Ein genauerer Blick auf das bekannte Geburtstagsproblem[1]

RUMA FALK, JERUSALEM

[1] Original: „A Closer Look at the Notorious Birthday Coincidences“ and „On why it is easier to find two People with the same Birthday than one other Person with one’s own“ in Teaching Statistics 36 (2014) 2, pp. 41–46.
Übersetzung: ANDREAS PRÖMMEL, GOTHA

Zusammenfassung: *Der Artikel fragt nach der minimalen Anzahl an Personen für eine Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,5, wenn a) wenigstens 2 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben und b) wenigstens eine Person mit dem Leser dieses Artikels am gleichen Tag Geburtstag hat. Beiden Problemen liegt die gleiche Frage über die notwendige Anzahl an Kontrollen zugrunde.*

1 Einleitung

Vermutlich werden viele Leser bei dem Titel des Artikels denken, dass dies doch ein allseits bekanntes Problem sei. In der Tat sind die meisten von uns mit dieser Art von Denkaufgabe vertraut, ist sie doch das klassische Beispiel für kontraintuitive Ergebnisse in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Über die zufällige Übereinstimmung von Geburtstagen und die verblüffende Überraschung nach der Feststellung, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 2 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben, bereits bei $n = 23$ Personen $p = 0{,}5$ überschreitet, ist viel geschrieben worden (siehe Nickerson 2004, Weaver 1963). Diese Schriften enthalten sorgfältige numerische Belege dafür, was Feller 1957 noch als erstaunliches Phänomen bewertet hatte. Viele Autoren entwickelten Abwandlungen und Verallgemeinerungen des oben genannten Standardproblems (z. B. Diaconis & Mosteller 1989, Matthews & Sones 1998 und McKinney 1966). Scheinbar gibt es kein Detail, dass nicht schon tiefgründig genug untersucht wurde. Doch dann entschied ich mich, dieses Problem um eine weitere Facette von zufälligen Übereinstimmungen zu erweitern, die in den bisherigen Darstellungen offenbar übersehen wurde.

Zwei fundamentale Problemstellungen des Geburtstagsproblems werden in diesem Artikel mit ihren Lösungen vorgestellt und mögliche Gründe für die bekannten Fehleinschätzungen angegeben. Die vergleichende Gegenüberstellung könnte didaktisch genutzt werden, um bestehende Zweifel unter Schülern in Bezug auf das Geburtstagsproblem zu beseitigen.

Wir gehen von folgenden Annahmen aus: Die Chancen für alle 365 Geburtstage im Jahr sind gleich und die Geburtstage sind unabhängig voneinander (Schaltjahre und Mehrlingsgeburten werden vernachlässigt). Ein Geburtstag ist festgelegt durch den Tag in einem Monat, das Jahr wird nicht betrachtet.

2 Zwei Problemstellungen

Nach dem Vorgehen von Michalewicz and Michalewiz (2008) und Mosteller (1965) versuchen wir die Anzahlen durch zwei Problemstellungen herauszufinden.

Problem **a.** Finde die kleinste Anzahl an Personen, die in einem Raum zusammenkommen müssen, damit eine Wette darauf, dass unter diesen Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben, eine Gewinnchance von mehr als 50 % hat.

Problem **b.** Finde die kleinste Anzahl an Personen, die mit dir in einem Raum zusammenkommen müssen, damit eine Wette darauf, dass unter diesen Personen mindestens eine mit dir am gleichen Tag Geburtstag hat, eine Gewinnchance von mehr als 50 % hat.

3 Die zwei Lösungen

Ein geeigneter Weg, um die Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse **a.** wenigstens zwei Personen haben am gleichen Tag Geburtstag bzw. **b.** mindestens eine Person hat mit dir am gleichen Tag Geburtstag zu ermitteln, ist es, die Wahrscheinlichkeit der Gegenereignisse, dass **a.** alle Personen an unterschiedlichen Tagen Geburtstag haben bzw. **b.** dass keine Person mit dir am gleichen Tag Geburtstag hat zu berechnen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir die Personen in beiden Problemstellungen willkürlich durchnummerieren. Für Fall **a.** gilt: Die Wahrscheinlichkeit, dass Person 2 an einem anderen Tag Geburtstag hat wie Person 1, beträgt 364/365, die Wahrscheinlichkeit, dass Person 3 an einem anderen Tag Geburtstag hat wie die Personen 1 und 2, beträgt 363/365 und die Wahrscheinlichkeit, dass Person k an einem anderen Tag Geburtstag hat, wie die Personen $1, 2, \ldots, k - 1$ beträgt $(365 - k + 1)/365$. Alle k Geburtstage unterscheiden sich voneinander mit der Wahrscheinlichkeit von

$$364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - k + 1)/365^{k-1}.$$

Daher beträgt Wahrscheinlichkeit, dass unter k Personen mindestens 2 Personen am gleichen Tag Geburtstag haben

$$1 - \frac{364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - k + 1)}{365^{k-1}}. \tag{1}$$

Für Fall **b.** gilt analog: Die Wahrscheinlichkeit, dass dass Person 1 an einem anderen Tag Geburtstag hat als du, beträgt 364/365 und das gilt auch für Person 2, 3, …, k. So beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Geburtstage von k unabhängigen Personen von deinem Geburtstag unterscheiden $(364/365)^k$ und das unter den k Personen wenigstens eine Person mit dir am gleichen Tag Geburtstag hat

$$1 - \left(\frac{364}{365}\right)^k. \tag{2}$$

Die minimale Anzahl k an Personen, für die die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ übersteigt, beträgt:

23 für Formel (1) in Fall **a.** und

253 für Formel (2) in Fall **b.**

In Wirklichkeit sind die 365 Geburtstage in einem Jahr nicht gleichwahrscheinlich. Berresford (1980) berechnete die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Übereinstimmung (Fall **a.**) anhand der Geburtenraten im Bundesstaat New York im Jahre 1977. Seine Erkenntnis: 23 Personen sind nötig, damit die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ übersteigt. Er zeigte damit, dass die Wahrscheinlichkeit für einen gemeinsamen Geburtstag gegenüber der tatsächlichen Verteilung robust ist und wie bei einer unterstellten Gleichverteilung 23 Personen ausreichen, damit eine Übereinstimmung eher wahrscheinlich ist als nicht.

Matthews & Stones (1998) vertreten die Auffassung, dass die realen Abweichungen von der theoretischen Gleichverteilung der Geburtstage über das Jahr hinweg dazu neigen, das Auftreten zufälliger Übereinstimmungen zu begünstigen. Dafür haben sie zehnmal die Geburtstage von jeweils 23 Personen auf einem Fußballfeld (zwei Mannschaften plus Schiedsrichter) untersucht. Sie fanden eine beeindruckende Konsistenz zwischen den Vorhersagen basierend auf dem vereinfachten mathematischen Modell und den real beobachteten Anzahlen an Übereinstimmungen in den 10 Fußballveranstaltungen. Ähnliche Ergebnisse finden sich auch bei Petocz & Sowey (2006), die die gemeinsamen Geburtstage unter den britischen Premierministern untersucht haben.

4 Weit verbreitete Fehlschätzungen

Die notwendige Anzahl an Personen, die spontan bei meinen Befragungen von Studenten, Kollegen und Freunden als eine Antwort für beide Problemstellungen vorgeschlagen wurde, beträgt 183 – die Hälfte von 365 nach oben gerundet. Das gleiche Ergebnis findet sich bei Michalewicz & Michalewicz (2008), Mosteller (1962) sowie in den Ausführungen von Plous (1993) und Rosenhouse (2009). Die Befragten meinen wohl, dass bei 365 möglichen Platzierungen von Personen genügend freie Plätze vorhanden sind, es sei denn, die Zahl der Personen hat etwa die Hälfte der verfügbaren Plätze erreicht. Das Schubfachprinzip stellt sicher, dass wenn n Elemente in m Ablagefächern mit $n > m$ abgelegt werden, eine Schublade mehr als ein Element enthalten muss. Die Geburtstag-Problemstellungen erfordern nur die Hälfte von dieser Gewissheit, nämlich $p > 0{,}5$. Daher rechnet man sich aus, dass die Anzahl der Personen nicht weniger als die Hälfte von 365 sein sollte. Intuitive Schätzungen verfehlen somit das Ziel. Die richtige Antwort zu Problem **a.** wird überschätzt und die richtige Antwort zu Problem **b.** wird unterschätzt.

5 Warum liegen die Schätzungen so weit vom Ziel entfernt?

Offenbar nehmen die Befragten im Fall **a.**, neben der Position des halbvollen Schubfachprinzips, eine selbstzentrierte Sichtweise ein und überlegen, wie viele Personen für eine 50-50-Chance nötig sind, um mindestens eine Übereinstimmung mit ihrem eigenen Geburtstag zu haben (abgesehen von den Übereinstimmungen zwischen anderen Personenpaaren). So schlagen sie berechtigterweise eine Anzahl vor, die viel größer ist als 23, aber immer noch nicht groß genug. Nur beantworten sie damit die falsche Frage. Auch diejenigen, die die möglichen gemeinsamen Geburtstage der anderen Personen berücksichtigen, schätzen die Anzahl an Paaren weit niedriger als die Anzahl an Kombinationen von zwei Elementen aus einer bestimmten endlichen Menge ergibt.

In Fall **b.**, der sich auf den eigenen Geburtstag der Befragten bezieht, ist die Vorstellung, dass 183 Personen die Hälfte aller Geburtstage eines Jahres belegen, fehlerhaft. Denn sie vergessen dabei, die erhebliche Anzahl derjenigen Personen, die mit einer oder mehreren anderen am gleichen Tag Geburtstag haben können. Somit überdecken die 183 Personen weit weniger als die Hälfte aller Geburtstage eines Jahres.

In beiden Fällen wird die Anzahl an Paaren, Drillingen etc., deren Geburtstage zusammenfallen, deutlich unterschätzt. Zu ähnlichen Ergebnissen sind Wagenaar et al. (1979) bei der Unterschätzung des exponentiellen Wachstums sowie Tversky & Kahneman (1974) bei der Unterschätzung des zunehmenden Wachstums gelangt. Im Fall des Geburtstagsproblems ist die erhebliche Unterschätzung des kombinatorischen Wachstums auf ein falsches Bild der Verteilung von 183 Geburtstagen auf das Jahr und auf das Unvermögen, die richtige Anzahl an Paaren aus einer Gruppe von 23 Personen zu bilden, zurückzuführen. Diese Anzahl – C(23, 2) = 253 – ist viel größer als die 22 möglichen Paare, die vom Befragten mit den anderen Mitgliedern der Gruppe gebildet werden können und auch viel größer als die intuitiven Schätzungen für die Gesamtzahl an möglichen Paare.

6 Eine zentrale Einsicht

Das Wiederauftauchen der Anzahl 253 – die Lösung für das Problem **b.** – im Kontext von Problem **a.** erscheint zunächst als purer Zufall, an den man keinen Gedanken verschwenden sollte. Auf den zweiten Blick jedoch ist dieser Fall sehr aufschlussreich. Die Wiederholung dieser Anzahl kann in der Tat als Metakoinzidenz, als Zusammentreffen höherer Ordnung, angesehen werden. Es ist kein glücklicher Zufall sondern die Kennzahl 253 beantwortet eine Frage, die explizit in Problem **b.** und eher implizit in Problem **a.** auftaucht. Die **grundlegende Frage**, deren Beantwortung der Lösung beider Probleme unterliegt, lautet:

Wie viele unabhängige Prüfungen von Geburtstagspaaren – mit Erfolgswahrscheinlichkeit 1/365 – sind nötig, um mit einer Chance von 50 % wenigstens einen Erfolg zu haben?

Es macht keinen Unterschied, ob alle Paartests die gleiche Person (den Befragten) mit all den anderen Personen auf Übereinstimmung prüft (wie Fall **b.**) oder ob die Personen mehrfach auftauchen, aber immer mit jemand anderem gepaart (wie im Fall **a.**). Solange die (ungeordneten) Paare verschieden sind, sind die Ergebnisse alle unabhängig voneinander. Das was in beiden Problemen betrachtet wird, ist die Anzahl an Paaren, die auf Übereinstimmung bzw. Nichtübereinstimmung geprüft werden. Diese Kennzahl ist bei beiden Problemen die gleiche. Michalewicz und Michalewicz (2008) stellen beide Probleme dar und geben die Zahl 253 als Antwort auf Problem **b.** an, aber sie stellen keine Verbindung zur Anzahl an Paartests her, die für Problem **a.** durchgeführt werden müssen. Rosenhouse (2009, S. 7) behauptet in Bezug auf Problem **a.** zurecht: „With 23 people there are 253 pairs, which means 253 chances of getting a match". Diese Aussage sollte mit der Feststellung ergänzt werden, dass 253 das Problem **b.** löst. Nach Abschluss meiner Analyse habe ich erfreut festgestellt, dass Mosteller in seinem 1962 erschienenen Artikel und in Aufgabe 33 seines 1965 veröffentlichten Buches, die Fälle **a.** und **b.** miteinander in Beziehung setzte und zeigte, dass für die Überschreitungswahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ in beiden Fällen die gleiche Anzahl an Überprüfungen, d. h. die Anzahl der Möglichkeiten gleicher Geburtstage , nötig sind. Für jede beliebige Überschreitungswahrscheinlichkeit stehen die Anzahl r von Paaren, die für Problem **a.** geprüft werden müssen und die Anzahl n von Personen, die für Problem **b.** geprüft werden müssen in folgendem Zusammenhang:

$$n \approx r(r-1)/2\,.$$

7 Pragmatische Schlussfolgerungen

Die Zahl 253, die oben ohne Beweis als Lösung für Problem **b.** angegeben wurde, lässt sich durch die Lösung der Exponentialgleichung für n (Berechnen der Gegenwahrscheinlichkeit für **b.**) bestimmen:

$$\left(\frac{364}{365}\right)^n = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Logarithmiert man beide Seiten der Gleichung, dann erhält man als nächstliegende ganzzahlige Lösung die Zahl 253. (Beachten Sie, dass die exakte nichtganzzahlige Lösung $n = 252{,}652$ ist.)

Obwohl 253 die grundlegende Frage beider Probleme beantwortet, ist diese Zahl nicht die Anzahl der Paare, die für die Lösung von Problem **a.** gesucht werden. Jedoch kann diese Zahl leicht von 253 abgeleitet werden. Sei r die unbekannte Lösung für Problem **a.**, dann gilt 253 gleich $C(r, 2) = r(r-1)/2$, und r ist eine Lösung der quadratischen Gleichung

$$r(r-1)/2 = 253\,.$$

Die positive Lösung dieser Gleichung ist 23. Genaugenommen ist es auf diesem Weg einfacher das Ergebnis 23 zu erhalten als den Subtrahenden von Formel (1) oder einem Äquivalent davon mit 1/2 gleichzusetzen, wie es in der Literatur dargestellt wird (z. B. Diaconis & Mosteller 1989, S. 857 und Feller 1957, S. 32). Der Vorteil der klassischen Lösung von Fall **a.** des Geburtstagsproblems mit Hilfe von Formel (1) liegt in seiner konzeptuellen Klarheit. Das Problem ist auf diesem Weg einfacher zu verstehen aber es ist schwerer damit praktisch umzugehen. Vernünftigerweise wäre daher Formel (3) zur Lösung zu bevorzugen. Mehr noch dient dieses Vorgehen dazu auf die Anzahl an Paaren hinzuweisen, die geprüft werden müssen, um die verschiedenen Fälle des Geburtstagsproblems zu lösen.

Danksagung

Ich danke Raphael Falk für die fachliche und konzeptionelle Unterstützung.

Literatur

Berresford, G. C. (1980). The uniformity assumption in the birthday problem. *Mathematics Magazine, 53*(5), 286–288.

Diaconis, P. and Mosteller, F. (1989). Methods for studying coincidences. *Journal of the American Statistical Association, 84*(No. 408, Application and Case Studies), 853–861.

Feller, W. (1957). An Introduction to Probability Theory and Its Applications (2nd edn, Vol. 1). New York: Wiley.

Matthews, R. and Stones, F. (1998). Coincidences: The truth is out there. *Teaching Statistics, 20*(1), 17–19.

McKinney, E. H. (1966). Generalized birthday problem. *The American Mathematical Monthly, 73*(4), 385–387.

Michalewicz, Z. and Michalewicz, M. (2008). Puzzle-Based Learning: An Introduction to Critical Thinking, Mathematics, and Problem Solving. Melbourne Victoria, Australia: Hybrid Publishers.

Mosteller, F. (1962). Understanding the birthday problem. *Mathematics Teacher, 55*(5), 322–325.

Mosteller, F. (1965). Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions. Reading, MA: Addison-Wesley.

Nickerson, R. S. (2004). Cognition and Chance: The Psychology of Probabilistic Reasoning. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Petocz, P. and Sowey, E. (2006). Statistical diversions. *Teaching Statistics, 28*(2), 61–64.

Plous, S. (1993). The Psychology of Judgment and Decision Making. New York: McGraw-Hill.

Rosenhouse, J. (2009). The Monty Hall Problem: The Remarkable Story of Math's Most Contentious Brainteaser. Oxford: Oxford University Press.

Tversky, A. and Kahneman, D. (1974). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. *Science,* 185, 1124–1131.

Wagenaar, W. A. and Timmers, H. (1979). The pond-and-duckweed problem: Three experiments on the misperception of exponential growth. *Acta Psychologica,* 43, 239–251.

Weaver, W. (1963). Lady Luck: The Theory of Probability. New York: Dover.

Anschrift der Verfasserin

Ruma Falk
The Hebrew University of Jerusalem, Israel
rfalk@cc.huj.ac.il