Buffons Münzenproblem und darüber hinaus[1]

KADY SCHNEITER, LOGAN, UT, USA

[1] Original ‚Buffon's Coin Problem and Beyond' in *Teaching Statistics* 33 (2011) 2, 34–37.
Übersetzung und Bearbeitung:
MANFRED BOROVCNIK, KLAGENFURT

Zusammenfassung: *Dieser Beitrag beschreibt eine Untersuchung zum Buffonschen Münzenproblem. Die Behandlung im Unterricht wird durch ein Applet unterstützt. Das Problem ist auf unterschiedlichem Niveau angesiedelt und befasst sich mit geometrischer Wahrscheinlichkeit. Die mathematischen Ergänzungen zur Simulation verbinden Stochastik und Geometrie.*

1 Einleitung

Georges Louis Leclerc, geboren 1707 in einer kleinen Stadt im Burgund wurde 1773 zum Comte de Buffon ernannt. Er ist eigentlich als Naturforscher mit breiten Interessen bekannt, hat aber einige wichtige Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung geleistet. Er war einer der ersten, die Wahrscheinlichkeit empirisch gemessen (statt kombinatorisch durch Abzählen bestimmt) haben.

Er ist berühmt für das Nadelproblem, das nach ihm benannt worden ist. In einer Ebene sind parallele Geraden im gleichen Abstand zueinander eingezeichnet. Auf diese Ebene wird eine Nadel bestimmter Länge zufällig geworfen und die Frage ist, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine der Geraden kreuzt.

Buffon untersuchte auch verwandte Probleme wie das der Münzen, die zufällig auf ein regelmäßiges quadratisches Gitter der Ebene geworfen werden. Dies ist viel leichter zu lösen als das Nadelproblem. Der Durchmesser der Münze betrage d und die Länge der Seiten der Quadrate, in welche die Ebene durch das Gitter unterteilt ist, sei s; wir unterstellen vorerst $d \leq s$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze ganz innerhalb eines Quadrats landet, also keine der Geraden des Gitters schneidet. (siehe Abb. 1). Das Problem ist auch als Buffonsches Münzenproblem bekannt.

Es ist eine reizvolle Frage, weil sie herausfordernd ist und zudem auf unterschiedlichsten Niveaus behandelt werden kann. Sie kann auch als Aufhänger dienen, ähnliche Probleme zu untersuchen, und sie verbindet Geometrie und Stochastik. Eine Simulation des Münzenproblems kann real mit Münzen auf ein kariertes Papier oder mit runden Deckeln aus Pappe auf einen Boden mit quadratischen Fliesen durchgeführt werden.

Hier wird die Methode der Simulation auf dem Computer weiter verfolgt, weil sie so einfach zu bewerkstelligen ist. Man kann das Experiment rasch sehr oft wiederholen und die Häufigkeiten des interessierenden Schneidens bestimmen und damit die unbekannte Wahrscheinlichkeit schätzen.

2 Die Lösung

Motiviert durch die reale Simulation, werfen wir dann auch virtuell Münzen auf ein kariertes Papier und bestimmen den Erfolg (Münze schneidet eine Gerade) bzw. die Häufigkeit des Erfolges in vielen Experimenten. Die Simulation auf dem Computer kann etwa auf einem Applet wie Schneiter (o. D.) erfolgen; dabei werden die Ergebnisse von mehreren Versuchen simultan angezeigt (siehe die Kreise in Abb. 2). Dadurch ergeben sich Muster der günstigen und ungünstigen Teilmengen der Ebene bzw. eines Quadrats.

Diese Muster regen zielgerichtetes Denken über das Problem an. Das Zentrum der Münze, so wie sie gelandet ist, wird durch einen blauen Punkt (dunkel) markiert, wenn die Münze innerhalb des Quadrats landet, und durch einen orangen Punkt (hell), wenn sie die Seiten der Quadrate schneidet. Das Programm speichert die Punkte eines Szenarios und zeigt damit ein Muster (hell-dunkel).

Obwohl allein das Muster der Ergebnisse schon die Lösung andeutet, geht es eigentlich um den Trick, den Mittelpunkt der Münze so auszuzeichnen und die Überlegungen daran anzuknüpfen. Den Mittelpunkt und nicht den Durchmesser der Münze! Benutzt man die Option „zeig den Mittelpunkt an", sehen wir an der Farbe auch das Ergebnis, ob die Münze schneidet (dunkel; blau) oder nicht (hell; orange).

Wir benennen die Region, wo die Münze ganz innerhalb eines Quadrats landet, als „sichere" Zone. Abb. 3 zeigt alle Ergebnisse (Mittelpunkte) der letzten Serie von 20,000 Versuchen. Die sicheren Zonen sind alle dunkel (weil jetzt viele Punkte dort gelandet sind und dunkel markiert wurden), die übrigen Zonen sind hell (diese Mittelpunkte wurden hell markiert). Es ist schön zu sehen, dass die sicheren Zonen kleinere Quadrate innerhalb der großen Quadrate sind.

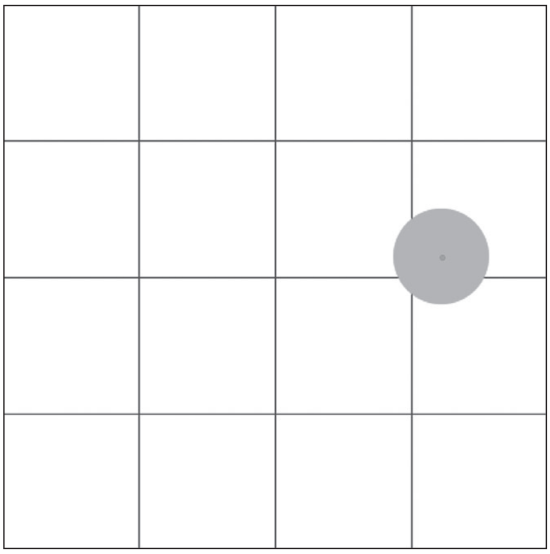

Abb. 1: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig auf ein quadratisches Gitternetz geworfene Münze eine Linie kreuzt

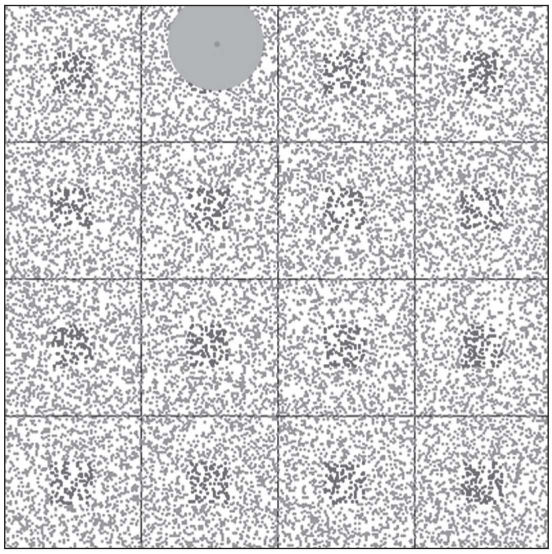

Abb. 3: Das Applet zeigt den Mittelpunkt der Münzen (20,000 Versuche) – Würfe sind hell markiert, wenn sie Linien kreuzen, und dunkel, wenn sie nicht kreuzen

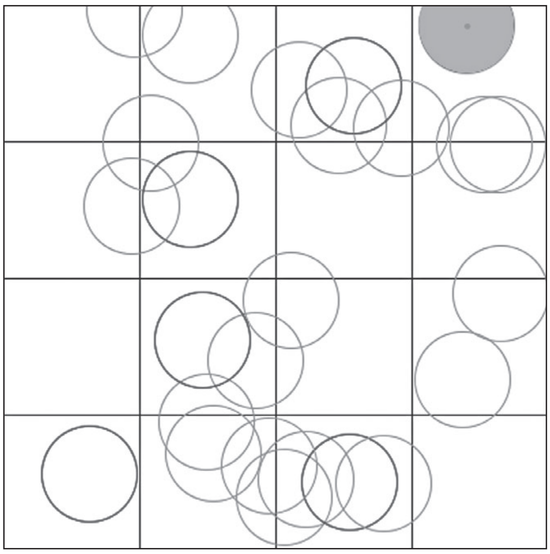

Abb. 2: Das Applet zeigt, wo die Münzen gelandet sind (25 Versuche)

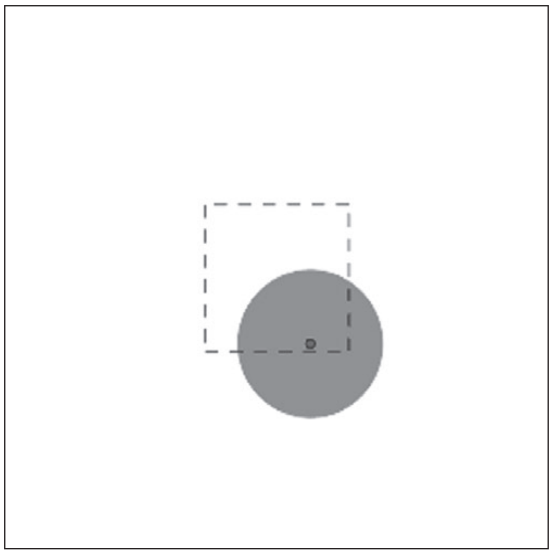

Abb. 4: Die Münze kreuzt keine Linie, wenn ihr Mittelpunkt in der markierten „sicheren“ Zone landet

Eine Münze mit Durchmesser d landet vollständig innerhalb eines Quadrats mit Seitenlänge s, wenn ihr Mittelpunkt innerhalb eines – symmetrisch liegenden – kleineren Quadrats mit Seitenlänge $s - d$ liegt (siehe Abb. 4). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich dem Quotienten der beiden Flächen:

$$P(\text{Erfolg}) = \frac{(s-d)^2}{s^2}.$$

Das Applet erlaubt, die Größe des Gitters zu ändern; damit können die Studierenden spezielle Fälle durchprobieren und eine allgemeine Lösung vorbereiten. Die empirischen Häufigkeiten, welche die Wahrscheinlichkeit schätzen, können dann mit der theoretischen Lösung verglichen werden.

3 Jenseits von Buffon

Solche Untersuchungen im Münzenproblem regen das Denken an; natürlich gibt es eine Reihe weiterer Variationen. Indem man die Studierenden anregt, die Aufgabe zu erweitern, erhalten sie die Gelegenheit, Vermutungen auszusprechen und Tests zu entwerfen, mit denen sie diese Vermutungen überprüfen können. Eine Reihe von Fragen ergeben sich daraus, wenn man die Gestalt des Netzes, mit dem die Ebene überdeckt ist, ändert. Was passiert, wenn die Ebene in Dreiecke oder in Rechtecke geteilt ist? Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass man die Begrenzungslinien trifft oder innerhalb der Figuren bleibt?

Die Lösung dieser Fragen führt entlang derselben Ansätze wie im ursprünglichen Problem. Man kann die sichere Zone identifizieren, indem man die Punkte eines größeren Simulationslaufs entsprechend markiert, sodass sie visuell hervortreten. In allen Fällen ist die sichere Zone geometrisch ähnlich zur Figur, mit der die Ebene überdeckt ist. Die Wahrscheinlichkeit schätzt man über die Simulation oder man bestimmt die Fläche der sicheren Zone und dividiert sie durch die der Basisfigur. Dabei spielt auch Wissen aus der Geometrie eine wichtige Rolle.

Das Schachbrettproblem ist eine verwandte Frage und bietet eine neue Herausforderung: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Münze, die über ein Schachbrett gerollt wird und dort landet, einen der Eckpunkte der Felder am Brett überdeckt? (Plusadmin 2004). Uminterpretiert auf die Münzen und das quadratische Gitter lautet die Frage: Wenn eine Münze zufällig auf das Gitter geworfen wird, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie auf einer der Ecken eines Quadrats landet?

Wird das Problem als Anhängsel des Buffonschen Münz-Problems betrachtet, so bietet es sich an, die schon gelernten Methoden anzuwenden. Wir spielen das Problem am Applet durch und markieren nun den Mittelpunkt der gelandeten Münze mit orange (hell in der Abb. 5), wenn sie eine Ecke des Gitters überdeckt, und blau, wenn sie keine Ecke erreicht (dunkel). In Abb. 5 wird der Durchmesser der Münze wieder als kleiner als die Seite des Quadrats angenommen.

Das Simulationsszenario zeigt helle Kreise in derselben Größe wie die Münze (Viertelkreise an jeder Ecke des Quadrats). Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze an einer Ecke landet gleich

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \frac{1}{s^2}.$$

Das Schachbrettproblem ist schwieriger, wenn der Durchmesser der Münze größer als die Länge der Seite des Quadrats ist, d. h., wenn $d > s$. Hier hilft es enorm, sich auf einen Quadranten (siehe Abb. 6) zu beziehen, weil sich die Verhältnisse von hier auf das ganze Quadrat übertragen lassen (siehe Turner 2006). Dieser Quadrant kann in zwei kongruente, rechtwinkelige Dreiecke und einen zentralen Teil zerlegt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze auf einer Ecke landet ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelpunkt der Münze innerhalb der rechtwinkeligen Dreiecke oder dem zentralen Kreissektor landet.

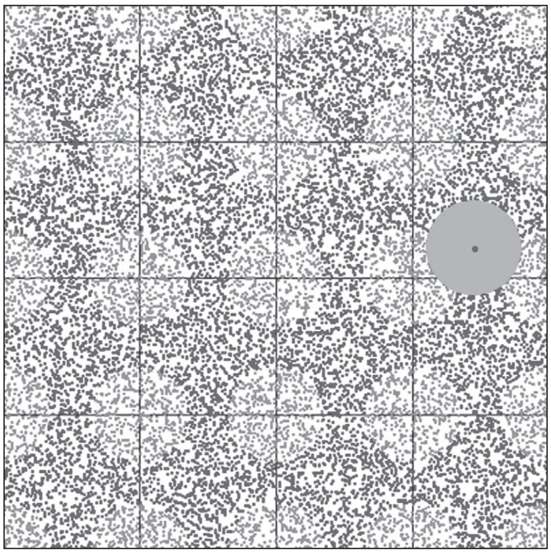

Abb. 5: Die Simulationsstudie zeigt die sicheren Zonen für das Schachbrettproblem im Fall $d \leq s$

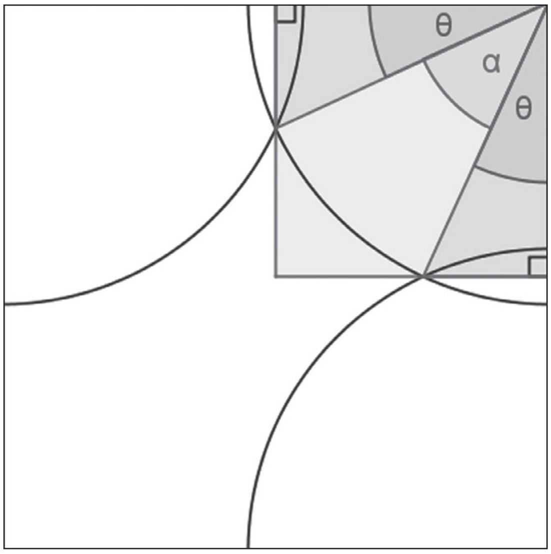

Abb. 6: Lösungsskizze zum Schachbrettproblem für den Fall $d > s$; gezeigt wird ein einzelnes Quadrat

Die Höhe jedes Dreiecks (längs der Kante des kleinen Quadranten) ist gleich der Seite des Quadranten, d. h., $s/2$, und die Basis des Dreiecks ist

$$\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - s^2}.$$

Die Fläche jedes der Dreiecke ist daher

$$\frac{s}{8}\sqrt{d^2 - s^2}.$$

Den Winkel α, der dem zentralen Kreissektor entspricht, bestimmt man durch

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\theta = \frac{\pi}{2} - 2\arccos\left(\frac{s}{d}\right).$$

Damit erhält man für die Fläche des Sektors

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)=\left(\frac{d}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{4}-\arccos\left(\frac{s}{d}\right)\right).$$

Die gesamte „günstige" Fläche ergibt sich nun zu:

$$\frac{s}{4}\sqrt{d^2-s^2}+\left(\frac{d}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{4}-\arccos\left(\frac{s}{d}\right)\right).$$

Dies müssen wir noch durch die „mögliche" Fläche (des kleinen Quadranten), das ist $s^2/4$, dividieren; damit erhalten wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{1}{s}\sqrt{d^2-s^2}+\left(\frac{d}{s}\right)^2\left(\frac{\pi}{4}-\arccos\left(\frac{s}{d}\right)\right).$$

Die Untersuchungen zum angesprochenen Problemkreis erfordern eine Vielfalt von Fertigkeiten und Kenntnissen in Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der Zusammenhang zwischen Fläche und Wahrscheinlichkeit in der geometrischen Wahrscheinlichkeit erfordert die Berechnung der Fläche von einfachen Figuren (Quadrate, Dreiecke, Parallelogramme), aber auch die Einschätzung von Ähnlichkeit und Kongruenz. Das schwierigere Schachbrettproblem erfordert zusätzlich die Fläche von Kreisen und Kreissektoren, den Pythagoreischen Lehrsatz und elementare Trigonometrie. Aus dem Zusammenhang heraus entstehen die Probleme ganz natürlich und diese regen auch an, Fragen der Genauigkeit der Simulation zu erörtern und das Verhältnis von relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeit zu thematisieren. Die Anbindung an Begriffe wie geometrische Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Erwartungswerte und Standardfehler ist von hier aus gut motiviert.

4 Verbindungen zwischen Geometrie und Stochastik

Der National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, die nationale Vereinigung von Mathematiklehrenden in den USA) empfiehlt u. a. Folgendes:

- „Erkennen und benützen von Bezügen zwischen mathematischen Ideen";
- „Verstehen, wie mathematische Ideen zusammen hängen und wechselweise ein kohärentes Ganzes aufbauen" (NCTM 2000, S. 64).

Das Buffonsche Problem erleichtert, [überraschende] Verbindungen zwischen Geometrie und Stochastik herzustellen, und trägt sicherlich zu einem Verständnis der Mathematik als einem „kohärenten Ganzen" bei. Die behandelten Fragen erfordern zur Lösung eine ganze Palette von Fertigkeiten und Kenntnissen aus beiden genannten Fächern. Die Wahrscheinlichkeiten werden zuerst durch die geometrische Umsetzung gefunden, die geometrischen Fragen können aber auch durch die Perspektive der Wahrscheinlichkeit gelöst werden, etwa wie im folgenden Beispiel:

> Man werfe eine Münze 5,000 Mal auf ein Gitternetz und bestimme die empirische Wahrscheinlichkeit, dass die Münze gänzlich innerhalb eines Quadrats landet, ohne die Begrenzungslinien zu schneiden. Das Netz hat Quadrate von 400 × 400 Pixel. Wie kann man die Fläche der sicheren Zone in jedem Quadrat schätzen?

Die Lösung zu Problemen aus dem Kreis der Buffon-Münze erfordert die Bestimmung von Flächen einiger geometrischer Figuren und die Betrachtung von Ähnlichkeit und Kongruenz von Figuren. Die Untersuchungen können durch Simulation gestützt werden. [Wenn man sich vorher geometrisch überlegt, dass man den Mittelpunkt zeichnet und über die ganze Simulationsserie speichert.] Die Sichtweise von Wahrscheinlichkeit als etwas, was man misst und nicht nur durch kombinatorisches Abzählen bestimmt, ist grundlegend für ein Verständnis von höheren statistischen Methoden und Begriffen.

Mit Unterstützung der Lernenden sind das Probleme, die – schon von der Mittelstufe herauf – sowohl interessant als auch verständlich sind. Ich habe die Fragen mit Lehrkräften aus Mathematik und auch mit Studierenden des Lehramts Mathematik bearbeitet. In beiden Fällen waren die Teilnehmer sehr engagiert und offen für die weiterführenden Aufgaben. Die erforderliche Mathematik ist aber auch auf unteren Stufen erreichbar. Das Schöne am Buffon-Münzenproblem ist, dass sich viele Querverbindungen zwischen den an sich so unterschiedlichen Teilgebieten von Geometrie und Stochastik ergeben.

Literatur

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000): Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Plusadmin (2004): Puzzle page: High roller. In: *Plus Magazine* 31, S. 44. plus.maths.org/issue31/puzzle/ (Zugriff: 8.8.2014).

Schneiter, K. (o. D.): Statlets. Applets for Teaching Statistics. www.math.usu.edu/~schneit/CTIS/ (Zugriff: 8.8.2014).

Turner, P. (2006): Coin on a chessboard. In: *Australian Mathematics Teacher* 62(3), 12–16.

Anschrift der Verfasserin

Kady Schneiter
Department of Mathematics and Statistics
Utah State University
Logan, Utah 84322, USA.
kady.schneiter@usu.edu