

## Über eine Baseball-Statistik

Thomas Filbrun Mc Nelly und Günter Fillbrunn

Alljährlich bestreiten die Erstplatzierten der beiden nordamerikanischen Ligen für Baseball AMERICAN LEAGUE und NATIONAL LEAGUE eine Endrunde zur Ermittlung des 'Weltmeisters'. Die Endrunde wird seit 1945 nach folgendem System ausgetragen: Die beiden Mannschaften stehen sich in bis zu 7 Spielen gegenüber. Die Spielrunde ist beendet, wenn eine Mannschaft 4mal gewonnen hat. Die Siegermannschaft ist der 'Weltmeister' dieser Saison. Die einzelnen Spiele enden nie unentschieden und werden auf den Plätzen der beiden teilnehmenden Vereine ausgetragen. Der Platzwechsel findet nach dem 2. sowie gegebenenfalls nach dem 5., also nach dem System 2,3,2 statt. Das Verfahren zur Ermittlung des Baseballmeisters und die nachstehenden Ergebnisse der Endrunden seit 1945 werfen zwei stochastische Fragen auf, auf die in diesem Aufsatz eingegangen werden soll.

### World Series Results, 1945-1981

1945 Detroit AL 4, Chicago NL 3	1963 Los Angeles NL 4, New York AL 0
1946 St. Louis NL 4, Boston AL 3	1964 St. Louis NL 4, New York AL 3
1947 New York AL 4, Brooklyn NL 3	1965 Los Angeles NL 4, Minnesota AL 3
1948 Cleveland AL 4, Boston NL 2	1966 Baltimore AL 4, Los Angeles NL 0
1949 New York AL 4, Brooklyn NL 1	1967 St. Louis NL 4, Boston AL 3
1950 New York AL 4, Philadelphia NL 0	1968 Detroit AL 4, St. Louis NL 3
1951 New York AL 4, New York NL 2	1969 New York NL 4, Baltimore AL 1
1952 New York AL 4, Brooklyn NL 3	1970 Baltimore AL 4, Cincinnati NL 1
1953 New York AL 4, Brooklyn NL 2	1971 Pittsburgh NL 4, Baltimore AL 3
1954 New York NL 4, Cleveland AL 0	1972 Oakland AL 4, Cincinnati NL 3
1955 Brooklyn NL 4, New York AL 3	1973 Oakland AL 4, New York NL 3
1956 New York AL 4, Brooklyn NL 3	1974 Oakland AL 4, Los Angeles NL 1
1957 Milwaukee NL 4, New York AL 3	1975 Cincinnati NL 4, Boston AL 3
1958 New York AL 4, Milwaukee NL 3	1976 Cincinnati NL 4, New York AL 0
1959 Los Angeles NL 4, Chicago AL 2	1977 New York AL 4, Los Angeles NL 2
1960 Pittsburgh NL 4, New York AL 3	1978 New York AL 4, Los Angeles NL 2
1961 New York AL 4, Cincinnati NL 1	1979 Pittsburgh NL 4, Baltimore AL 3
1962 New York AL 4, San Francisco NL 3	1980 Philadelphia NL 4, Kansas City AL 2
	1981 Los Angeles NL 4, New York AL 2

Aus World Almanac 1982, Newspaper Enterprise Association, New York, p.911

1. Problem: Anzahl der Ausgänge der Endrunde  
 Jeder Ausgang einer Endrunde läßt sich aus der Sicht etwa der Mannschaft, auf deren Platz die ersten beiden Spiele ausgetragen werden, als ein 4-, 5-, 6- oder 7-Tupel mit Einsen und Nullen darstellen, je nachdem ob in der Endrunde 4,5,6 oder 7 Spiele ausgetragen werden. Dabei soll die Eins einen Sieg und die Null eine Niederlage der Mannschaft in dem betreffenden Spiel bedeuten. Wir möchten nun zunächst wissen, wieviel Ausgänge es für eine Endrunde mit  $x$  Spielen gibt,  $x \in \{4,5,6,7\}$ .

$x=4$ : Hier sind  $2 \cdot \binom{3}{0}$  Ausgänge möglich. Diese sind

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}$$

Der in der Mitte der 4-Tupel stehende Strich soll den oben erwähnten Platzwechsel anzeigen. Die Bedeutung der Striche unter einzelnen Ziffern wird später erläutert.

$x=5$ : Da auf 5 Plätze entweder 4 Einsen und 1 Null oder 4 Nullen und 1 Eins so verteilt sind, daß auf dem 5. Platz im ersten Falle eine Eins und im zweiten Falle eine Null steht, gibt es die folgenden  $2 \cdot \binom{4}{1}$  (=8) Ausgänge:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} \\ \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}$$

Analog erhält man die Ausgänge der beiden restlichen Fälle:

$x=6$ : Es existieren die folgenden  $2 \cdot \binom{5}{2}$  (=20) Ausgänge:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{1} \\ \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{0} \end{pmatrix}$$

$x=7$ : Hier gibt es  $2 \cdot \binom{6}{3}$  (=40) Ausgänge und zwar

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} \\ \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} \\ \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{1} \\ \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{1} \\ \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{1} \\ \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{1} \\ \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{1} & / & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & / & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}$$

Für die Endrunde sind daher  $2+8+20+40$  (=70) Ausgänge möglich.

**2. Problem:** Welches wahrscheinlichkeitstheoretische Modell paßt hinsichtlich der Anzahl der Spiele der Endrunden 1945-1981?

1. Modell: Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist für jede Mannschaft und für jedes Spiel 0,5.

Für die Wahrscheinlichkeit  $P(X=x)$ , daß die Endrunde  $x$  Spiele umfaßt,  $x \in \{4,5,6,7\}$ , gilt dann

$$P(X=4) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}, \quad P(X=5) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{4},$$

$$P(X=6) = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{16}, \quad P(X=7) = 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{5}{16}$$

Die Untersuchung des 2. Modells, das das 1. als Sonderfall enthält, offenbart, daß Modell 1 die Realität nicht beschreiben dürfte.

2. Modell: Die Mannschaft mit Platzvorteil gewinnt mit der konstanten Wahrscheinlichkeit  $p$

Für die Wahrscheinlichkeit einer aus  $x$  Spielen bestehenden Endrunde schreiben wir  $P(p;x)$ ,  $x \in \{4,5,6,7\}$ . Wie man leicht einsieht, besteht für alle  $x \in \{4,5,6,7\}$  und für alle  $p \in [0;1]$  die Beziehung  $P(p;x) = P(1-p;x)$ . Ehe die entsprechenden Formeln hergeleitet werden, verschaffen wir uns durch Computersimulationen für spezielle  $p$  Schätzwerte dieser Wahrscheinlichkeiten.

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

$p$	0,0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	1,0
h(4 Spiele)	0,000	,018	,051	,079	,111	,113	,107	,072	,054	,010	0,000
h(5 Spiele)	0,000	,145	,207	,246	,253	,248	,243	,236	,215	,161	0,000
h(6 Spiele)	0,000	,227	,294	,306	,308	,313	,322	,348	,320	,250	0,000
h(7 Spiele)	1,000	,610	,446	,369	,328	,321	,328	,344	,411	,579	1,000

Vergleichen wir diese Werte mit den in der nächsten Tabelle enthaltenen Ergebnissen der Endrunden von 1945-1981, kann vermutet werden, daß eine Verträglichkeit nur für  $0,8 \leq p \leq 0,9$  angenommen werden darf. Wegen des Heimvorteils kommt  $0,1 \leq p \leq 0,2$  nicht in

Betracht.

Zahl der Spiele der Endrunden 1945-1981

	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
4 Spiele	5	0,135
5 Spiele	5	0,135
6 Spiele	8	0,216
7 Spiele	19	0,514

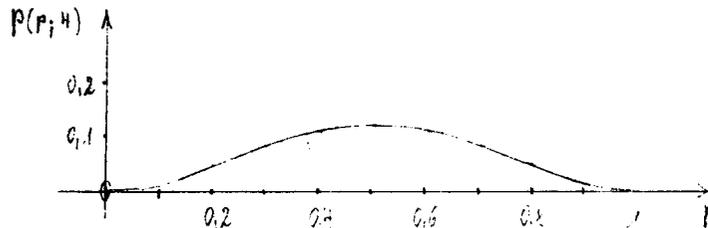
Um mit Hilfe des  $\chi^2$ -Tests präzisere Aussagen machen zu können, werden im folgenden die Funktionen  $p \mapsto P(p;x)$ ,  $x \in \{4,5,6,7\}$ , untersucht.

$x=4$ : Den unter dem 1. Problem aufgezählten Ausgängen entnimmt man

$$P(p;4) = 2p^2(1-p)^2$$

Die dort unterstrichenen Ziffern geben an, daß sie mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  erzielt werden. Den nicht unterstrichenen Ziffern kommt die Wahrscheinlichkeit  $1-p$  zu.

p	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$P(p;4)$	0	0,0162	0,0512	0,0882	0,1152	0,125



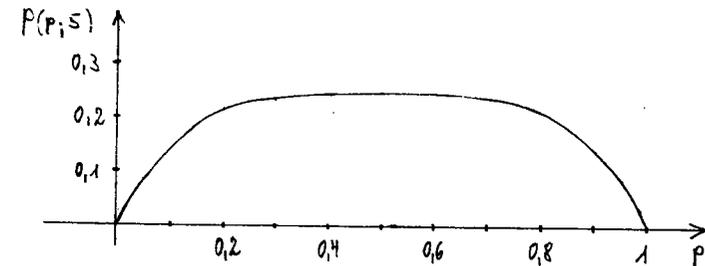
$x=5$ : Den Funktionsterm für  $P(p;5)$  erhält man mit Hilfe der zugehörigen 8 Ausgänge.

$$\begin{aligned} P(p;5) &= 2p^4(1-p) + 2p^3(1-p)^2 + 2p^2(1-p)^3 + 2p(1-p)^4 \\ &= 2p(1-p)[p^3 + p^2(1-p) + p(1-p)^2 + (1-p)^3] \\ &= 2p(1-p)(p^3 + p^2 - p^3 + p - 2p^2 + p^3 + 1 - 3p + 3p^2 - p^3) \\ &= 2p(1-p)(2p^2 - 2p + 1) \\ &= 2(2p^3 - 2p^2 + p - 2p^4 + 2p^3 - p^2) \\ &= 2(-2p^4 + 4p^3 - 3p^2 + p) = 2\left[\frac{1}{8} - 2\left(p - \frac{1}{2}\right)^4\right] \end{aligned}$$

Wird  $p$  durch  $\bar{p} + \frac{1}{2}$  substituiert, gewinnt man

$$P(\bar{p};5) = 4\left(\frac{1}{16} - \bar{p}^4\right)$$

p	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$P(p;5)$	0	0,1476	0,2176	0,2436	0,2496	0,25



$x=6$ : Man geht wie bisher vor und erhält

$$\begin{aligned} P(p;6) &= 4p^5(1-p) + 12p^3(1-p)^3 + 4p(1-p)^5 \\ &= 4p(1-p)[p^4 + 3p^2(1-p)^2 + (1-p)^4] \\ &= 4p(1-p)(p^4 + 3p^2 - 6p^3 + 3p^4 + 1 - 4p + 6p^2 - 4p^3 + p^4) \\ &= 4p(1-p)(5p^4 - 10p^3 + 9p^2 - 4p + 1) \\ &= 4(5p^5 - 10p^4 + 9p^3 - 4p^2 + p - 5p^6 + 10p^5 - 9p^4 + 4p^3 - p^2) \\ &= 4(-5p^6 + 15p^5 - 19p^4 + 13p^3 - 5p^2 + p) \end{aligned}$$

$$P'(p;6) = 4(-30p^5 + 75p^4 - 76p^3 + 39p^2 - 10p + 1)$$

$$P''(p;6) = 4(-150p^4 + 300p^3 - 228p^2 + 78p - 10)$$

Die Funktion  $P$  besitzt an der Stelle 0,5 ein lokales Minimum:

$$\begin{aligned} (30p^5 - 75p^4 + 76p^3 - 39p^2 + 10p - 1) &= (2p-1)(15p^4 - 30p^3 + 23p^2 - 8p + 1) \\ P''(0,5;6) &> 0 \end{aligned}$$

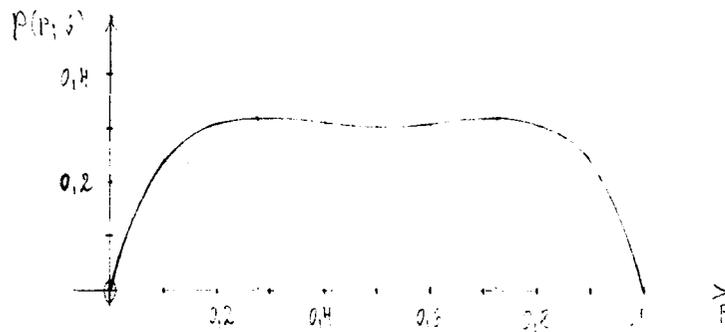
Zur Berechnung der anderen lokalen Extremstellen wird in

$P'(p;6)/(4-8p)$   $p$  durch  $\bar{p} + \frac{1}{2}$  substituiert:

$$\begin{aligned} 15p^4 - 30p^3 + 23p^2 - 8p + 1 &= 15\left(\bar{p} + \frac{1}{2}\right)^4 - 30\left(\bar{p} + \frac{1}{2}\right)^3 + 23\left(\bar{p} + \frac{1}{2}\right)^2 - 8\left(\bar{p} + \frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= 15\left(\bar{p}^4 + 2\bar{p}^3 + \frac{3}{2}\bar{p}^2 + \frac{1}{2}\bar{p} + \frac{1}{16}\right) - 30\left(\bar{p}^3 + \frac{3}{2}\bar{p}^2 + \frac{3}{4}\bar{p} + \frac{1}{8}\right) + \\ &\quad + 23\left(\bar{p}^2 + \bar{p} + \frac{1}{4}\right) - 8\bar{p} - 4 + 1 \\ &= 15\bar{p}^4 + \frac{1}{2}\bar{p}^2 - \frac{1}{16} \\ &= 15\left(\bar{p}^2 - \frac{1}{20}\right) \cdot \left(\bar{p}^2 + \frac{1}{12}\right) \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Hilfe der zweiten Ableitung, daß an den Stellen  $0,5 - \frac{1}{\sqrt{20}}$  ( $\approx 0,2764$ ) und  $0,5 + \frac{1}{\sqrt{20}}$  ( $\approx 0,7236$ ) lokale Maxima vorliegen. Ihr Wert ist 0,32.

p	0	0,1 0,9	0,2 0,8	0,3 0,7	0,4 0,6	0,5
P(p;6)	0	0,24498	0,31232	0,31962	0,31488	0,3125



Bemerkenswert an diesem Ergebnis ist, daß die Wahrscheinlichkeit  $P(p;6)$  für  $0,2 \leq p \leq 0,8$  im Intervall  $[0,31232; 0,32000]$  liegt und damit fast konstant ist. Eine ähnliche, jedoch nicht ganz so ausgeprägte Eigenschaft hat die Wahrscheinlichkeitsfunktion für 5 Spiele.

$x=7$ :

$$\begin{aligned}
 P(p;7) &= p^7 + p^6(1-p) + 9p^5(1-p)^2 + 9p^4(1-p)^3 + 9p^3(1-p)^4 + 9p^2(1-p)^5 + \\
 &\quad + p(1-p)^6 + (1-p)^7 \\
 &= p^7 + p^6 - p^7 + 9p^5 - 18p^6 + 9p^7 + 9p^4 - 27p^5 + 27p^6 - 9p^7 + 9p^3 - 36p^4 + \\
 &\quad + 54p^5 - 36p^6 + 9p^7 + 9p^2 - 45p^3 + 90p^4 - 90p^5 + 45p^6 - 9p^7 + p - 6p^2 + \\
 &\quad + 15p^3 - 20p^4 + 15p^5 - 6p^6 + p^7 + 1 - 7p + 21p^2 - 35p^3 + 35p^4 - 21p^5 + \\
 &\quad + 7p^6 - p^7 \\
 &= 20p^6 - 60p^5 + 78p^4 - 56p^3 + 24p^2 - 6p + 1
 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis erhält man einfacher über die Gleichung

$$P(p;7) = 1 - \sum_{x=4}^6 P(p;x)$$

$$\begin{aligned}
 P'(p;7) &= 120p^5 - 300p^4 + 312p^3 - 168p^2 + 48p - 6 \\
 &= 6(20p^5 - 50p^4 + 52p^3 - 28p^2 + 8p - 1)
 \end{aligned}$$

$$P''(p;7) = 6(100p^4 - 200p^3 + 156p^2 - 56p + 8)$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion besitzt an der Stelle 0,5 ein lokales Minimum:

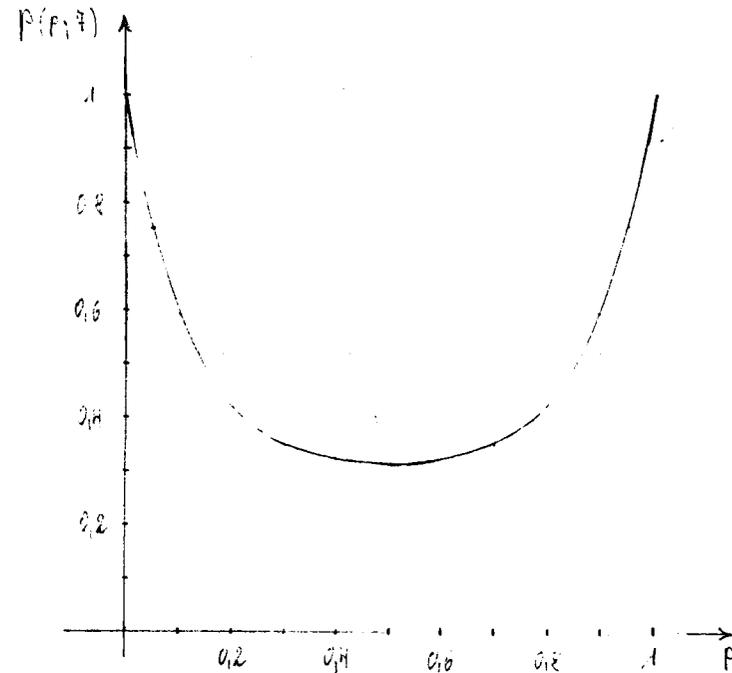
$$\begin{aligned}
 (20p^5 - 50p^4 + 52p^3 - 28p^2 + 8p - 1) &= (2p-1)(10p^4 - 20p^3 + 16p^2 - 6p + 1) \\
 P''(0,5;7) &> 0
 \end{aligned}$$

Um nachzuweisen, daß keine weitere Extremstelle vorliegt, wird in  $P'(p;7)/(12p-6)$   $p$  durch  $\bar{p} + \frac{1}{2}$  substituiert:

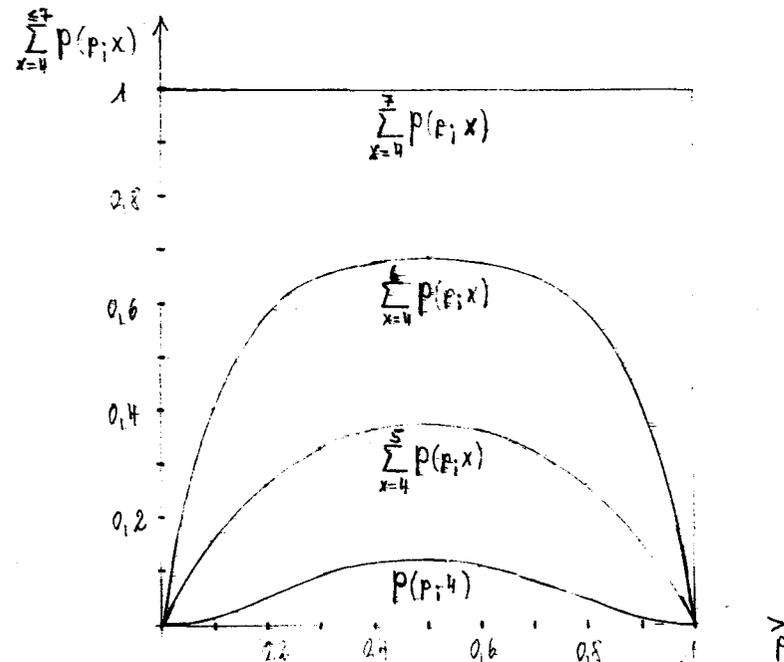
$$\begin{aligned}
 10p^4 - 20p^3 + 16p^2 - 6p + 1 &= 10(\bar{p} + \frac{1}{2})^4 - 20(\bar{p} + \frac{1}{2})^3 + 16(\bar{p} + \frac{1}{2})^2 - 6(\bar{p} + \frac{1}{2}) + 1 \\
 &= 10\bar{p}^4 + 20\bar{p}^3 + 15\bar{p}^2 + 5\bar{p} + \frac{5}{8} - 20\bar{p}^3 - 30\bar{p}^2 - 15\bar{p} - \frac{5}{2} + \\
 &\quad + 16\bar{p}^2 + 16\bar{p} + 4 - 6\bar{p} - 3 + 1 \\
 &= 10\bar{p}^4 + \bar{p}^2 + \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus  $10\bar{p}^4 + \bar{p}^2 + \frac{1}{8} > 0$  für alle  $\bar{p}$ .

p	0	0,1 0,9	0,2 0,8	0,3 0,7	0,4 0,6	0,5
P(p;7)	1	0,59122	0,41888	0,34858	0,32032	0,3125



Um die Veranschaulichung zu verbessern, werden alle Wahrscheinlichkeiten  $P(p;x)$  derart in ein Schaubild eingetragen, daß für jedes  $p \in \{0; 0,1; \dots; 0,9; 1\}$   $P(p;4)$ ,  $P(p;5)$ ,  $P(p;6)$ ,  $P(p;7)$  durch Ordinatenaddition übereinander abgetragen werden.



Mit den errechneten Wahrscheinlichkeiten kann für jedes  $p \in \{0,1; 0,2; \dots; 0,9\}$  der  $\chi^2$ -Test durchgeführt werden.

Da nach [3] (S.97) bei 4 Klassen keine vorhanden sein darf, deren Erwartungswert der Trefferhäufigkeit unter 5 liegt, werden die Klassen '4 Spiele' und '5 Spiele' in allen Fällen zur Klasse '4 oder 5 Spiele' vereinigt.

Die Testvariable  $Y$  mit

$$Y = \sum_{i=1}^3 \frac{(Y_i - np_i)^2}{np_i}$$

ist näherungsweise  $\chi^2$ -verteilt mit 2 Freiheitsgraden. Für die einzelnen Wahrscheinlichkeiten  $p$  ergeben sich folgende Realisierungen  $y$ :

$p=0,1$  und  $p=0,9$ :

$$y = \frac{(10-37 \cdot 0,1638)^2}{37 \cdot 0,1638} + \frac{(8-37 \cdot 0,24498)^2}{37 \cdot 0,24498} + \frac{(19-37 \cdot 0,59122)^2}{37 \cdot 0,59122}$$

$$\approx 2,56 + 0,12 + 0,38$$

$$\approx 3,06$$

Der Tafel für die  $\chi^2$ -Verteilung mit 2 Freiheitsgraden kann  $P(Y \leq 3,06) \approx 0,78$  entnommen werden.

$p=0,2$  und  $p=0,8$ :

$$y = \frac{(10-37 \cdot 0,2688)^2}{37 \cdot 0,2688} + \frac{(8-37 \cdot 0,31232)^2}{37 \cdot 0,31232} + \frac{(19-37 \cdot 0,41888)^2}{37 \cdot 0,41888}$$

$$\approx 0,1,09 + 0,79$$

$$\approx 1,88$$

$$P(Y \leq 1,88) \approx 0,59$$

$p=0,3$  und  $p=0,7$ :

$$y = \frac{(10-37 \cdot 0,3318)^2}{37 \cdot 0,3318} + \frac{(8-37 \cdot 0,31962)^2}{37 \cdot 0,31962} + \frac{(19-37 \cdot 0,34858)^2}{37 \cdot 0,34858}$$

$$\approx 0,42 + 1,24 + 2,89$$

$$\approx 4,55$$

$$P(Y \leq 4,55) \approx 0,90$$

$p=0,4$  und  $p=0,6$ :

$$y = \frac{(10-37 \cdot 0,3648)^2}{37 \cdot 0,3648} + \frac{(8-37 \cdot 0,31488)^2}{37 \cdot 0,31488} + \frac{(19-37 \cdot 0,32032)^2}{37 \cdot 0,32032}$$

$$\approx 0,91 + 1,14 + 4,31$$

$$\approx 6,36$$

$$P(Y \leq 6,36) \approx 0,96$$

$p=0,5$ :

$$y = \frac{(10-37 \cdot 0,375)^2}{37 \cdot 0,375} + \frac{(8-37 \cdot 0,3125)^2}{37 \cdot 0,3125} + \frac{(19-37 \cdot 0,3125)^2}{37 \cdot 0,3125}$$

$$\approx 1,08 + 1,10 + 4,78$$

$$\approx 6,96$$

$$P(Y \leq 6,96) \approx 0,97$$

Die Ergebnisse lassen auf ein  $p \geq 0,7$  schließen. Durch eine weitergehende Datensammlung ist jedoch bekannt, daß 55% der 226 Endrundenspiele von den Heimmannschaften gewonnen wurden. Da unter der Annahme  $p=0,7$  für die Zufallsvariable  $Z$ , die die Zahl der Heimsiege bei 226 Spielen angibt,

$$P(Z \leq 226 \cdot 0,55) = P\left(\frac{Z - 226 \cdot 0,7}{\sqrt{226 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} \leq \frac{226 \cdot 0,55 - 226 \cdot 0,7}{\sqrt{226 \cdot 0,7 \cdot 0,3}}\right)$$

$$\approx \Phi(-4,92)$$

$$\approx 0$$

gilt, dürfte die Realität nicht durch das 2. Modell beschrieben werden.

3. Modell: Die Mannschaft, die die ersten beiden Spiele auf dem eigenen Platz austrägt, gewinnt die Heimspiele mit einer Wahrscheinlichkeit, die bei Gleichverteilung aus einem vorgegebenen Intervall gewählt wird. Diese Wahrscheinlichkeit wird für jede Endrunde neu ermittelt und ist dann für diese Runde fest. Auf dem Platz des Gegners verringert sich die Gewinnwahrscheinlichkeit dieser Mannschaft um einen vorgegebenen konstanten Betrag. Unter diesen Voraussetzungen wurden für verschiedene Fälle mit dem Tischrechner jeweils 1000 Endrunden simuliert und die relativen Häufigkeiten  $h_4, h_5, h_6, h_7$  für 4, 5, 6, 7 Spiele ermittelt.

Die folgenden Ergebnisse sind noch durch den Wert  $y$ , der gemäß

$$y = \frac{(10-37 \cdot (h_4+h_5))^2}{37 \cdot (h_4+h_5)} + \frac{(8-37 \cdot h_6)^2}{37 \cdot h_6} + \frac{(19-37 \cdot h_7)^2}{37 \cdot h_7}$$

definiert ist, ergänzt. Dieser Wert ist das Analogon der Realisierung der obigen Testvariablen  $Y$ .

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .2 - .9  
VERSCHLECHTERUNG DER GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DIESER MANNSCHAFT  
BEIM SPIEL AUF DEM PLATZ DES GEGNERS: .05

$h(4 \text{ Spiele}) = .255$   
 $h(5 \text{ Spiele}) = .302$   
 $h(6 \text{ Spiele}) = .23$   
 $h(7 \text{ Spiele}) = .213$   
 $y = 21.18$

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .2 - .9  
VERSCHLECHTERUNG DER GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DIESER MANNSCHAFT  
BEIM SPIEL AUF DEM PLATZ DES GEGNERS: .1

$h(4 \text{ Spiele}) = .255$   
 $h(5 \text{ Spiele}) = .301$   
 $h(6 \text{ Spiele}) = .24$   
 $h(7 \text{ Spiele}) = .204$   
 $y = 22.9$

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .2 - .9  
VERSCHLECHTERUNG DER GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DIESER MANNSCHAFT  
BEIM SPIEL AUF DEM PLATZ DES GEGNERS: .2

$h(4 \text{ Spiele}) = .257$   
 $h(5 \text{ Spiele}) = .313$   
 $h(6 \text{ Spiele}) = .249$   
 $h(7 \text{ Spiele}) = .181$   
 $y = 28.59$

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .3 - .8  
VERSCHLECHTERUNG DER GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DIESER MANNSCHAFT  
BEIM SPIEL AUF DEM PLATZ DES GEGNERS: .05

$h(4 \text{ Spiele}) = .184$   
 $h(5 \text{ Spiele}) = .291$   
 $h(6 \text{ Spiele}) = .276$   
 $h(7 \text{ Spiele}) = .249$   
 $y = 14.14$

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .3 - .8  
VERSCHLECHTERUNG DER GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DIESER MANNSCHAFT  
BEIM SPIEL AUF DEM PLATZ DES GEGNERS: .1

$h(4 \text{ Spiele}) = .195$   
 $h(5 \text{ Spiele}) = .28$   
 $h(6 \text{ Spiele}) = .288$   
 $h(7 \text{ Spiele}) = .237$   
 $y = 15.86$

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .3 - .8  
VERSCHLECHTERUNG DER GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DIESER MANNSCHAFT  
BEIM SPIEL AUF DEM PLATZ DES GEGNERS: .2

$h(4 \text{ Spiele}) = .195$   
 $h(5 \text{ Spiele}) = .289$   
 $h(6 \text{ Spiele}) = .291$   
 $h(7 \text{ Spiele}) = .225$   
 $y = 17.89$

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .4 - .7  
VERSCHLECHTERUNG DER GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DIESER MANNSCHAFT  
BEIM SPIEL AUF DEM PLATZ DES GEGNERS: .05

$h(4 \text{ Spiele}) = .15$   
 $h(5 \text{ Spiele}) = .263$   
 $h(6 \text{ Spiele}) = .308$   
 $h(7 \text{ Spiele}) = .279$   
 $y = 10.13$

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .4 - .7  
VERSCHLECHTERUNG DER GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DIESER MANNSCHAFT  
BEIM SPIEL AUF DEM PLATZ DES GEGNERS: .1

$h(4 \text{ Spiele}) = .142$   
 $h(5 \text{ Spiele}) = .273$   
 $h(6 \text{ Spiele}) = .292$   
 $h(7 \text{ Spiele}) = .293$   
 $y = 8.74$

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .14 - .17  
 VERSCHLECHTERUNG DER GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DIESER MANNSCHAFT  
 BEIM SPIEL AUF DEM PLATZ DES GEGNERS: .2

h(4 Spiele) = .131  
 h(5 Spiele) = .283  
 h(6 Spiele) = .318  
 h(7 Spiele) = .268  
 y = 11.37

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .15 - .16  
 VERSCHLECHTERUNG DER GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DIESER MANNSCHAFT  
 BEIM SPIEL AUF DEM PLATZ DES GEGNERS: .05

h(4 Spiele) = .123  
 h(5 Spiele) = .237  
 h(6 Spiele) = .341  
 h(7 Spiele) = .299  
 y = 8.21

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .15 - .16  
 VERSCHLECHTERUNG DER GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DIESER MANNSCHAFT  
 BEIM SPIEL AUF DEM PLATZ DES GEGNERS: .1

h(4 Spiele) = .114  
 h(5 Spiele) = .238  
 h(6 Spiele) = .317  
 h(7 Spiele) = .331  
 y = 5.61

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .15 - .16  
 VERSCHLECHTERUNG DER GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DIESER MANNSCHAFT  
 BEIM SPIEL AUF DEM PLATZ DES GEGNERS: .2

h(4 Spiele) = .129  
 h(5 Spiele) = .261  
 h(6 Spiele) = .298  
 h(7 Spiele) = .312  
 y = 7.01

Obwohl die einzelnen Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten geschätzt sind, darf angenommen werden, daß das vorliegende Modell bei keiner der gemachten Vorgaben der Realität entspricht.

**4. Modell:** Die Mannschaft, die mit Heimvorteil die Spielrunde beginnt, gewinnt wie beim 3. Modell die Heimspiele mit einer Wahrscheinlichkeit  $q$ , die bei Gleichverteilung aus einem vorgegebenen Intervall gewählt wird. Spielt diese Mannschaft auswärts, verringert sich die Gewinnwahrscheinlichkeit nicht um einen konstanten Betrag, sondern um einen Wert  $e$ , der bei Gleichverteilung aus dem Intervall  $[0, \frac{q}{2}]$  gewonnen wird.  $q$  und  $e$  sind nur für jeweils eine Endrunde fest.

Im folgenden sind ein BASIC-Simulationsprogramm und Ergebnisse für je 1000 Endrunden, die durch den oben definierten  $y$ -Wert ergänzt sind.

```

120 REM "ALLJAERLICH BESTREITEN DIE ERSTPLAZIERTEN DER BEIDEN NORDAMERIKA-"
130 REM "NISCHEN BASEBALL-LIGEN AMERICAN LEAGUE UND NATIONAL LEAGUE"
140 REM "ZUR ERMITTLUNG DES 'WELTMEISTERS' BIS ZU 7 SPIELE GEGENEINAN-"
150 REM "DER, DIE SPIELRUNDE IST BEENDET. WENN EINE MANNSCHAFT 4MAL GEWONNEN"
160 REM "(H4), DIE EINZELNEN SPIELE ENDEN NIE UNENTSCHEIDEN UND WERDEN AUF DEN"
170 REM "PLATZEN DER BEIDEN TEILNEHMENDEN VEREINE AUSGETRAGEN. DER PLATZ-"
180 REM "WECHSEL FINDET NACH DEM 2. UND GEBEBENENFALLS NACH DEM 5. SPIEL"
190 REM "5 FAKT."
200 REM "WIE GROSS IST DIE WAHRSCHEINLICHKEIT, DASS DIE ENDRUNDE N SPIELE UN-"
210 REM "FASST?"
220 OPEN "4:PRINT#3:CHR$(142)
230 READ P1,P2
240 N=1000
250 PRINT#3,"ES WERDEN"N ENDRUNDEN SIMULIERT":PRINT#3
260 PRINT#3,"GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ :":
270 PRINT#3,P1 - "P2
280 H$(4)="H(4 SPIELE)"H$(5)="H(5 SPIELE)"H$(6)="H(6 SPIELE)"
290 H$(7)="H(7 SPIELE)"
300 Z=RND*(-11)
310 FOR I=1 TO N
320 U=(P2-P1)*RND(4)+P1
330 G=U/2+RND(4)
340 S(0)=0:S(1)=0
350 FOR J=1 TO 6
360 Y=RND(4)
370 IF J=3 OR J=4 OR J=5 THEN G=G-E:G=10/4+G
380 Q=0
390 Y=INT(Y*90):S(X)=S(X)+1
400 IF S(X)=4 THEN G=52
410 NEXT J
420 T(7)=T(7)+1:G=10/530
430 T(0)=T(0)+1
440 NEXT I
450 PRINT#3:FOR K=1 TO 7:PRINT#3,H$(K) " =":T(K)/N:NEXT
460 T(5)=T(4)+T(5)
470 FOR I=5107:1(1)=37*T(1)/N:NEXT
480 Y=(10-T(5))*2/T(5)+(8-T(4))*2/T(4)+(19-T(7))*2/T(7)
490 PRINT#3,"Y = "INT(100*Y+.5)/100
500 PRINT#3
510 T(4)=0:1(5)=0:1(6)=0:T(7)=0
520 GOTO 300
530 DATA .2,.9,.3,.8,.4,.7,.5,.6,.2,.8,.2,.7,.2,.6,.3,.7,.3,.6,.4,.6
540 CLOSE 3:END

```

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .2 - .9

h(4 Spiele) = .206  
 h(5 Spiele) = .298  
 h(6 Spiele) = .286  
 h(7 Spiele) = .21  
 y = 20.87

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .3 - .8

h(4 Spiele) = .139  
 h(5 Spiele) = .306  
 h(6 Spiele) = .296  
 h(7 Spiele) = .259  
 y = 12.59

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .4 - .7

h(4 Spiele) = .125  
 h(5 Spiele) = .266  
 h(6 Spiele) = .31  
 h(7 Spiele) = .299  
 y = 8.12

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .5 - .6

h(4 Spiele) = .115  
 h(5 Spiele) = .233  
 h(6 Spiele) = .342  
 h(7 Spiele) = .31  
 y = 7.3

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .2 - .8

h(4 Spiele) = .205  
 h(5 Spiele) = .266  
 h(6 Spiele) = .267  
 h(7 Spiele) = .262  
 y = 12.46

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .2 - .7

h(4 Spiele) = .206  
 h(5 Spiele) = .247  
 h(6 Spiele) = .283  
 h(7 Spiele) = .244  
 y = 14.81

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .2 - .6

h(4 Spiele) = .236  
 h(5 Spiele) = .313  
 h(6 Spiele) = .261  
 h(7 Spiele) = .19  
 y = 25.9

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .3 - .7

h(4 Spiele) = .152  
 h(5 Spiele) = .279  
 h(6 Spiele) = .299  
 h(7 Spiele) = .27  
 y = 11.19

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .3 - .6

h(4 Spiele) = .175  
 h(5 Spiele) = .297  
 h(6 Spiele) = .283  
 h(7 Spiele) = .245  
 y = 14.66

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .4 - .6

h(4 Spiele) = .149  
 h(5 Spiele) = .278  
 h(6 Spiele) = .302  
 h(7 Spiele) = .271  
 y = 11.06

Nach den Ergebnissen kann gesagt werden, daß wohl keiner der betrachteten Fälle die Wirklichkeit abdeckt.

5. Modell: Bei unentschiedenem Zwischenstand nach 2\*1 Spielen,  $i \in \{0,1,2,3\}$ , treffen die Wahrscheinlichkeiten von Modell 4 zu. Bei allen anderen Zwischenergebnissen ist die Gewinnwahrscheinlichkeit der im Rückstand liegenden Mannschaft für das nächste Spiel um  $f$  größer als die Gewinnwahrscheinlichkeit dieser Mannschaft bei einem entsprechenden unentschiedenen Zwischenstand.  $f$  wird bei Gleichverteilung aus dem Intervall  $[0; \frac{q}{4}]$  gewählt,  $f$  wechselt im Gegensatz zu  $q$  und  $e$  auch innerhalb einer Endrunde. Nachstehend sind die Ergebnisse von Simulationen von je 1000 End-

runden. Das jeweils angegebene Gewinnwahrscheinlichkeitsintervall bezieht sich auf das 1. Spiel.

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .2 - .9

h(4 Spiele) = .149  
h(5 Spiele) = .241  
h(6 Spiele) = .301  
h(7 Spiele) = .309  
y = 7.25

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .3 - .8

h(4 Spiele) = .12  
h(5 Spiele) = .229  
h(6 Spiele) = .294  
h(7 Spiele) = .357  
y = 3.96

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .4 - .7

h(4 Spiele) = .101  
h(5 Spiele) = .21  
h(6 Spiele) = .311  
h(7 Spiele) = .378  
y = 3.06

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .5 - .6

h(4 Spiele) = .078  
h(5 Spiele) = .209  
h(6 Spiele) = .299  
h(7 Spiele) = .414  
y = 1.77

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .2 - .8

h(4 Spiele) = .142  
h(5 Spiele) = .256  
h(6 Spiele) = .277  
h(7 Spiele) = .325  
y = 4.06

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .2 - .7

h(4 Spiele) = .165  
h(5 Spiele) = .267  
h(6 Spiele) = .274  
h(7 Spiele) = .294  
y = 8.76

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .2 - .6

h(4 Spiele) = .179  
h(5 Spiele) = .285  
h(6 Spiele) = .264  
h(7 Spiele) = .272  
y = 11.25

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .3 - .7

h(4 Spiele) = .133  
h(5 Spiele) = .255  
h(6 Spiele) = .309  
h(7 Spiele) = .303  
y = 7.76

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .3 - .6

h(4 Spiele) = .109  
h(5 Spiele) = .263  
h(6 Spiele) = .286  
h(7 Spiele) = .342  
y = 4.84

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .4 - .6

h(4 Spiele) = .1  
h(5 Spiele) = .236  
h(6 Spiele) = .285  
h(7 Spiele) = .379  
y = 2.86

Im Gegensatz zu den bisherigen Modellen sind hier die für  $q \in [0,3;0,8]$ ,  $q \in [0,4;0,7]$ ,  $q \in [0,5;0,6]$ ,  $q \in [0,3;0,6]$  und  $q \in [0,4;0,6]$  erzielten Resultate mit der Realität 'verträglich'.

6. Modell: Wie 5. Modell, jedoch mit  $f \in [0; \frac{2}{3}]$ .

Die nachfolgenden Ergebnisse von Simulationen 'passen' fast alle zu den tatsächlichen Ausgängen.

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .2 = .19

h(4 Spiele) = .11  
 h(5 Spiele) = .198  
 h(6 Spiele) = .286  
 h(7 Spiele) = .406  
 $\mu = 1.85$

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .3 = .18

h(4 Spiele) = .08  
 h(5 Spiele) = .197  
 h(6 Spiele) = .289  
 h(7 Spiele) = .434  
 $\mu = 1.22$

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .4 = .17

h(4 Spiele) = .051  
 h(5 Spiele) = .16  
 h(6 Spiele) = .276  
 h(7 Spiele) = .513  
 $\mu = 1.1$

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .5 = .16

h(4 Spiele) = .043  
 h(5 Spiele) = .161  
 h(6 Spiele) = .281  
 h(7 Spiele) = .515  
 $\mu = 1.35$

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .2 = .18

h(4 Spiele) = .109  
 h(5 Spiele) = .232  
 h(6 Spiele) = .263  
 h(7 Spiele) = .396  
 $\mu = 2.14$

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .2 = .17

h(4 Spiele) = .125  
 h(5 Spiele) = .215  
 h(6 Spiele) = .305  
 h(7 Spiele) = .355  
 $\mu = 4.1$

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .2- .6

h(4 Spiele) = .143  
 h(5 Spiele) = .251  
 h(6 Spiele) = .272  
 h(7 Spiele) = .334  
 $\mu = 5.43$

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .3- .7

h(4 Spiele) = .098  
 h(5 Spiele) = .188  
 h(6 Spiele) = .269  
 h(7 Spiele) = .445  
 $\mu = .81$

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .3- .6

h(4 Spiele) = .092  
 h(5 Spiele) = .222  
 h(6 Spiele) = .292  
 h(7 Spiele) = .394  
 $\mu = 2.29$

ES WERDEN 1000 ENDRUNDEN SIMULIERT

GEWINNWAHRSCHEINLICHKEIT DER 1. MANNSCHAFT AUF EIGENEM PLATZ : .4- .5

h(4 Spiele) = .072  
 h(5 Spiele) = .18  
 h(6 Spiele) = .309  
 h(7 Spiele) = .439  
 $\mu = 1.55$

Ob die vielen langen Endrunden der Jahre 1945-1981 auf dem 'Rücken-an-die-Wand-Effekt' [2] beruhen - dieser mobilisiert bei der im Rückstand liegenden Mannschaft zusätzliche Kräfte - oder ob sich das Baseballspiel im 'Würgegriff des Geldes' befindet, wie es H. Borchert in [1] für den Fußball sieht, kann hier natürlich nicht geklärt werden.

Zu beachten ist auch, daß die Untersuchung insofern unvollständig ist, als von den einzelnen Endrunden-Folgen der auf einen Verein bezogenen Spielausgänge 'Sieg' und 'Niederlage' jeweils nur die Länge, nicht aber die Anordnung der Ausgänge berücksichtigt wurde.

Literatur

- [1] Borchert, H. (1982): Der Fußball im Würgegriff des Geldes  
FRANKFURTER ALLGEMEINE ZEITUNG vom 7.5.1982
- [2] Croucher, J.S. (1981): An Analysis of the First 100 Years  
of Wimbledon Tennis Finals  
TEACHING STATISTICS Heft 3, Band 3  
Übersetzung in STOCHASTIK IN DER SCHULE Heft 2, Band 2 (1982)
- [3] Pehl, K. -Cramer, U. (1975): Statistik für Sie 3  
Hueber-Holzmann Verlag, Ismaning
- [4] World Almanac 1982  
Newspaper Enterprise Association, New York