Sechzehn linke Füße

Margaret W. Maxfield, Kansas State university
(Aus: Teaching Statistics, Vol. 3, No. 1, Jan. 1981, S. 25)
Übertragen von Ingeborg Strauß

Das Messen physikalischer Größen hat mittlerweile einen hohen Grad an (internationaler) Normierung erreicht. Früher jedoch entwickelten sich, etwa bei der Landvermessung, die Maßeinheiten ad hoc und blieben von lokal begrenzter Bedeutung, wie in diesem Beitrag beispielhaft ausgeführt wird.

Hinweis für den deutschen Leser: Das Längenmaß "rood" ist der Vorläufer des heutzutage in der Vermessungstechnik gebräuchlichen "rod" (1 rd. = 5,03 m). Bekannter weil verbreiteter ist die Längeneinheit "foot" (1 ft. = 30,48 cm). Es gilt: 16,5 ft. = 1 rd.

Aus: Compton's Pictured Encyclopedia, 1929 edition. Chigago: F. E. Compton & Company:

> "Einen Eindruck von den Unbequemlichkeiten, ja Schwierigkeiten, die durch das Fehlen eines absoluten und invarianten Längenmaßes entstehen, vermittelt eine deutsche Abhandlung über Landvermessung aus dem 16. Jahrhundert, welche dem Vermesser das folgende Verfahren zur Gewinnung der Längeneinheit "rood" empfiehlt:
>
> 'Postieren Sie sich an einem Sonntag am Ausgang der Kirche. Nach Beendigung des Gottesdienstes bitten Sie 16 die Kirche verlassende Männer - großgewachsene und kleinwüchsige - zu folgendem Experiment beiseite: Die Probanden stellen ihre linken Füße geradlinig und nahtlos hintereinander. Die resultierende Gesamtlänge soll das für die Landvermessung korrekte und gesetzlich gültige Längenmaß "rood" sein. Dessen 16. Teil soll die korrekte und gesetzlich gültige Größe "foot" sein."

In Ermangelung eines tragbaren und objektiv übertragbaren Standardmaßes griff man also zurück auf ein Meßverfahren, das - statistisch gesehen - Regelmäßigkeit zu gewährleisten schien: Solange die Stichprobe keine Schiefe aufweist, darf man annehmen, daß sich extreme Werte ausgleichen, sodaß die Summe (das "rood") und das arithmetische Mittel (das "foot") "durchschnittlich" werden.

Noch drei Jahrhunderte dauerte es bis zu einer mathematisch präzisen Darlegung der Prinzipien statistischer Regelmäßigkeit und bis zum Beweis der Tschebyschew-Ungleichung im Jahre 1867.

Im Zusammenhang mit diesem Beispiel für ein behelfsmäßiges "rood"-Maß müssen einige grundsätzliche statistische Fragen diskutiert werden:

War die Stichprobe wirklich zufällig? Wie sieht der Stichprobenraum aus? Um dies beantworten zu können, müßte man - etwa aus der Sozialgeschichte - wissen, ob die meisten Männer des Distriktes in der Kirche waren oder nicht. Falls ja, dann war an jenem Tage die Form der Verteilung in der Stichprobe im Wesentlichen dieselbe wie die für die Grundgesamtheit aller Männer dieses Distriktes.

Angenommen, der Hinweis "Nach Beendigung des Gottesdienstes bitten Sie 16 die Kirche verlassende Männer ... beiseite ..." ist zu interpretieren als "Stoppen Sie die ersten 16": Begründet dies den Verdacht auf eine Schiefe, beispielsweise durch Überrepräsentation kleiner Füße? Sozial bedingte Konstellationen könnten zu einem 'Altersfaktor', einem 'Statusfaktor' oder sogar zu einem 'Schnelligkeitsfaktor' beim Verlassen der Kirche geführt haben, und irgendeiner dieser 'Faktoren' könnte signifikant mit der Fuß-Länge korrelliert gewesen sein.

Wie hätten die Feldvermesser überprüfen können, ob das ermittelte Maß zufriedenstellend repräsentativ war? Vielleicht hat man eine Auswahl der restlichen Männer bezüglich ihrer Fußlängen analysiert. Zeigten die Vergleiche, daß die meisten Männer aus dem Distrikt kürzere linke Füße hatten als der Stichprobendurchschnitt, so ist - unter dem Aspekt des Erreichens eines brauchbaren Normmaßes - der erste Stichprobenversuch als mißlungen zu betrachten.

Optimale Voraussetzungen für die Ermittlung einer guten Stichprobe ohne Schiefe zu schaffen, erfordert Einfallsreichtum und Kenntnis der Hintergrundbedingungen.

> Anmerkung der Übersetzerin:
>
> Im Geschichts-Magazin "Memo" Nr. 6, Juni 1981, S. 113 berichtet Josef Nyary unter der Überschrift "Die großen Blonden mit den vielen Talenten" folgendes:
>
> "Die Sozialgeschichte vermerkt die Langobarden als Träger des ersten internationalen Arbeiterbundes: Aus einem losen Zusammenschluß oberitalienischer Bauhandwerker am Comer See, die sich Comacini nannten, wurde nach dem Einmarsch der Langobarden eine Genossenschaft mit ordentlicher Satzung. Sie errichtete Kirchen und Klöster überall in Mitteleuropa (ihr Einfluß reichte bis Poitiers, Cluny, Augsburg, Speyer, Mainz, Maria Laach) und bestand noch im 12. Jahrhundert, 400 Jahre nach der Vernichtung des langobardischen Reiches.
>
> Die Comacini entwickelten eine lateinisch-langobardische Fachsprache, besaßen eigene Steinmetzschulen und normten Europas Baupläne nach einem Längenmaß, das ihnen der Fuß des Langobardenkönigs Liutprand vorgegeben hatte: 28,5 Zentimeter."

REZENSION

Klaus Lange: Zahlenlotto. Theorie und Chancen eines populären Glücksspiels. Otto Maier Verlag Ravensburg, 1980, 204 S., ISBN 3-473-43059-5, DM 6,80.

Der Autor, Dozent für Statistik und Ökonometrie an der Universität Hamburg, stellt sich die Aufgabe, "verständlich und objektiv die Theorie und die Wirklichkeit des Zahlenlottos" zu beschreiben.

Auf eine kurze Einführung in den Ursprung unseres Zahlenlottos, das Genueser Lotto, folgt eine knappe Übersicht über die Geschichte des Zahlenlottos in der Bundesrepublik Deutschland und die Lottoarten in anderen (überwiegend europäischen) Staaten. Nach Hinweisen auf Verschiedenheiten, resultierend aus der föderalen Struktur der Lottogesellschaften bei uns, in Bezug auf das Aussehen der Spielscheine, unterschiedliche Möglichkeiten von Systemspielen und variierende Teilnahmebedingungen erfährt der Leser Näheres über den organisatorischen Ablauf der Dinge vor und während des all-sonnabendlichen Ziehungsvorganges für "6 aus 49" und "Spiel 77".

Kapitel 4 führt den mit Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht Vertrauten an einfachen, doch instruktiven Beispielen in die "großen" und "kleinen" Zahlen und - ohne daß dieser Begriff fiele - die Laplace-Wahrscheinlichkeiten ein. Ein Würfelspielmodell, an dem die Begriffe "Gewinn", "Gewinn-Anteil" und "(theoretische) Gewinnerwartung" exemplifiziert werden (vgl. auch meine Ausführungen unten), beschließt diesen Teil.

Damit fällt der Übergang leicht zum eigentlich interessierenden "Zahlenlotto-Modell", d.h. zu den Betrachtungen über die Theorie der Ziehungsergebnisse und der entsprechenden Quoten/Gewinne. Der mit Euphorie, in der Hoffnung auf Patentlösungen und 'todsichere' Geheimrezepte, an das Buch herangegangene Leser-Spieler erhält nun Seite für Seite bis zum 'bitteren Ende' seine 'kalte Dusche'. Doch läßt der Verfasser den trotz allem zum Spielen Entschlossenen nicht ohne einen kleinen Lichtblick. Der Vergleich von Theorie und Praxis (aller Ausspielungen von 1975 bis 1979) enthüllt eine signifikante Diskrepanz. Die Spannweite der Quoten in den einzelnen Gewinnklassen erweist sich als irritierend groß. An zwei (nicht allzu extremen) Beispielen werden dazu Techniken und Resultate der Gewinnausschüttungen verfolgt. Sie bilden den Ausgangspunkt für die genauere Durchleuchtung der Struktur aller innerhalb von 5 Jahren getippten Zahlen.

Psychologische Aspekte werden diskutiert. "Sympathische" und "unsympathische" Zahlen der deutschen Bundesbürger kristallisieren sich heraus. Sie basieren auf der Verwendung persönlicher Daten bzw. der Vermeidung von bestimmten charakteristischen Positionen und Blockbildungen auf den Spielscheinen. Aus diesen statistisch abgesicherten Erkenntnissen heraus postuliert der Autor das "kluge Spiel gegen die anderen". Es garantiert mit einer nicht geringen Wahrscheinlichkeit hohe Quoten im Falle eines (weiterhin äußerst seltenen) Gewinnes. Um für jede Ziehung auch und gerade bei der normalerweise vorliegenden Mischung von "sympathischen", "unsympathischen" und "neutralen" Zahlen eine "Kenngröße" zu erhalten, konstruiert Klaus Lange die "(reale) Gewinnerwartung". Sie entsteht aus der Durchschnittsbildung der (theoretischen) Wahrscheinlichkeiten des Lottomodells, gewichtet mit den (tatsächlichen) Gewinnen. Ausführlich wird die Aussagekraft dieser Variablen in Bezug auf die Beliebtheit der gezogenen Zahlenkombinationen diskutiert. Doch wird dem Leser immer wieder vor Augen geführt, daß ein Spieler zwar auf die Höhe seines Gewinnes (falls er gewinnt!) Einfluß nehmen kann, es bleibt aber bei der das ganze Buch durchziehenden Erkenntnis, daß "das Verhältnis von Einsatz zu Gewinnerwartung sich grundsätzlich nicht ändert", selbst wenn man mehrere Spiele macht.

Eine neue Dimension eröffnet das "systematische Spiel". "Vollsysteme", "Auswahlsysteme", "Systeme mit Bankzahlen" und "Systeme mit Zwillingen, Drillingen und Blöcken" werden auf 74 Seiten ausgiebig und eingehend untersucht. Es sei an dieser Stelle darauf verzichtet zu erläutern, was man unter diesen einzelnen Termini genau versteht. Der 'eingefleischte' Spieler ist informiert, dem Neuling wäre mit Kurzdefinitionen kaum geholfen, zumal die (nicht zuletzt auch finanziellen) Konsequenzen aus solchem Systemspiel, verbunden mit den Gewinnerwartungen, gut bedacht sein wollen. Keine grundsätzliche Frage bleibt hier offen, und das, zugleich die Bedingungen von Bundesland zu Bundesland variieren können. Wie unglaubwürdig die Anbieter von Spielsystemen sind, die das "große Geld" versprechen, geht aus den vielen vollständigen und übersichtlichen Tabellen hervor, die schnellste Orientierung ermöglichen.

Sehr lehrreich in diesem Zusammenhang und den Sachtext auflockernd ist das Beispiel "Der Pechvogel des Jahres: 6 Richtige im Lotto - nur 202,50 Mark". Überhaupt ist der Stil wohltuend freundlich. Der Leser wird direkt angesprochen, was den (nötigen) desillusionierenden Charakter des ganzen Buches besser verkraften läßt.

Nicht unterschlagen sei Kapitel 12, das sich mit dem "Spiel 77" beschäftigt. Es ist interessant nachzuvollziehen, wie der strukturelle Unterschied zwischen beiden Spieltypen durchleuchtet wird.

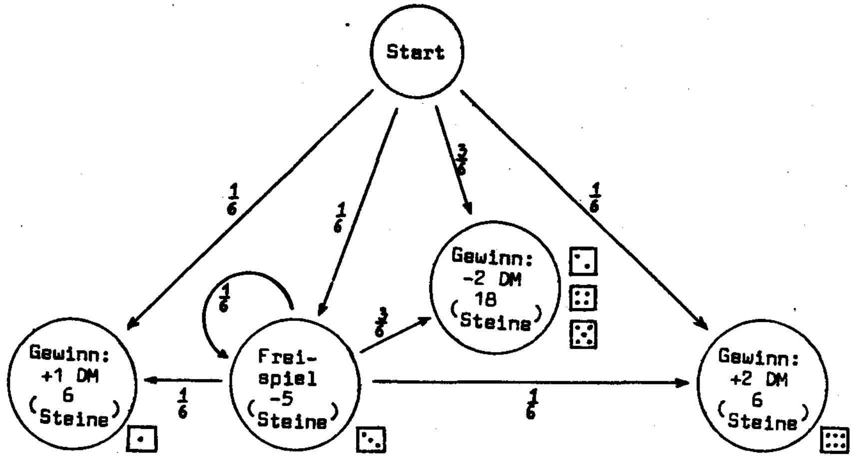
Fazit: Das Buch ist für den erwachsenen interessierten Laien-Spieler, für Lehrer und für Schüler mit Grundkenntnissen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Laplace-Wahrscheinlichkeit, Additions- und Multiplikationssatz, Gesetz der großen Zahlen, Unabhängigkeit von Ereignissen, Erwartungswert, einfache Kombinatorik) sehr empfehlenswert.

Daher noch eine Anregung für den Einsatz dieses Buches in der gymnasialen Oberstufe. Nicht jede Rechnung kann der Verfasser dem Leser ausführlich vorführen und begründen. So wird vielleicht die letzte Spalte der Tabelle auf S. 39 dem mit Wahrscheinlichkeitstheorie nicht ausreichend Vertrauten dunkel bleiben. Es handelt sich dabei um die Berechnung des Erwartungswertes bei einem einfachen, von K. Lange erfundenen Würfelspiel, an dem modellhaft die nötigen stochastischen Begriffe exemplifiziert werden. Damit bietet sich dieses Beispiel im Unterricht an, um die behaupteten Ergebnisse verifizieren zu lassen. Eine rein rechnerische Möglichkeit führt z.B. auf eine unendliche geometrische Reihe:

$$\text{E(Gewinn des Spielers)} = \tfrac{1}{6}\cdot(2+1) + \tfrac{3}{6}\cdot(-2) + \tfrac{1}{6}\cdot(\tfrac{1}{6}\cdot(2+1) + \tfrac{3}{6}\cdot(-2)) + \ldots$$

$$= -\tfrac{1}{2}\cdot((\tfrac{1}{6})^0 + (\tfrac{1}{6})^1 + \ldots) = -0{,}6.$$

Betrachtet als Markoff-Kette, läßt sich auf dem zugehörigen Wahrscheinlichkeitsgraphen mit Hilfe des 'Abakus-Verfahrens' nach Engel (siehe u.a. A. Engel: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Bd. 2, Klett Verlag 1976, S. 212 ff.) 'spielen':



Die eingeklammerten Angaben ("x Steine") geben die Endpositionen an, aus denen dann direkt folgt:

$$\text{E(Gewinn des Spielers)} = \tfrac{1}{5}\cdot 2 + \tfrac{1}{5}\cdot 1 + \tfrac{3}{5}\cdot(-2) = -0{,}6.$$

Weiter läßt sich nach diesem Verfahren sehr einfach die mittlere Anzahl der Spiele pro Einsatz bis zum Gewinn/Verlust bestimmen: $\frac{36}{30} = 1{,}2$.

K. Lange geht dagegen - meiner Ansicht nach ungewöhnlicherweise - davon aus, daß bei einem Freispiel der Einsatz zurückgezahlt wird und das Spiel damit in jedem Falle bereits nach einmaligem Würfeln beendet ist. So gelangt er zu

$$\text{E(Gewinn des Spielers)} = \tfrac{1}{6}\cdot 2 + \tfrac{1}{6}\cdot 1 + \tfrac{1}{6}\cdot 0 + \tfrac{3}{6}\cdot(-2) = -0{,}5.$$

Auch die Simulation mit Hilfe der Monte Carlo-Methode ist bei diesem Spiel gut einsetzbar.

Ein Mathematik-Lehrer benötigt nur wenig Phantasie, um aus der Fülle des gebotenen Zahlenmaterials weitere attraktive Aufgaben für seinen Stochastik-Kurs zu 'basteln'. Besonders die Systemspiele bieten sich hierzu aufgrund ihrer Verbindung von kombinatorischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Aspekten an. Die vielen einzelnen Wahrscheinlichkeiten bzw. deren auf 'ganze Spiele' gerundeten Kehrwerte sind, wo sinnvoll, bis zu zehn Stellen aufgeführt. Dies erspart dem Lehrer eigene mühselige Ausrechnungen, vor allem eben bei den Systemspielen.

Gestattet seien Anregungen an den Verlag für eine 2. Auflage:

S. 32: statt "8" muß es 4 Körner heißen;
S. 37-39: siehe oben;
S. 47: Verweis auf die Seiten 80/81 resp. 72 ff.;
S. 48 und 81: Diskrepanz in den Quoten der Gewinnklasse II der 44. Ausspielung 1979;
S. 62: » vor "unsympathischen«" fehlt;
S. 65 ff.: jeweils Einfügung der Benennung DM auf der linken Seite der Gleichungen (wichtig für Schüler);
S. 115: Beispiel 1 und 2 vertauscht verglichen mit S. 116;
S. 136: Auflistung der 28 möglichen Spiele fehlt (freier Platz);
S. 152: Zeitungsausriß nur mühsam lesbar.

Ingeborg Strauß