DER ERSTE SOLL DER LETZTE SEIN

BRYAN WILSON

Übersetzt von G. Fillbrunn

Das Kombinieren von Stichproben verschiedener Verteilungen ist ein gefährliches Unterfangen. In den Schulen wurden Ordnungen einer Klasse gewöhnlich dadurch gewonnen, indem man die Noten verschiedener Unterrichtsfächer kombinierte. Bryan Wilson beschreibt einen Lehrversuch, durch den Studenten des Lehramts auf die Gefahren aufmerksam gemacht werden sollen, die bei einem derartigen Tun auftreten.

Ordnungen einer Klasse, bei denen die Schüler dieser Klasse nach einer gewissen umfassenden Leistungsordnung klassifiziert sind, sind in den Schulen weniger üblich, als sie es früher waren. In Großbritannien verwenden sie trotzdem noch viele Schulen. In vielen anderen Ländern ist diese Praxis weit verbreitet.

Die Einwände gegen die Ordnungen einer Klasse sind zweierlei Art, nämlich die erzieherischen und die statistischen. Die erzieherischen Argumente gegen sie sind teils psychologisch, teils soziologisch, und die meisten jungen Lehrer und Studenten des Lehramts sind sich ihrer gewöhnlich bewußt. Die Einwände hinsichtlich der Statistik sind jedoch viel weniger bekannt, obwohl sie nicht weniger ernst zu nehmen sind. Einige Beachtung sollte ihnen in den einführenden Lehrerausbildungskursen bei dem Kapitel über die L e i s t u n g s m e s s u n g geschenkt werden, nicht nur, um die Studenten selbst von der Unzuverlässigkeit von Ordnungen einer Klasse zu überzeugen, sondern auch um sie für die Verteidigung ihrer Ansichten innerhalb der Lehrerschaft mit treffenden und statistisch abgesicherten Beweisen zu versorgen.

Die Unzuverlässigkeit entspringt natürlich dem Bedürfnis, eine einzige Rangordnung aus einer Serie von individuellen fachbezogenen Ordnungen zu schaffen, die in der Regel als Serien von Urnoten vorliegen.

Diese Noten selbst können entweder Prüfungsergebnisse oder das Aggregat der Noten sein, die über eine gewisse Zeit hinweg für einzelne Arbeiten gegeben wurden. Im letzteren Fall ist das Problem mehrschichtig - aber wir wollen uns auf das Einstufenproblem beschränken!

Die Studenten für das Lehramt werden vermutlich mit der Bedeutung von Mittelwert, Median und Modalwert vertraut sein und wissen, daß D u r c h s c h n i t t im allgemeinen Mittelwert bedeutet. Die unerwarteten Eigenschaften des Durchschnitts von Zahlen, den man aus zwei oder mehreren Zahlenserien erhält, können mit einer Reihe sorgfältig ausgewählter Beispiele aufgezeigt werden.

<u>Beispiel</u>: <u>Durchschnittsgeschwindigkeiten</u>

Nach dem 60 km entfernten Leeds fahre ich mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 40 km/h, mit 30 km/h fahre ich wieder zurück. Wie groß ist meine Durchschnittsgeschwindigkeit für die Hin- und Rückreise?

Ein derartiges Problem ist natürlich wohlbekannt. Trotzdem sind viele Studenten für das Lehramt überrascht, wenn sie herausfinden, daß die Antwort nicht 35 km/h heißt. Beim Lehren muß herausgehoben werden, daß der Durchschnitt für den zusammengesetzten Fall z w i s c h e n den beiden einzelnen Durchschnitten liegt.

<u>Beispiel</u>: <u>Kricketdurchschnitte</u>

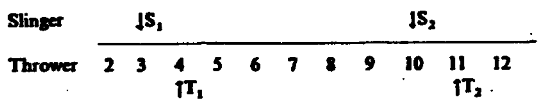
Die Gravelpatscher Kricketmannschaft hat zwei Bowler, Sam Slinger und Tom Thrower, die große Rivalen sind. Ein Cup soll dem überreicht werden, der in dem 2-Innings-Spiel gegen Battleham, das der Höhepunkt der Saison ist, den besseren Bowlingdurchschnitt hat. Beide Bowler spielten mit großem Erfolg und führten ihre Mannschaft zu einem überragenden Sieg. Ihre Zahlen waren

	1. Inning			2. Inning		
	Runs	Wickets	Durchschnitt	Runs	Wickets	Durchschnitt
Slinger	6	2	3	60	6	10
Thrower	28	7	4	33	3	11

Wer gewann den Cup?

Damit man nicht auf den Gedanken kommt, daß man Thrower nur deswegen Gerechtigkeit widerfahren ließ, weil er die meisten Wickets hatte, könnten seine Daten im ersten Inning durch 5 Wickets für 25 Runs ersetzt werden, um die überraschende Folgerung noch mehr zu verdeutlichen.

Dieser offensichtliche Widerspruch kann an der Zahlengeraden veranschaulicht werden.



S_1 ist Slingers Durchschnitt im ersten Inning. Analog sind S_2, T_1 und T_2 definiert.

$$S_1 < T_1 \quad \text{und} \quad S_2 < T_2 \tag{1}$$

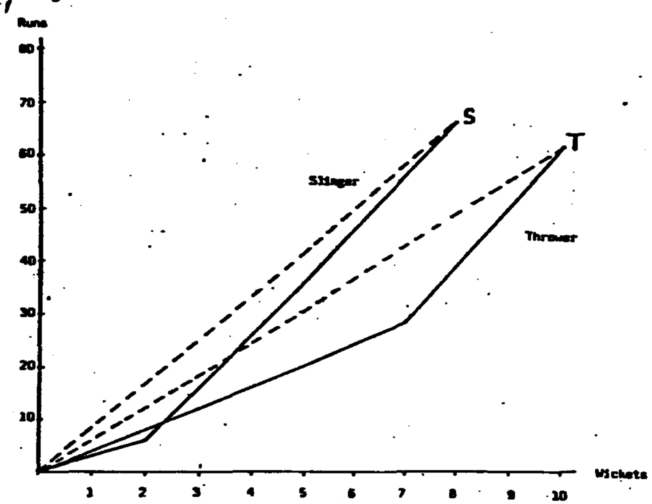
Ihre Spieldurchschnitte S_m und T_m müssen den Ungleichungen

$$S_1 < S_m < S_2 \quad \text{und} \quad T_1 < T_m < T_2$$

genügen (siehe dazu das erste Beispiel), aber der Tabelle kann leicht entnommen werden, daß trotz (1) $S_m > T_m$ gilt.

Der Widerspruch kann aber auch graphisch dargestellt werden.

Fig. 1.



Die Steigungen der Strecken stellen den Durchschnitt Runs/Wickets dar. Die Steigungen jeder der zu Thrower gehörigen Strecken sind größer (daher ein 'schlechterer' Durchschnitt) als die der entsprechenden Strecken des Slingerschen Schaubilds, dagegen ist die Steigung von OT kleiner als die von OS.

Jetzt werden die Studenten die unerwarteten, ja sogar 'unfairen' Ergebnisse der Kombination verschiedener Datenreihen bemerken; nun sollten sie in der Lage sein, das komplexere Problem zu betrachten, das darin besteht, verschiedene Notenserien zu kombi-

nieren, um so zu versuchen, eine einzige umfassende Leistungsordnung aufzustellen. Die folgende dreistufige Untersuchung veranschaulicht in sehr spannender Weise die Fallen.

<u>Beispiel</u>: <u>Ordnungen einer Klasse</u>

(a) Die zwölf Schüler einer Klasse erhielten in ihren acht Unterrichtsfächern folgende Noten

Urnoten

	Kunst	Biologie	Chemie	Dramatische Literatur	Englisch	Französisch	Geographie	Geschichte
Anne	100	30	47	72	40	75	30	47
Barbara	90	38	43	60	20	65	48	70
Chris	61	36	40	45	41	55	62	80
David	63	32	51	90	30	70	47	35
Edward	56	55	41	82	45	40	49	41
Francis	80	45	49	64	65	45	38	20
George	23	47	45	55	60	80	32	60
Henry	40	35	52	70	56	20	60	65
Iris	85	40	60	40	28	51	55	30
Jenny	72	54	50	10	25	35	66	75
Kathy	48	57	55	34	70	60	36	10
Lesley	10	60	59	20	35	30	70	58

Ihr Lehrer entschied, eine umfassende Leistungsordnung dadurch zu erstellen, indem die Urnoten jedes Schülers einfach addiert werden. Erstelle diese Leistungsordnung.

(b) Jenny, die in Mathematik recht gut war ehe sie diese abwählte, widersprach und forderte, daß die Noten eines jeden Fachs vor der Addition in eine besondere Bewertungsskala gebracht werden sollten. Nach Rückfrage bei seinem Mathematikkollegen ging der Lehrer auf diese Forderung ein und stellte jede Notenserie linear von 0 bis 100 dar. (Schüler können dies entweder graphisch oder mit dem Rechner machen.) Zum Beispiel hat die Notenserie für Biologie nach der Übertragung folgendes Aussehen:

0 , 27 , 20 , 7 , 83 , 50 , 57 , 17 , 34 , 80 , 90 , 100

Berechne die Summen der neuen Noten. Bewirkt die Übertragung einen Unterschied zur umfassenden Leistungsordnung? (Toll!)

(c) Dies führte beinahe zu einem Aufruhr, und der Direktor wurde gerufen, um eine Entscheidung zu fällen. Mit Salomonischer Weisheit verfügte er, daß die Leistungsordnung nicht direkt von den ursprünglichen oder übertragenen Noten hergeleitet wird, sondern von den Rangordnungen in allen Fächern. Der Lehrer ermittelte entsprechend Fach für Fach die 'Plätze' und addierte sie für jeden Schüler, so daß der Schüler mit der kleinsten Summe Spitzenreiter der Gesamtleistungsordnung wurde.

Wenn ein Student des Lehramts, nachdem er sich sorgfältig durch eine solche Aufgabe hindurchgearbeitet hat, den Ordnungen einer Klasse noch vertraut, dann folgt er vielleicht der falschen Berufung.

Natürlich werden in der Praxis die ursprünglich erzielten Ergebnisse gewöhnlich besser unter den Fächern korrelieren als in diesem Beispiel. Jedoch ist das Prinzip der Unzuverlässigkeit sogar noch in Fällen anwendbar, die weniger aufregend sind.

Der Erste soll der Letzte sein - Lösungen
(Alternativvorschlag der Übersetzers: Die Letzten werden die Ersten sein - Lösungen)

In dem Beispiel über Ordnungen einer Klasse ist A,B,C,D,E,F,G,H, I,J,K,L die Rangordnung, die durch Addition der Urnoten erhalten wird. Wenn die Noten übertragen sind und somit von 0 bis 100 reichen, werden folgende Ergebnisse erhalten:

Name	Kunst	Biologie	Chemie	Dramatische Literatur	Englisch	Französisch	Geographie	Geschichte	Summe
A	100	0	35	77	40	92	0	53	397
B	89	27	15	63	0	75	45	86	400
C	57	20	0	44	42	58	80	100	401
D	59	7	55	100	20	83	43	36	403
E	51	83	5	90	50	33	48	44	404
F	78	50	45	68	90	42	20	14	407
G	14	57	25	56	80	100	5	71	408
H	33	17	60	75	72	0	75	79	411
I	83	34	100	38	16	52	62	29	414
J	69	80	50	0	10	25	90	93	417
K	42	90	75	30	100	67	15	0	419
L	0	100	95	12	30	17	100	69	423

Die Reihenfolge wurde genau umgekehrt. Der Erste ist der Letzte und der Letzte ist der Erste.
Wenn die Rangordnungen jedes Fachs zugrunde gelegt werden, ergibt sich folgende Tabelle:

Name	Kunst	Biologie	Chemie	Dramatische Literatur	Englisch	Französisch	Geographie	Geschichte	Summe
A	1	12	8	3	7	2	12	7	52
B	2	8	10	6	12	4	7	3	52
C	7	9	12	8	6	6	3	1	52
D	6	11	5	1	9	3	8	9	52
E	8	3	11	2	5	9	6	8	52
F	4	6	7	5	2	8	9	11	52
G	11	5	9	7	3	1	11	5	52
H	10	10	4	4	4	12	4	4	52
I	3	7	1	9	10	7	5	10	52
J	5	4	6	12	11	10	2	2	52
K	9	2	3	10	1	5	10	12	52
L	12	1	2	11	8	11	1	6	52

Alle Schüler sind gleich, aber einige sind gleicher als die anderen.