgabe gefragte Wahrscheinlichkeit ist $P(F_2 \mid M)$ und kommt im Baumdiagramm gar nicht direkt vor. Zur korrekten formalen Lösung gelangt man nur indirekt mithilfe der Formel von Bayes:

$$P(F_2 \mid M) = \frac{P(F_2 \wedge M)}{P(M)} = \frac{0{,}25}{0{,}5} = 0{,}5.$$

5 Varianten des Problems

Wir untersuchen nun verschiedene Aspekte, die zu neuen Aufgabenstellungen führen, wobei sich die alte, eine zur alten analoge oder aber auch eine prinzipiell andere Lösung ergeben kann.

5.0 Vorbemerkung: Isomorphe Probleme

Es geht in diesem Abschnitt um die „pädagogische Aufgabe“, die Freudenthal (1973, S. 538) gerade im Hinblick auf die Stochastik wie folgt beschreibt: „Isomorphismen von *Problemen* (sind) als Unterrichtsgegenstand ebenso wichtig wie die *mathematischer Entitäten*, und so etwas lernt[1] man nicht längs formaler Definitionen, sondern indem man den Lernenden mit solchen Isomorphismen konfrontiert.“

Als Beispiele nennt er die beiden Ereignispaare „mindestens eine Sechs beim viermaligen Werfen eines Würfels“/„mindestens eine Sechs beim gleichzeitigen Wurf von vier Würfeln“ und „eine zufällig gewählte Person hat heute Geburtstag“/„zwei zufällig gewählte Personen haben am selben Tag Geburtstag“.

Ebenso wichtig ist es natürlich zu erkennen, wenn zwei ähnlich klingende Probleme nur scheinbar isomorph sind. Andernfalls führt die Übernahme einer „schon bekannten“ Lösung im Allgemeinen zu einem falschen Ergebnis.

5.1 Eine neue Situation

Als erste Variante betrachten wir die *Zusatzfrage* von Motzer (2008, S. 3): „Macht es einen Unterschied, wo Sie den Kollegen treffen (z. B. auf der Straße oder beim Informationsabend am Mädchengymnasium)?“ Auch hier wird man die Frage, ob das Geschlecht des dort getroffenen Kindes einen Einfluss auf das des anderen haben kann, intuitiv verneinen.

Diese Antwort bestätigen auch unsere Daten aus Tabelle 1 ($a : b = 15 : 17$), die ja – analog zum Beispiel der angehenden Gymnasiastinnen (noch Viertklässlerinnen) – aus einer Stichprobe von Schülerinnen einer festen Altersstufe stammen. Von diesen kann man annehmen, dass sie mit gleicher Wahrscheinlichkeit aus Familien vom Typ F_1 bzw. F_2 stammen (vgl. Zeile M in Abb. 3). In einer Vierfeldertafel wie Abbildung 3 sind im Beispiel „Mädchengymnasium“ als Randsummen vielleicht 38 Mädchen und 2 Jungen zu erwarten, die sich aber auf die Familientypen T_1 und T_2 jeweils gleichmäßig verteilen werden (19 : 19 bzw. 1 : 1). Daher gilt auch in dieser Situation P(Schwester | M) = 0,5.

1 Dies ist offenbar ein Druckfehler; gemeint ist „lehrt“.

Unsere Daten für die Jungen weichen von der erwarteten Gleichverteilung mit $c : d = 12 : 21$ stärker ab als bei den Mädchen, sprechen aber natürlich deutlich gegen die falsche Lösung, nach der *weniger* Jungen mit als ohne einem Bruder zu erwarten sein sollen.

5.2 Mädchen bevorzugt?

Büchter und Henn (2007, S. 190) untersuchen den Fall, dass beim Familientyp F_1 das Mädchen als Begleitung mit Wahrscheinlichkeit r gewählt wird. In Abbildung 4 ist also in der Verzweigung der 2. Stufe 0,5 im oberen Zweig durch $P(J \mid F_1) = 1 - r$ und im unteren durch $P(M \mid F_1) = r$ zu ersetzen.

In Abhängigkeit vom Parameter r ergibt sich dann $w = P(F_2 \mid M) = \frac{1}{1 + 2 \cdot r}$. Dies bedeutet, dass die Werte für w zwischen ⅓ (bei totaler Bevorzugung der Mädchen in den F_1-Familien) und 1 (im Falle vollständiger Benachteiligung der Mädchen) liegen (vgl. Abb. 5).

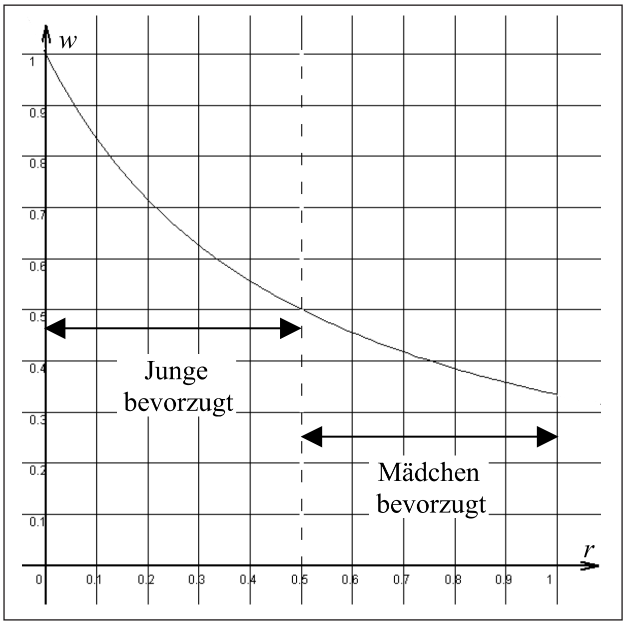

Abb. 5: Der Graph von $r \rightarrow w = P(F_2 \mid M)$

Mit genau dieser Modellierung kommt Motzer für die Aufgabe aus 5.1 mit der Setzung $r = 1$ zu dem Ergebnis ⅓; sie erwähnt zwar unter den möglichen zu berücksichtigenden Faktoren den entscheidenden der Altersstufe, ohne diesen allerdings in ihre Modellierung einzubeziehen. Auch Büchter und Henn nennen das Beispiel des Informationsabends am Mädchengymnasium als eine Realisierung ihres oben genannten Modells (wohl mit $r = 1$). Sie übersehen dabei, dass in diesem Fall in Abbildung 4 in der 1. Stufe nicht jede 2-Kinder-Familie infrage kommt, sondern nur solche mit einem Kind, das in die 4. Klasse geht. Dies hat auf die Wahrscheinlichkeiten der Familientypen in der 1. Stufe zwar keinen Einfluss, wohl aber auf die 2. Stufe, denn nun ist keine Bevorzugung oder Benachteiligung eines Geschlechts bei der Wahl des begleitenden Kindes in einer F_1-Familie mehr möglich; es muss das Kind sein, das in die 4. Klasse geht (von dem sehr unwahrscheinlichen Fall, dass dies für beide gilt, sehen wir hier ab).

Bei korrekter Modellierung (mit $r = 0{,}5$) haben wir also wieder die in Abbildung 4 dargestellte Situation, und als Ergebnis damit $P(F_2 \mid M) = 0{,}5$, was ja auch durch die Daten von Tabelle 1 bestätigt wird.

5.3 Das Problem des älteren Kindes

Häufig wird das (scheinbare) Paradoxon erzeugt, indem man zwei sehr ähnliche Aufgaben einander gegenüber stellt, die aber (angeblich) verschiedene Lösungen besitzen. So heißt es bei Griesel (2007, S. 116): „a) … Marie hat … gesehen, dass zu der neuen Familie ein Mädchen … gehört. Aus ihrer Sicht ist das andere Kind … mit Wahrscheinlichkeit ⅓ ebenfalls ein Mädchen. Wie kann sie das begründen? – b) Eva … weiß, dass das ältere … ein Mädchen ist. Aus ihrer Sicht ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass das andere ebenfalls ein Mädchen ist, sogar ½. Wie kommt das?“

Abgesehen davon, dass a) wohl auf „klassische“ Art falsch gelöst werden soll, indem man nämlich die *totalen* Wahrscheinlichkeiten der drei infrage kommenden Familientypen vergleicht statt korrekt die *bedingte* Wahrscheinlichkeit $P(F_2 \mid M)$ zu bestimmen, ist es überflüssig, zur Lösung von b) mit Familientypen zu argumentieren. Man hatte ja P(2. Kind M | 1. Kind M) und die dazu analogen Wahrscheinlichkeiten bei der Berechnung von $P(F_2)$ wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Geburten schon mit 0,5 angenommen.

Die Daten der von uns befragten *älteren* Kinder (Tab. 2) stützen die theoretischen Überlegungen. Die beobachteten Werte weichen sowohl bei den Teilstichproben der erstgeborenen Mädchen und Jungen als auch in der Gesamtstichprobe nur wenig vom Erwartungswert 8,5 bzw. 17 ab.

Stichprobe	a	b	c	d	$a + c$	$b + d$
ältere Kinder	10	7	10	7	20	14

Tab. 2: Verteilung der älteren Kinder auf die vier Familientypen

5.4 Verfeinerung des Modells

Wir lösen uns von der vereinfachenden und der Realität widersprechenden Annahme, dass Jungen- und

Mädchengeburten gleichwahrscheinlich seien. Es sei P(M) = p und P(J) = $q = 1 - p$. Wir bleiben zunächst bei der Annahme, dass das Geschlecht eines Kindes unabhängig von dem seiner älteren Geschwister sei. Dann müsste die intuitive Lösung aus 2 zu $P(F_2 \mid M) = p$ verallgemeinert werden.

Um dies auch theoretisch zu begründen, kann man wegen der Variablen nicht mehr eine Vierfeldertafel mit natürlichen Besetzungszahlen (wie in Abb. 3) verwenden, wohl aber ein gegenüber Abbildung 4 verallgemeinertes Baumdiagramm, in dem die Wahrscheinlichkeiten der ersten Stufe (Familientypen) von p und q abhängen, nicht aber die der zweiten (Abb. 6).

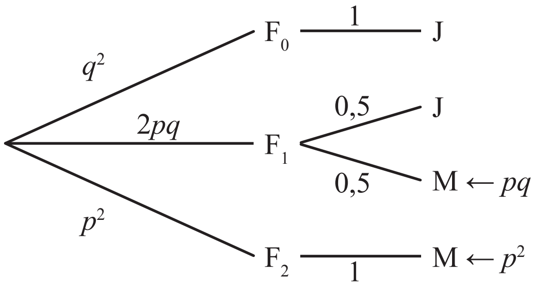

Abb. 6: Baumdiagramm im allgemeinen Fall

Mit der Bayes-Formel findet man wie vermutet:

$$P(F_2 \mid M) = \frac{P(F_2 \wedge M)}{P(M)} = \frac{p^2}{p \cdot (p+q)} = \frac{p^2}{p} = p\,.$$

Büchter und Henn (2007, S. 191 ff.) stellen anhand statistischer Daten fest, dass die realen Werte für p und q sich nur sehr wenig von 0,5 unterscheiden und daher „aktuell in Deutschland die Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit, also der Laplace-Ansatz, akzeptabel ist“.

Sie zeigen auch, dass unsere Annahme, dass die Ereignisse „Geschlecht 1. Kind“ und „Geschlecht 2. Kind“ stochastisch unabhängig seien, unhaltbar ist. Sie erklären dies etwas vage: „So sind z. B. biologische Faktoren, die der Unabhängigkeit entgegenstehen könnten, auch für einen Laien zumindest denkbar.“ Ein solcher Faktor, den man sogar empirisch unmittelbar belegen kann, ist das Auftreten eineiiger Zwillinge, die immer gleiches Geschlecht haben und die wir aus diesem Grunde bei der Auswertung ausgeschlossen haben (vgl. Frage 4 in Abb. 1). Hätten wir unsere Stichprobe erweitert um die beiden Paare eineiiger Zwillinge (2 Jungen und 2 Mädchen) sowie ein Mädchen, dessen Zwillingsschwester nicht Schülerin dieses Jahrgangs ist, wären die in Tabelle 3 dargestellten Abweichungen aufgetreten. Dabei wird das eher zufällig vorhandene Übergewicht der Familien des Typs T_1 noch verstärkt – nunmehr systematisch!

Stichprobe	*a*	*b*	*c*	*d*	*a + c*	*b + d*
Jg. 9 ohne Zwillinge	15	17	21	12	36	29
Jg. 9 mit Zwillingen	18	17	23	12	41	29

Tab. 3: Daten zur Abhängigkeit der Geschlechter

5.5 Eine andersartige Information

Eine weitere Variante behandelt Quak (1998, S. 221); bei ihm lautet die Information: „Wenigstens eines der Kinder ist ein Junge.“ (Passend zu unseren früher betrachteten Beispielen müsste es bei uns „wenigstens ein Mädchen“ heißen.) Im Unterschied zu den bisher betrachteten Problemen bezieht sich die Information nun nicht mehr auf ein *Individuum,* sondern auf den Typ der *Familie*.

Anders ausgedrückt: Bei den bisherigen Aufgaben lief die Lösung auf die Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit von Familientypen hinaus bei gegebenem Geschlecht eines Kindes der Familie. (Das Geschlecht des anderen Kindes ist dann durch den Familientyp festgelegt.) Diese Struktur kann man allerdings im Baumdiagramm (Abb. 6) nicht erkennen, da die Lösung auf indirektem Weg mit der Formel von Bayes bestimmt wird.

Bei der neuen Variante ist die Lage einfacher; hier wird zwar auch eine bedingte Wahrscheinlichkeit gesucht, nämlich $P(F_0 \mid F_0 \vee F_1)$, diese kann man aber direkt mithilfe von Abbildung 5 berechnen:

$$P(F_0 \mid F_0 \vee F_1) = \frac{P(F_0)}{P(F_0) + P(F_1)} = \frac{q^2}{q^2 + 2pq} = \frac{q}{q + 2p}.$$

Stellt man die Aufgabe – mehr unserem Kontext angepasst – für Mädchen statt Jungen, so gilt:

$$P(F_2 \mid F_1 \vee F_2) = \frac{P(F_2)}{P(F_1) + P(F_2)} = \frac{p^2}{2pq + p^2} = \frac{p}{2q + p}.$$

In beiden Fällen haben diese Terme den Wert ⅓, wenn man Gleichwahrscheinlichkeit von Jungen- und Mädchengeburten annimmt.

Unsere Daten sind hier nur im Fall „mindestens ein Mädchen“ überzeugend: Unter 44 derartigen Familien gibt es 15 mit zwei Töchtern, also fast genau das erwartete Drittel (Tab. 4).

Stichprobe	*a*	*b*	*c*	*d*	*a + b + d*	*b + c + d*
Jahrgang 9	15	17	21	12	44	50

Tab. 4: Daten zur Variante von Quak

Der Anteil von 21 Familien mit zwei Jungen unter 50 Familien mit mindestens einem Jungen liegt dagegen ziemlich genau in der Mitte zwischen ⅓ und ½. In diesem Fall ist also selbst der komplette Jahrgang als Datenbasis zu klein, um eine Tendenz zu einer der beiden Möglichkeiten zu erkennen.

6 Wo steckt der Zufall?

Büchter und Henn (2007, S. 187) betonen, dass in der Literatur Aufgaben zum Geschwisterproblem oft nur vage formuliert werden und die Bedeutung einer Floskel wie z. B. „*durch Zufall erfährt er*“ präzisiert werden müsse, damit eine eindeutige Lösung möglich wird. Andernfalls gebe es für die Aufgabe unterschiedliche Modellierungen je nach Interpretation von *zufällig*. Wegen der mit dieser Festlegung verbundenen Subjektivität könne man dann aber „niemals eine Modellierung als ‚richtig‘ oder ‚falsch‘ rechtfertigen“.

Büchter und Henn illustrieren dieses Problem an einer eigenen Aufgabe (2005, S. 302): „Armin hört, dass Beate zwei Kinder hat, kennt aber nicht deren Geschlecht. Zufällig erfährt er, dass eines der Kinder ein Mädchen ist. Wie groß ist die Chance, dass das zweite Kind auch ein Mädchen ist?“ Sie interpretieren die Information in ihrer *Modellierung 1* (2007, S. 186) im Sinne unserer Variante 5.5 („eines der Kinder“ soll also heißen „mindestens eines“). In *Modellierung 2* gibt die Formulierung „das zweite Kind“ Anlass für die Interpretation „das jüngere Kind“ (womit „eines der Kinder“ nun „das ältere“ meinen muss); diese Deutung entspricht unserer Variante 5.3.

Nimmt man nun beide genannten Interpretationen an („*mindestens* eines“ und „das *jüngere*“), dann entsteht sogar noch ein weiterer Aufgabentyp, bei dem sich $P(2.\ \text{Kind}\ M \mid F_1 \vee F_2) = ⅔$ ergibt.

Angesichts der für Schüler ohnehin schwierigen Thematik sollte man bei der Aufgabenstellung auf eine Vielfalt möglicher Interpretationen verzichten und eindeutige Formulierungen bevorzugen. Bei der hier diskutierten Aufgabe erreicht man das, wenn man im Text „mindestens“ ergänzt und „das zweite Kind“ durch „das andere Kind“ ersetzt.

Auf die für die Lösung der verschiedenen Typen von Aufgaben entscheidende Rolle des Zufalls gehen Götz und Humenberger (2008) ausführlich ein. So hängt die Lösung in 5.5 davon ab, ob die Information „mindestens ein Mädchen“ durch eine „implizite Lotterie“ zustande kommt oder durch direkte Befragung eines Wissenden („Gibt es ein Mädchen in der Familie?“).

Hilfreich ist auch ein vorsichtiger Umgang mit dem Begriff „zufällig“. So ist seine Verwendung in der Aufgabe in 1 („Zufällig treffen Sie ihn“) für die Beantwortung der gestellten Frage irrelevant; es ist auch nicht von Belang, dass er „zufällig eine Tochter dabei“ hat. (Wenn er zwei Töchter hat, ist dies nicht vom Zufall abhängig, und beim Treffen im Mädchengymnasium ist sogar der Familientyp egal.) Unbekannt – vom Zufall abhängig – ist hier das Geschlecht des anderen Kindes, von dem nur die Existenz bekannt ist.

7 Zurück zur intuitiven Lösung

Die letzte Feststellung im vorigen Abschnitt legt einen andersartigen Zugang nahe, mit dem man die meisten Aufgabentypen ganz elementar lösen kann; wenn dieser Ansatz – wie bei den Varianten 5.2 und 5.5 – nicht möglich ist, erkennt man das sofort und ist dann gezwungen, den Lösungsweg über die Familientypen zu nehmen.

Auf diesen Weg hat mich auch eine Bemerkung von Henze (2008, S. 113) gebracht: „Entscheidend ist, dass wir *zuerst* einen Jungen gesehen haben.“ [Er fragt dort nach $P(F_0 \mid J)$.] Allerdings macht er dies nicht zum Ausgangspunkt seiner Lösung, wie wir es im Folgenden tun. Der Einfachheit halber arbeiten wir dabei wieder mit $P(J) = P(M) = 0{,}5$ und gehen von Unabhängigkeit der Geschlechter bei den Geschwistern aus.

In der 1. Stufe des Baumdiagramms (Abb. 7) steht das Geschlecht des getroffenen Kindes, in der 2. Stufe das unbekannte Geschlecht des anderen. In dieser Stufe haben alle Wahrscheinlichkeiten – unabhängig von denen der ersten – aufgrund unserer Voraussetzungen den Wert 0,5. Dies gilt auch für $P(MM \mid M)$, die in der Ausgangsaufgabe gefragte Wahrscheinlichkeit. Diese kann man hier direkt ablesen (fett gezeichneter Zweig in Abb. 7).

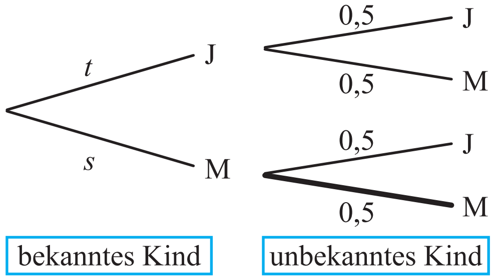

Abb. 7: Baumdiagram zum vereinfachten Ansatz

Wir haben damit für unsere intuitive Lösung aus Abschnitt 2 nun auch eine formale Darstellung gewonnen. Bei der Ausgangsaufgabe können wir $s = t = 0{,}5$

annehmen; dies ist aber für die Lösung bedeutungslos, da dort ja nach einer bedingten Wahrscheinlichkeit der 2. Stufe gefragt ist.

Die gleiche Modellierung wie in Abbildung 7 kann man auch für die Varianten 5.3 und (mit $s \approx 1$, $t \approx 0$) für 5.1 verwenden. Jedes Mal ist die Lösung durch die Wahrscheinlichkeit der 2. Stufe des untersten Pfades gegeben.

8 Schlussbemerkungen

Ein Hauptanliegen dieses Aufsatzes war es, einen Weg aufzuzeigen, auf dem man die verwirrende Situation des hier besprochenen oder auch anderer Paradoxa „in den Griff" bekommen kann, nämlich durch eine empirische Untersuchung oder – wenn dies nicht möglich ist – durch Simulation.

Es wäre reizvoll gewesen, auf die in Abschnitt 5.4 erwähnten Daten aus großen Stichproben zur Gleichwahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit näher einzugehen; dies hätte jedoch den Rahmen des Beitrags gesprengt. Eine solche Untersuchung ist aber einen gesonderten Aufsatz wert.

Danksagung

Für die freundliche Unterstützung durch nützliche Literaturhinweise und Zusendung von Materialien danke ich Frau Motzer sowie Herrn Henn und Herrn Meyer, ferner den beiden Gutachtern für eine Reihe von Verbesserungsvorschlägen. Ebenso bin ich den Kollegen meiner ehemaligen Schule zu Dank verpflichtet, besonders Peter Wilhelms, der mich zur vertieften Auseinandersetzung mit dem Paradoxon der beiden Kinder angeregt hat, und Siegfried Kampkötter, der zusammen mit Ulrike Schmidt-Hecht, Helmut Mittelstädt und Ingo Räuber die Schülerumfrage durchgeführt hat.

Literatur

Büchter, A.; Henn, H.-W. (2005): *Elementare Stochastik*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Büchter, A.; Henn, H.-W. (2007): Hat meine Schwester einen Bruder? Ein Beitrag zur mathematischen (Modell-)Bildung. In: Peter-Koop, A.; Bikner-Ahsbahs, A. (Hrsg.): *Mathematische Bildung – Mathematische Leistung.* Festschrift für Michael Neubrand. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Band 2. Stuttgart: Klett.

Götz, S.; Humenberger, H. (2008): Das Problem des anderen Kindes. In: *Der Mathematikunterricht* **54** (1), S. 50–60.

Griesel, H.; Postel, H.; Suhr, F. (Hrsg., 2007): *Elemente der Mathematik* Niedersachen 9. Schuljahr. Braunschweig: Schroedel.

Henze, N. ([7]2008): *Stochastik für Einsteiger.* Wiesbaden: Vieweg.

Martignon, L.; Krauss, S. (2007): Gezinkte und ungezinkte Würfel, Magnetplättchen, Wason-Kärtchen und Tinkercubes: Materialien für eine Grundschulstochastik zum Anfassen. In: *Stochastik in der Schule* **27** (3), S. 16–27.

Motzer, R. (2008): Zum Paradoxon der beiden Kinder. In: *Stochastik in der Schule* **28** (1), S. 3–5.

Quak, U. (Hrsg., 1998): *Die Fundgrube für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I.* Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Anschrift des Verfassers

Gerd Riehl
Obere Mark 6
30890 Barsinghausen
Elfriede.Riehl@t-online.de