Soll ich das Spiel wagen? Sinn und Unsinn des Erwartungswerts am Beispiel des Petersburger Problems

FRIEDRICH BARTH UND RUDOLF HALLER, MÜNCHEN

Zusammenfassung: *„Woher kommt diese Verschiedenheit zwischen dem, was die Rechnung ergibt, und dem, was der gesunde Menschenverstand sagt?“ fragt Laplace 1814 zu Recht. Denn mathematische Untersuchungen können zu Ergebnissen führen, die in der Praxis absurd erscheinen. Am Petersburger Problem, das in manchen Schulbüchern als kurioses Paradoxon höchstens am Rande abgetan wird, soll gezeigt werden, wie eine solche Diskussion über das Paradoxe von bedeutenden Mathematikern geführt wurde. Die sich daraus ergebenden Fragestellungen und Lösungsansätze werden vorgestellt. Dabei spielt auch die Interpretation des Erwartungswerts und der Vorstellung „auf lange Sicht“ eine Rolle. Die Einbeziehung subjektiver Aspekte bei der Beurteilung von Spielen im Unterricht kann dem Vorwurf der Realitätsferne des Mathematikunterrichts entgegenwirken. Fächerübergreifend werden wirtschaftswissenschaftliche, ethische, psychologische und historische Aspekte angesprochen. Die mathematisch schwierigeren Passagen mögen als Anregung für Facharbeiten und wissenschafts-propädeutische Seminare (Bayern) dienen.*

1 Fragen jenseits des Erwartungswerts

Bei der Überlegung, ob man ein Glücksspiel einerseits wagen bzw. andererseits anbieten soll, wird meist als entscheidendes Kriterium der Erwartungswert des Gewinns bzw. der Auszahlung betrachtet.

Ist der Erwartungswert des Gewinns (= Auszahlung – Einsatz) null, dann wird das Spiel üblicherweise für fair gehalten. Der Erwartungswert der Auszahlung wird in diesem mathematischen Modell als ein geeigneter Anhaltspunkt für einen vernünftigen Einsatz des Spielers angesehen.

Dabei werden einige für das wirkliche Leben wichtige Fragen an der Schule zu wenig berücksichtigt:

- Wie groß ist die Risikobereitschaft des Spielers?
- Wie wahrscheinlich ist ein Gewinn/Verlust überhaupt?
- Welche Rolle spielt das Vermögen des Spielers?
- Welche Rolle spielt das Vermögen des Anbieters/Bankhalters?
- Wie stark schmerzt ein Verlust?
- Wie groß ist die Freude über einen Gewinn?
- Wie lang, wie oft will bzw. kann man spielen?

Die Bedeutung dieser Fragen soll zunächst an einem einfachen Beispiel illustriert werden. Die Zufallsgröße Auszahlung A nehme die Werte a mit der Wahrscheinlichkeit $P_A(a)$ an.

Spiel 1:

a	0	10
$P_A(a)$	0,9	0,1

Spiel 2:

a	0	1 000 000
$P_A(a)$	0,999 999	0,000 001

Spiel 3:

a	0	1 000 000 000 000
$P_A(a)$	0,999 999 999 999	0,000 000 000 001

Bei jedem dieser Spiele ist der Erwartungswert $E(A)$ der Auszahlung gleich 1, also sollte der Einsatz für ein faires Spiel jedes Mal 1 sein. Das Risiko, das der Spieler eingeht, ist allerdings sehr unterschiedlich. Ein Maß für das Risiko könnte die Varianz der Zufallsgröße Auszahlung A sein. Gemäß $\mathrm{Var}(A) = E(A^2) - (E(A))^2$ erhält man

Spiel 1: $\mathrm{Var}(A) = 9$,

Spiel 2: $\mathrm{Var}(A) = 999999$,

Spiel 3: $\mathrm{Var}(A) = 999999999999$.

Bei Spiel 1 kann man mit 10 % Wahrscheinlichkeit einen, allerdings nicht allzu attraktiven Gewinn erzielen. Das ist etwas für sehr vorsichtige Spieler und im Grunde ziemlich langweilig.

Bei Spiel 2 kann man mit ein Millionstel Wahrscheinlichkeit einen attraktiven Gewinn erzielen, wird aber ziemlich sicher Verlust machen. Solche Spiele werden in der Praxis angeboten und gespielt. Dazu gehören Klassenlotterien und das Zahlenlotto.

Bei Spiel 3 hingegen kann man mit ein Billionstel Wahrscheinlichkeit einen unvorstellbar hohen Gewinn erzielen; der Verlust ist aber praktisch sicher. Dieses Spiel wird wohl kein vernünftiger Mensch spielen.

Eine wesentliche Rolle spielen sicher auch die Vermögen der Teilnehmer. Ist die Einheit 1 gleich 1 € oder 1000 € oder gar 1000000 €? Im letzten Fall wird man sich sogar Spiel 1 ernstlich überlegen. Hat man wenig Geld, dann wird auch ein kleiner Verlust schmerzlich sein. Ein Milliardär wird aber einen Verlust von 1000 € kaum bemerken. Umgekehrt ist für ihn ein Gewinn von 10 € oder sogar von 1000 € uninteressant, während ein „Normalbürger" sich vermutlich darüber freuen würde.

Kann der Anbieter den Gewinn überhaupt auszahlen? Bei Spiel 3 sicher nicht!

Der Erwartungswert ist erst auf „lange Sicht" wirksam. Weil der Erwartungswert der Wartezeit auf den ersten Treffer (mit Trefferwahrscheinlichkeit p) gleich $1/p$ ist, kann man bei Spiel 1 im Mittel nach 10 Spielen auf einen Gewinn hoffen, während Spiel 2 schon viel Geduld verlangt – man wartet im Mittel 1000000 Spiele. Einen Gewinn bei Spiel 3 wird man wohl nicht erleben.

2 Wie hat alles angefangen?

NIKOLAUS I BERNOULLI (1687–1759) schickt RÉMOND DE MONTMORT (1678–1719) am 9.9.1713 mehrere Probleme (Montmort 1713, Spiess 1975), darunter die folgenden, die wir sprachlich unserer Zeit anpassen.

Problem 4: Ein Bankhalter B verspricht einem Spieler S einen écu, wenn beim Würfeln mit einem Würfel beim ersten Wurf eine Sechs (= Treffer) fällt, zwei écus, wenn die erste Sechs beim zweiten Wurf fällt, usw., n écus, wenn die erste Sechs beim n-ten Wurf fällt. Welchen Einsatz muss S leisten, damit das Spiel fair ist?
Problem 5: Gleiche Frage wie bei Problem 4, aber statt 1, 2, 3, …, n, … écus sollen nun **a)** 1, 2, 4, 8, …, 2^{n-1}, … **b)** 1, 3, 9, 27, …, 3^{n-1}, … **c)** 1, 4, 9, 16, …, n^2, … écus ausgezahlt werden.

NIKOLAUS bemerkt dazu: *„Obwohl diese Probleme kaum Schwierigkeiten bieten, werden Sie dennoch darin etwas sehr Sonderbares finden."*

Um den fairen Einsatz zu finden, berechnet man jeweils den Erwartungswert der Auszahlung, wobei p die Trefferwahrscheinlichkeit ist.

Problem 4:

$$\begin{aligned} E(A) &= 1p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + \ldots + nq^{n-1}p + \ldots \\ &= p(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots) \\ &= p \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}(q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots) \\ &= p \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Also ist der faire Einsatz sechs écus, da $p = \frac{1}{6}$ ist. Die Wartezeit auf den ersten Treffer beträgt übrigens sechs Spiele.

Problem 5:

a) $E(A) = 1p + 2pq + 2^2q^2p + \ldots + 2^nq^np + \ldots$

$$\begin{aligned} &= p(1 + 2q + (2q)^2 + \ldots + (2q)^n + \ldots) \\ &= p \cdot \frac{1}{1-2q} = \frac{p}{2p-1} \quad \text{für } q < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

also für $p > \frac{1}{2}$. Für $p = \frac{1}{6}$ ist $q = \frac{5}{6} \geq \frac{1}{2}$, die Reihe divergiert; ihr Wert strebt gegen unendlich. NIKOLAUS I BERNOULLI schließt daraus, der faire Einsatz müsse unendlich groß sein. Da haben wir das *„Sonderbare"*!

b) Bei den Dreierpotenzen ergibt sich analog für $q < \frac{1}{3}$, also $p > \frac{2}{3}$: $E(A) = \frac{p}{1-3q} = \frac{p}{3p-2}$.

Für $p = \frac{1}{6}$ divergiert auch diese Reihe.

c) Bei den Quadratzahlen ergibt sich der Erwartungswert $E(A) = \frac{2-p}{p^2}$. Für $p = \frac{1}{6}$ erhält man 66 écus als fairen Einsatz. Die Berechnung von $E(A)$ ist hier etwas umständlicher, sie sei aber wenigstens angedeutet:

$$\begin{aligned} E(A) &= 1^2p + 2^2qp + 3^2q^2p + \ldots + (n+1)^2q^np + \ldots \\ &=: p \cdot Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q - qQ = 1^2 &+ (2^2 - 1^2)q + (3^2 - 2^2)q^2 + \ldots \\ &+ [(n+1)^2 - n^2]q^n + \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-q)(Q-qQ) = (1-q)^2Q &= \\ &= 2(1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots) - 1 \\ &= \frac{2}{1-q} - 1 = \frac{1+q}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1. \end{aligned}$$

Somit ist

$$Q = \frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{2-p}{p^3} \quad \text{und damit} \quad E(A) = \frac{2-p}{p^2}.$$

Eine andere Methode zur Bestimmung von Q ist, in Anlehnung an das Vorgehen bei Problem 4, die folgende.

$$
\begin{aligned}
Q &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - k) q^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} + q \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - k) q^{k-2} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}(q + q^2 + \ldots) + q \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2}(q^2 + q^3 + \ldots) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{q}{1-q}\right) + q \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}q^2}\left(\frac{q^2}{1-q}\right) = \frac{1+q}{(1-q)^3}
\end{aligned}
$$

3 Das Petersburger Problem

Gabriel Cramer (1704–1752) trifft 1727 Nikolaus I Bernoulli in Genf. Am 21.5.1728 schreibt er ihm aus London und vereinfacht den „sonderbaren Fall". Daniel I Bernoulli (1700–1782) veröffentlicht diesen Brief als Anhang zu seiner Lösung (Bernoulli, Daniel 1738) in den *Petersburger Commentarien*, was Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) 1768 veranlasst, Cramers Fassung *problême de Petersbourg* [sic!] zu taufen (d'Alembert 1768, S. 78).

Das Petersburger Problem: Ein Bankhalter B verspricht dem Spieler S einen écu, wenn beim Werfen einer Münze beim ersten Wurf Wappen [= Treffer] fällt, zwei écus, wenn Wappen erstmals beim zweiten Wurf fällt, vier écus, wenn Wappen erstmals beim dritten Wurf fällt, usw., 2^{n-1} écus, wenn Wappen erstmals beim n-ten Wurf fällt. Welchen Einsatz muss S leisten, damit das Spiel fair ist?

Als Erwartungswert der Auszahlung erhält Cramer

$$
\begin{aligned}
E(A) &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty
\end{aligned}
$$

Er schreibt dazu: *„Das Paradoxe besteht darin, dass die Rechnung für den Einsatz des S einen unendlich großen Wert liefert, was absurd erscheint, da kein halbwegs vernünftiger Mensch gewillt ist, 20 écus einzusetzen. […] Ich glaube, das kommt daher, dass die Mathematiker das Geld nur hinsichtlich seiner Menge schätzen, vernünftige Leute hingegen hinsichtlich seines Nutzens. Was die mathematische Erwartung unendlich macht, ist der ungeheuer große Betrag, den ich erhalte, wenn Wappen sehr spät, z. B. beim hundertsten oder tausendsten Wurf fällt. Aber diese Summe […] macht mir, wenn ich als vernünftiger Mensch urteile, nicht mehr Freude […], als wenn sie nur 10 oder 20 Millionen betrüge."*

Zur Lösung dieses Paradoxons erfindet er den Begriff der *espérance morale*, d. h. der *moralischen Erwartung*, auf den wir weiter unten noch eingehen.[1]

Einen gänzlich anderen Weg zur Lösung des Paradoxons bietet William Feller (1906–1970) in seinem Hauptwerk (Feller 1950), indem er den Begriff *fair* anders definiert und die Einsätze von Partie zu Partie variiert.

Wir fragen aber: Sind 20 écus wirklich ein vernünftiger Einsatz? Um eine Antwort darauf zu finden, stellen wir weitere Fragen.

4 Welche Wahrscheinlichkeiten kann man vernachlässigen?

Nikolaus I Bernoulli ist mit Cramers Auffassung und Lösung (s. u.) unzufrieden und schreibt ihm am 3.7.1728, der Verlust sei faktisch sicher, wenn die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen zu klein werde. Wir fragen: Ab welchem Wert soll man Wahrscheinlichkeiten faktisch als null betrachten?

Nikolaus schlägt als Grenzwahrscheinlichkeit $\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} = 3{,}125\ \%$ vor. Das führt ihn zu $1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + 16 \cdot 0 + 32 \cdot 0 + \ldots = 2$ als Erwartungswert für die Auszahlung. *„Der halbwegs vernünftige Mensch werde nur bereit sein, zwei écus einzusetzen."* Praktisch läuft Nikolausens Vorschlag darauf hinaus, das Spiel nach dem vierten Wurf abzubrechen.

Man könnte zu den zwei écus auch auf einem anderen Weg kommen: Im Mittel kommt wegen $p = ½$ das erste Wappen beim 2. Wurf, man hat also zwei écus

1 Der Terminus *moralisch* hatte zu jener Zeit eine gänzlich andere Bedeutung als heute. So definiert z. B. Jakob Bernoulli (1655–1705) in seiner *Ars Conjectandi* (S. 211): *»Moralisch gewiss ist, dessen Wahrscheinlichkeit der vollen Gewissheit nahezu gleichkommt, sodass ein Unterschied nicht festgestellt werden kann.«* Man kann also sagen, moralische Gewissheit ist diejenige Wahrscheinlichkeit, die man für groß genug hält, um im täglichen Leben und vor Gericht eine Entscheidung für vernünftig zu halten.

als Auszahlung zu erwarten. Dabei übersieht man allerdings, dass die Auszahlungen nach dem 2. Wurf immer stärker steigen!

Nach GEORGES LOUIS LE CLERC DE BUFFON (1707 bis 1788), der sich immer wieder mit dem Petersburger Problem beschäftigt,[2] ist die den Menschen am stärksten berührende Wahrscheinlichkeit die seines Todes. Aus den Sterbetafeln ergebe sich 1 : 10189 als Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein gesunder 56-Jähriger innerhalb der nächsten 24 Stunden sterben werde. Und da kein Mensch dieses Alters diese Furcht hege, seien alle Wahrscheinlichkeiten kleiner oder gleich 10^{-4} für null und nichtig zu halten (Buffon 1777, VIII). In Abschnitt XX meint er ohne jegliche Begründung sogar – wie wir sehen werden, weil es besser in sein Konzept passt –, dass ein Gesunder nicht einmal eine Todeswahrscheinlichkeit von 10^{-3} zu fürchten habe, d. h., dass man beim Petersburger Problem alle Wahrscheinlichkeiten ab dem 10. Term als null betrachten könne, als fairer Einsatz sich somit $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{2^i}\, 2^{i-1} = 5$ ergebe.

In neuerer Zeit machte EMILE BOREL (1871–1956) an Beispielen plausibel, mit welchen Wahrscheinlichkeiten man vernünftigerweise nicht mehr rechnen sollte (Borel 1937, Borel 1943):[3]

- Ein Mensch sollte 10^{-6} ($\approx 2^{-20}$) vernachlässigen.
- Auf der Erde überhaupt sollte man 10^{-15} ($\approx 2^{-50}$) vernachlässigen.
- Im gesamten Kosmos sind Ereignisse mit Wahrscheinlichkeiten unter 10^{-50} ($\approx 2^{-167}$) nicht zu erwarten.

Wendet man diese Grenzen auf das Petersburger Problem an und lässt bei der Berechnung der Erwartungswerte die Ereignisse mit kleineren Wahrscheinlichkeiten weg, dann ergeben sich der Reihe nach als Erwartungswerte für die Auszahlung und damit als Einsätze 9,5 bzw. 24,5 bzw. 83 écus.

5 Wie empfindet man Vermögenszuwächse?

CRAMER nimmt an, *„dass Beträge über 20 Millionen oder der Einfachheit halber über $2^{24} = 16\,777\,216$ écus alle [gefühlsmäßig] gleichwertig seien, d. h., dass ich stets 2^{24} écus erhalte, wie spät auch Wappen fällt.“* Also auch, wenn Wappen nach dem 24. Wurf zum ersten Mal fällt. *„Dann ist meine Hoffnung*

$$\begin{aligned} E(A) &= \left(1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{23} \cdot \frac{1}{2^{24}}\right) \\ &\quad + \left(2^{24} \cdot \frac{1}{2^{25}} + 2^{24} \cdot \frac{1}{2^{26}} + 2^{24} \cdot \frac{1}{2^{27}} + \ldots\right) \\ &= \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 12 + 1 = 13 \end{aligned}$$

So ist moralement parlant – [praktisch gesprochen] *– meine Erwartung auf 13 écus reduziert, also mein Einsatz ebenso.“*

NIKOLAUS I BERNOULLI schickt seinem in Petersburg lebenden Vetter DANIEL I BERNOULLI CRAMERs Problem am 27.8.1728. Dieser erkennt ebenso wenig wie MONTMORT das Sonderbare. Auf NIKOLAUSens Rüge hin erarbeitet er eine Lösung, in der er die Wirkung, die ein Gewinn oder Verlust auf einen Menschen hat, in Abhängigkeit von dessen Vermögen diskutiert. *„So wird z. B. einem Armen durch den gleichen Gewinn mehr gedient als einem Reichen.“* Er unterscheidet somit zwischen dem absoluten Wert und dem relativen Wert eines Gutes. Er gibt aber auch zu bedenken: *„Wer weniger Freude am Gewinn hat, der trägt auch einen Verlust ruhiger.“* Seine Gedanken trägt er 1731 in der Petersburger Akademie vor, die sie 1738 veröffentlicht (Bernoulli, Daniel 1738).

DANIEL lässt in seinem mathematischen Modell das vorhandene Vermögen x um $\mathrm{d}x$ wachsen; dadurch erfährt der subjektive Nutzen y, den jemand daraus zieht, einen Zuwachs $\mathrm{d}y$. Mit einer gewissen Willkür nimmt er nun an, dass der Zuwachs $\mathrm{d}y$ des Nutzens dem Vermögenszuwachs $\mathrm{d}x$ direkt proportional, dem vorhandenen Vermögen x aber indirekt proportional ist, dass also $\mathrm{d}y = k\,\frac{\mathrm{d}x}{x}$ gelte, was $y = k \ln(x) + C$ liefert. Falls kein Zuwachs erfolgt, entsteht auch kein Nutzen, das Vermögen behält also seinen ursprünglichen Wert x_0; d. h., $0 = k \cdot \ln(x_0) + C$, woraus $C = -k \ln x_0$ folgt, und damit $y = k \ln \frac{x}{x_0}$ gilt. Dabei ist $x_0 > 0$; denn man kann *„von niemandem sagen, er besitze gar nichts, außer er stürbe vor Hunger“*.

2 Er lernt das Problem kennen, als er 1730 CRAMER in Genf besucht. In seinem Brief vom 3.10.1730 an CRAMER nimmt er die Gedanken DANIEL I BERNOULLIs über den Wert des Geldes gewissermaßen vorweg. Zusammengefasst hat BUFFON seine Überlegungen um 1760 in seinem erst 1777 erschienenen *Essai d'Arithmétique morale*.

3 In einer Millionenstadt wie Paris erleidet pro Tag mindestens ein Bewohner einen schwerwiegenden oder gar tödlichen Unfall. Dennoch vernachlässigt jedermann diese Wahrscheinlichkeit von 10^{-6} und verlässt das Haus. Handelt es sich dagegen um eine Lotterie, nimmt er daran teil, obwohl die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen oft weniger als 10^{-6} beträgt. Für die zweite Abschätzung legt er die damalige Weltbevölkerung zugrunde. Die Begründung des dritten Werts ist kaum nachvollziehbar. – Ähnliche Überlegungen findet man auch bei ALEXANDER KITAIGORODSKI (1972).

Entsteht mit der Wahrscheinlichkeit p_i ein Nutzen y_i und damit ein neuer Vermögensstand x_i, dann ist das mit ihren Wahrscheinlichkeiten p_i (mit $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$) gewichtete Mittel aller Nutzen y_i gleich[4]

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i\, p_i = k \sum_{i=1}^{\infty} p_i \ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right) = k \sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)^{p_i}$$

$$= k \ln\left(\prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x_i}{x_0}\right)^{p_i}\right).$$

Das ergibt einen neuen Vermögensstand x, für den gilt:

$$k \cdot \ln \frac{x}{x_0} = k \cdot \ln\left(\prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x_i}{x_0}\right)^{p_i}\right)$$

oder

$$\frac{x}{x_0} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x_i}{x_0}\right)^{p_i} = \prod_{i=1}^{\infty} x_i^{p_i} \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x_0}\right)^{p_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} x_i^{p_i} \cdot \left(\frac{1}{x_0}\right)^{\sum_{i=1}^{\infty} p_i} = \frac{1}{x_0} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} x_i^{p_i}.$$

Sei das Vermögen durch den Zuwachs z_i von x_0 auf x_i angewachsen, ist also $x_i = x_0 + z_i$, dann lässt sich x schreiben als $x = \prod_{i=1}^{\infty} (x_0 + z_i)^{p_i}$.

Die Differenz aus x und dem Anfangsvermögen x_0, also $H(x_0) := x - x_0$, ist die mittlere Gewinnhoffnung, die Cramer und später vor allem Laplace *espérance morale* nennen.

Beim Petersburger Problem ist der Zuwachs z_i die Auszahlung 2^{i-1}, die S mit der Wahrscheinlichkeit $p_i = 2^{-i}$ erhält. Für seine mittlere Gewinnhoffnung ergibt sich damit

$$H(x_0) = \prod_{i=1}^{\infty} (x_0 + 2^{i-1})^{\frac{1}{2^i}} - x_0$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} \sqrt[2^i]{x_0 + 2^{i-1}} - x_0.$$

Daniel I Bernoulli gibt dann ohne Beweis die folgenden Werte an:[5]

$$H(0) = \sqrt{1} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{4} \cdot \sqrt[16]{8} \cdot \ldots = 2,$$

$$H(10) = \sqrt{11} \cdot \sqrt[4]{12} \cdot \sqrt[8]{14} \cdot \sqrt[16]{18} \cdot \ldots - 10 \approx 3,$$

$$H(100) = \sqrt{101} \cdot \sqrt[4]{102} \cdot \sqrt[8]{104} \cdot \sqrt[16]{108} \cdot \ldots - 100 \approx 4\tfrac{1}{3}$$

und

$$H(1000) = \sqrt{1001} \cdot \sqrt[4]{1002} \cdot \sqrt[8]{1004} \cdot \ldots - 1000 \approx 6.$$

Die nötigen Einsätze steigen moderat mit dem Anfangsvermögen des S, bleiben aber endlich, wie Daniel I Bernoulli bemerkt.

Nikolaus, der 1731 den Lehrstuhl für Codex und Lehensrecht in Basel erhalten hat, schreibt am 5.4.1732 an Daniel, er habe die Arbeit mit Vergnügen gelesen und finde sie geistreich, aber sie löse den Kern des Problems nicht. Es gehe nicht darum, den Nutzen oder das Vergnügen zu messen, das man von einem Gewinn habe, noch den Kummer, den der Verlust bereite; es handelt sich allein darum herauszufinden, wie viel ein Spieler rechtlich oder nach Billigkeit geben müsse für den Vorteil, den ihm das besagte Spiel bietet, oder allgemein alle Arten von Spielen, wenn sie fair sein sollen. Das ist der Fall, wenn beide Parteien unter gleichen Bedingungen die gleiche Summe einsetzen, was nach Daniels Theorie nicht zutreffe, da das Vergnügen den Kummer nicht ausgleiche. – Der juristische Standpunkt der mathematischen Fairness bei Nikolaus I Bernoulli steht die Vorstellung des wirtschaftlich vernünftig Denkenden bei Cramer und Daniel I Bernoulli gegenüber.

6 Welche Rolle spielt das Vermögen des Bankhalters?

Mit einem gänzlich neuen Gedanken belebt Alexis Fontaine des Bertins (1704–1771) die Diskussion um das Petersburger Problem. Statt kleine Wahrscheinlichkeiten oder Vorstellungen über den Wert des Geldes zu betrachten, überlegt er ganz praktisch, dass die Menge des Geldes, die der Bankhalter B und der Spieler S zur Verfügung haben, das Spiel entscheiden. Er ändert daher die Spielregel ab (Fontaine 1764).

B hat das Vermögen b, S setzt s ein. Damit kann B seiner Verpflichtung nur bis zum n-ten Wurf nachkommen. Fällt Wappen beim i-ten Wurf ($i \leq n$), dann erhält S 2^{i-1} écus und B behält den Rest aus dem Einsatz $b + s$. Fällt n-mal Zahl, dann erhält S den gesamten Einsatz $b + s$. Welcher Einsatz s macht das Spiel fair?

4 Daniel I Bernoulli rechnet zunächst mit einer endlichen Anzahl von Nutzen, bildet also eine endliche Summe. Erst bei der Anwendung auf das Petersburger Problem wird daraus eine unendliche Reihe.

5 Daniel lässt jetzt zu, dass der Spieler *»gar nichts besitzt«*; der Ausdruck $H(x_0)$ ist ja auch für $x_0 = 0$ definiert. Den nicht einfachen Beweis, dass $H(0) = 2$ ist, findet man in Bernoulli, Daniel (1738) – Deutsche Übersetzung. Die anderen Werte lassen sich z. B. mit einem programmierbaren Taschenrechner ermitteln.

FONTAINE leitet ohne Beweis verschiedene Beziehungen zwischen n, b und s her, die unschwer zu finden sind.

- Man kann nur spielen, wenn Geld da ist:

  $2^{n-1} \leq b + s < 2^n$.

- Der Erwartungswert des Gewinns von S muss null sein:

  $E(Gewinn\ von\ \mathrm{S}) =$

  $$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}(2^{i-1} - s) + \frac{1}{2^n}[(b+s) - s]$$

  $$= \frac{1}{2}n - s\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n}b = 0,$$

  woraus folgt, dass

  $$s = \frac{2^{n-1} \cdot n + b}{2^n - 1}.$$

Durch Einsetzen und Umformen erhält man daraus die Beziehungen

- $\dfrac{2^n - n - 1}{2} \leq b < \dfrac{2^{n+1} - n - 2}{2}$

  bzw.

- $2s - 2 < n \leq 2s - 1$.

FONTAINE zeigt an Beispielen, wie man die fehlenden Werte von n, b oder s ausrechnen kann, wenn einer der drei Werte bekannt ist. Das erste der folgenden Beispiele stammt von ihm, die beiden anderen von uns.

Aus $s = 10$ folgt $n = 19$ und $b = 262\,134$.

Aus $n = 10$ folgt $s = 5{,}5$ und $b = 506{,}5$.

Aus $b = 10$ folgt $n = 4$ und $s = 2{,}8$.

Interessant ist, was sich nach FONTAINE für $s = 20$ ergibt, was ja nach CRAMER kein vernünftiger Mensch einsetzen würde. Man erhält $n = 39$ und $b = 549\,755\,813\,888$. Nur 39 Würfe lang wird gespielt, dafür müsste der Bankhalter aber fast ein Billionär sein!

BUFFON bemerkt, dass die Geldmenge dieser Welt begrenzt sei. Wenn Wappen erst nach dem 29. Wurf fällt, sei mit $2^{29} = 536\,870\,912$ écus ein Betrag erreicht, der *„vermutlich im ganzen Königreich Frankreich nicht aufzutreiben wäre"*, und wenn Wappen erst beim 40. Wurf fällt, bräuchte man 1024 Länder, die so reich wie Frankreich sind.[6] Bis zum 40. Wurf muss S aber erst 20 écus einsetzen. Also, so schließt BUFFON, ist ein höherer Einsatz auf keinen Fall gerechtfertigt (Buffon 1777, XVII).

D'ALEMBERT hält FONTAINEs Lösung, so geistreich und einfach sie auch sei, für unzulänglich. Denn bei einem Vermögen des Bankhalters von 2^{99} écus müsse S einen Einsatz von 50,5 écus leisten, den er für viel zu hoch halte, da S einen Gewinn erst dann erzielen könne, wenn beim siebten Wurf Wappen erscheine. Die Wahrscheinlichkeit dafür sei aber mit $\frac{1}{128}$ zu gering. Außerdem müsse man auch das Vermögen des Spielers berücksichtigen; denn der Einsatz könne ja ein erhebliches Loch in dessen Vermögen reißen (d'Alembert 1761)[7].

Kommt der Einsatz nämlich in die Größenordnung seines Vermögens, wird der Spieler vernünftigerweise das Spiel nicht wagen, weil er seinen Ruin riskiert. Dabei spielt allerdings noch eine entscheidende Rolle, welche Einstellung der Spieler zum Geld hat bzw. welche Bedeutung für ihn die Lust am Spiel hat (Spielsucht!). Diese Fragen entziehen sich aber einer mathematischen Betrachtung.

7 Kann man Auszahlung und Einsatz an die Erfahrung anpassen?

D'ALEMBERT schlägt 1761 vor zu experimentieren und das Spiel genügend oft wirklich zu spielen, um festzustellen, welche mittleren Auszahlungen sich ergeben. Aus praktischen Gründen muss man dabei aber die Anzahl der Spiele begrenzen. Einige Tausend Spiele sollten realistische Werte liefern.

BUFFON ließ ein Kind 2048-mal spielen und bestimmte damit die mittlere Auszahlung experimentell (Buffon 1777, XVIII). AUGUSTUS DE MORGAN (1806–1871) ließ dieses Experiment von drei Personen wiederholen. Er interessierte sich aber nur für die Verteilung von Wappen und Zahl, nicht für die Problematik des Petersburger Problems (De Morgan 1872).

BUFFON schließt aus seinem Experiment: Bei den $2^{11} = 2048$ Spielen hat S eine Auszahlung von 10057 écus erhalten, sein gerechter Einsatz pro Spiel beträgt also 4,91 écus. Diesen Wert liefert in etwa auch die theoretische Verteilung.

6 $2^{40} \approx 1{,}1$ Billion écus waren auf Grund ihres Feingehalts von 23,73 g Silber am 20.7.2009 7,8 Billionen € ≈ 11,1 Billionen \$ wert – ca. 1,7 Billionen € betrug die Staatsverschuldung Deutschlands an diesem Tag, die der USA rund 11 Billionen \$.

7 FONTAINE hatte D'ALEMBERT gesprächsweise seine Gedanken mitgeteilt.

Bei der theoretischen Verteilung gehen wir davon aus, dass nach 2^N Spielen abgebrochen wird. Unter diesen 2^N Spielen ist eines, bei dem 2^N-mal Zahl erscheint. Für diesen Fall muss eine eigene Verabredung getroffen werden. In der letzten Spalte sind wir davon ausgegangen, dass dieses Spiel ignoriert wird, die Auszahlung also 0 ist, wie in der zweiten Spalte eingetragen. Die totale Auszahlung ist dann $\frac{N}{2}(2^N - 1) + 0$, die Auszahlung pro gewertetem Spiel also $\dfrac{\frac{N}{2}(2^N - 1) + 0}{2^N - 1} = \dfrac{N}{2}$.

Bricht man ab, wenn 2^{11}-mal kein Wappen gefallen ist, und zahlt den Einsatz zurück, dann muss man die Ausreißer bei den Probanden DE MORGANs weglassen und erhält für die Auszahlung pro gewertetem Spiel

bei (1) 12278/2046 = 6 écus und

bei (2) 10779/2046 = 5,27 écus.

BUFFONs Folgerung, 5 écus sind offenbar ein vernünftiger Einsatz, bestätigt sich auch hier.

Sollen diese fünf écus ein fairer Einsatz beim Petersburger Problem sein und soll auch die Wurfzahl nicht begrenzt werden, dann muss die Auszahlungsregel geändert werden. BUFFON schlägt vor, dass die Auszahlungen zwar weiterhin in geometrischer Folge, beginnend mit 1, steigen, der Faktor 2 aber auf q verringert werde. Mit dem Einsatz E ist $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} q^{i-1} = E$ die Bedingung für ein faires Spiel, woraus sich $q = 2 - \frac{1}{E}$ ergibt. $E = 5$ liefert $q = \frac{9}{5}$. S erhält also der Reihe nach nicht 1, 2, 4, 8, … écus, sondern $1, \frac{9}{5}, \frac{81}{25}, \frac{729}{125}, \ldots$ écus ausbezahlt. Für $E = \infty$ landet man wieder beim klassischen Petersburger Problem.

BUFFON schließt aus seinen Werten, dass der zu leistende Einsatz von der Anzahl der Spiele abhängt. Waren es bei 1024 Spielen noch nahezu 5 écus, so

Wurffolge[8]	Auszahlung an S	theoretische Verteilung bei 2048 Spielen[9]	BUFFONs Kind	DE MORGAN (1)	DE MORGAN (2)	DE MORGAN (3)	theoretische Verteilung bei 2^N Spielen
W	1	1024	1061	1048	1017	1039	$2^N \cdot 2^{-1} = 2^{N-1}$
ZW	2	512	494	507	547	480	$2^N \cdot 2^{-2} = 2^{N-2}$
Z^2W	4	256	232	248	235	267	$2^N \cdot 2^{-3} = 2^{N-3}$
Z^3W	8	128	137	99	118	126	$2^N \cdot 2^{-4} = 2^{N-4}$
Z^4W	16	64	56	71	72	67	$2^N \cdot 2^{-5} = 2^{N-5}$
Z^5W	32	32	29	38	32	33	$2^N \cdot 2^{-6} = 2^{N-6}$
Z^6W	64	16	25	17	10	19	$2^N \cdot 2^{-7} = 2^{N-7}$
Z^7W	128	8	8	9	9	10	$2^N \cdot 2^{-8} = 2^{N-8}$
Z^8W	256	4	6	5	3	3	$2^N \cdot 2^{-9} = 2^{N-9}$
Z^9W	512	2		3	2	4	$2^N \cdot 2^{-10} = 2^{N-10}$
$Z^{10}W$	1024	1		1	1		$2^N \cdot 2^{-11} = 2^{N-11}$
$Z^{11}W$	2048	…		0	1		…
$Z^{12}W$	4096	…		0	0		…
$Z^{13}W$	8192	…		1	0		…
$Z^{14}W$	16384	…		0	0		…
$Z^{15}W$	32768	…		1	1		…
…	…	…					…
$Z^{2^N-1}W$	…	…					$2^N \cdot 2^{-N} = 1$
Z^{2^N}	0						$2^N \cdot 2^{-N} = 1$
totale Auszahlung		11264	10057	53238	45595	11515	$\frac{N}{2} \cdot (2^N - 1)$
Auszahlung pro gewertetem Spiel		5,5	4,91	26,0	22,26	5,62	$\frac{N}{2}$

8 Z^iW bedeute, dass Wappen zum ersten Mal beim $(i + 1)$-ten Wurf gefallen ist. Die Spieldauer ist dann $i + 1$ mit $0 \le i \le 2^N - 1$.

9 In dieser Spalte ist angegeben, wie viele von den 2048 Spielen beim $(i + 1)$-ten Wurf enden.

sind es bei 512 Spielen nur mehr ca. 4½ écus und bei 256 Spielen nicht mehr als 4 écus, was daran liegt, dass die eigentlich noch zu spielenden Spiele einen immer größeren Anteil gewinnen. Wenn man umgekehrt 1048576 = 2^{20} Spiele spielt, dann ist der Einsatz 10 écus.

8 Welche Auszahlungen kann man überhaupt erleben?

BUFFON bemerkt dazu, dass man auch die begrenzte Lebensdauer des Menschen berücksichtigen müsse. Man wird nämlich erkennen, dass man 1048576 Spiele gar nicht spielen kann. Setzt man nämlich zwei Minuten pro Spiel an, so müsste man, wenn man täglich sechs Stunden spielte, mehr als 15,96 Jahre damit zubringen, was praktisch nicht zu vertreten ist (Buffon 1777, XVIII). – Lassen wir einen Menschen 70 Jahre lang auf diese Weise spielen, dann hat er am Ende etwa 4,6 Millionen Spiele hinter sich gebracht. Dabei ist als längstes Spiel ein Spiel mit 22-mal Zahl vor dem ersten Wappen zu erwarten. Man kann also getrost 2^{-23} und noch kleinere Wahrscheinlichkeiten vernachlässigen. Ein Einsatz von mehr als 11 écus ist demnach nicht sehr sinnvoll.

9 Schlussbemerkung

Das Petersburger Problem hat noch viele weitere Mathematiker zu Überlegungen angeregt. Unter den Großen seien nur genannt EULER, CONDORCET und POISSON, aber auch deren Beiträge variieren nur die oben vorgebrachten Gedanken. LAPLACE wiederholt 1814 in seiner *Théorie Analytique des Probabilités* die Arbeit DANIEL BERNOULLIs, ergänzt sie aber um Beweise, die bei diesem fehlen. In der 2. Hälfte des 19. Jh.s fanden die Vorstellungen DANIEL BERNOULLIs unter dem Namen *Grenznutzentheorie* Eingang in die Nationalökonomie. GERD GIGERENZER schreibt dazu 2004: *„Mit dieser Lösung transformierte Daniel Bernoulli das Konzept des erwarteten Werts von Pascal-Fermat in das Konzept des erwarteten Nutzens, das auch heute noch die Wirtschaftswissenschaften dominiert.“* GUSTAV THEODOR FECHNER (1801–1887) sah in DANIEL BERNOULLIs Formel einen Sonderfall des heute nach ihm und ERNST HEINRICH WEBER (1795–1878) benannten physiologischen Gesetzes, nach dem die subjektive Empfindung proportional zum Logarithmus der objektiven Intensität eines Reizes ist.

Literatur

D'ALEMBERT, JEAN LE ROND (1761): Dixiéme [sic!] Mémoire. Réfléxions sur le Calcul des Probabilités. In: *Opuscules Mathématiques. Tome second.* Paris: David.

D'ALEMBERT, JEAN LE ROND (1768): Vingt-trois^me Mémoire. Extraits des plusieurs Lettres de l'Auteur sur différens sujets, écrites dans le courant de l'année 1767. In: *Opuscules Mathématiques.* Tome quatriéme [sic!]. Paris: Briasson.

BERNOULLI, DANIEL (1738): Specimen theoriae novae de mensura sortis. In: *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae.* Tomus V. Ad annos MDCCXXX et MDCCXXXI. Petropoli: Typis Academiae, *(»Petersburger Commentarien«)* S. 175–192 – Deutsche Übersetzung: *Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen.* Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Erläuterungen versehen von Professor Dr. Alfred Pringsheim. Mit einer Einleitung von Dr. Ludwig Fick. Leipzig: Verlag von Duncker & Humblot.

BOREL, EMILE (1937): Les Probabilités. In: *Encyclopédie Française.* Tome I. Paris: Société de Gestion de l' Encyclopédie Française.

BOREL, EMILE (1943): Les Probabilités et la Vie. Paris: Presses universitaires de France.

BUFFON, GEORGES LOUIS LE CLERC DE (1777): Essai d'Arithmétique morale. In: *Histoire naturelle, générale et particulière,* Supplément 4. Paris: Imprimérie Royale.

DE MORGAN, AUGUSTUS (1872): A Budget of Paradoxes. *(Reprinted, with the author's additions, from the „Athenæeum").* London: Longmans, Green, and Co.

DUTKA, JACQUES (1988): On the St. Petersburg Paradox. In: *Archive for History of Exact Sciences* **39**, S. 13–39. Berlin – Heidelberg – New York.

FELLER, WILLIAM (1950): An Introduction to Probability Theory and its Applications. Band 1, New York: John Wiley.

FONTAINE DES BERTINS, ALEXIS (1764): Solution d'un Problème sur les Jeux de Hasard. In: *Mémoires donnés à l'Académie Royale des Sciences, non imprimés dans leur temps. Par M. Fontaine, de cette Académie.* Paris: Imprimérie Royale.

Gigerenzer, Gerd (2004): Die Evolution des statistischen Denkens. In: *Stochastik in der Schule,* **24**, Heft 2.

Kitaigorodski, Alexander (1972): А. Китайгородский: Невероятно – не Факт. Издательство „Молодая гвардия“, Москва 1972 г. – Deutsche Übersetzung: Unwahrscheinliches – möglich oder unmöglich? Moskau: MIR, Leipzig: VEB Fachbuchverlag, Lizenzausgabe für den Aulis Verlag Deubner & Co KG, 1975.

Laplace, Pierre Simon de (1814): Essai philosophique sur les Probabilités. Paris: M[me] V[e] Courcier. – Deutsche Übersetzung: P. S. de Laplace (1814): Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit. Herausgegeben von R. v. Mises. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Leipzig: Akademische Verlagsanstalt m. b. H., 1932 [Der Übersetzung wurde die 5. Auflage des *Essai* von 1825 zugrundegelegt].

Montmort, Pierre Rémond de (1713) [anonym]: Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard. Seconde Edition. Revûe et augmentée des plusieurs Lettres. Paris: Jacque Quillau.

Spiess, Otto (1975): Zur Vorgeschichte des Petersburger Problems. In: *Die Werke von Jakob Bernoulli.* Herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Band 3, S. 557–567, Basel: Birkhäuser.

Anschrift der Verfasser

Friedrich Barth
Abbachstraße 23
80333 München
e.f.barth@t-online.de

Rudolf Haller
Nederlinger Straße 32a
80638 München
rudolf.haller@arcor.de