Das Mittelwertspiel

von Ruma Falk

Man gewinnt, wenn man geschickt Verluste vermeidet. Dabei entdeckt man, daß die verschiedenen Mittelwerte eine Gewinnstrategie bilden.

Die Statistik stellt uns für die Beschreibung einer gegebenen Menge von Zahlenwerten mehrere Mittelwerte zur Verfügung, von denen der Median, der Modus und das arithmetische Mittel am geläufigsten sind.

Keiner dieser Werte stimmt mit allen vorliegenden Zahlen der Menge überein, wenn man vom trivialen Fall absieht. Deshalb ist die Zusammenfassung aller Zahlen der Menge zu einem "Mittelwert" notwendig mit einem Informationsverlust verbunden.

Will man nun die Frage beantworten: Welcher Wert ist der beste Stellvertreter für alle Zahlen einer Menge, so muß man zunächst klären, was man unter einem besten Stellvertreter versteht, d.h. man muß die Qualität eines Stellvertreters messen können.

Dazu benötigt man offenbar eine Regel, nach der man jede Zahl der Menge mit dem Stellvertreter vergleicht, so daß aus den so bestimmten Einzelabweichungen ein Maß für die Gesamtabweichung gebildet werden kann.

Gibt man also diese Regel vor, so könnte man den zugehörigen Mittelwert als denjenigen Stellvertreter bestimmen, der durch Anwendung der Regel das beste Maß liefert.

Im folgenden soll nun ein Spiel beschrieben werden, das den Schüler in die oben beschriebene Situation versetzt und ihn auffordert, die Wahl eines Stellvertreters zu optimieren, um das Spiel zu gewinnen.

Man muß zunächst zwei verschiedene Sorten von Karten herstellen. Der erste Stapel besteht aus Karten, die jeweils mit einer natürlichen Zahl beschriftet sind. Zu jeder auftretenden Zahl sollten mehrere Karten angefertigt werden. Dabei ist darauf zu achten, daß kleine Zahlen häufiger vertreten sind als große. In Tabelle 1 ist eine mögliche Verteilung dargestellt.

Tabelle 1

Kartenwert	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kartenanzahl	18	15	10	9	7	5	5	4	3	3

Kartenwert	12	15	18	20	25	30	40	50	75	100
Kartenanzahl	3	3	2	2	2	2	2	2	2	1

Die Karten werden gemischt und anschließend werden 7 Karten gezogen und augedeckt, z.B.: 1;1;1;3;5;30;75. Nun wird eineKarte des zweiten Stapels gezogen und ebenfalls aufgedeckt. Jede dieser Karten enthält eine Regel zur Berechnung einer Zahl, z.B.:
"Wähle irgendeine Zahl A und bestimme den größten Abstand zwischen dieser Zahl und einer der 7 aufgedeckten Zahlen!"

Jeder Mitspieler hat Papier, Bleistift und einen Taschenrechner bzw. eine Tabelle der Quadratzahlen bis 100 zur Verfügung und muß nun eine möglichst gute Zahl A bestimmen. Zunächst wird er z.B. A = 10 wählen. Er muß dann die Beträge 1-10 = 9 , 5-10 = 5 , 30-10 = 20 und 75-10 = 65 bilden und erhält nach der Regel den Wert 65.

Er wird dann vielleicht A = 40 wählen und erhält in diesem Fall als größten Abstand den Wert 39.

Der Spieler wird also mehrere Werte für A ausprobieren und sich dann für den Wert entscheiden, bei dem der größte Abstand am kleinsten ist. Diesen Wert bezeichnet er als seinen Verlust. Nach einer vereinbarten Zeit werden die Verluste verglichen und aufgeschrieben. Beide Kartenstapel werden gemischt und das Spiel wird wiederholt, mit 7 anderen Zahlenkarten und einer anderen Regelkarte. Nach einer vereinbarten Zahl von Durchgängen wird das Spiel beendet. Sieger ist der Spieler mit der geringsten Verlustsumme.

Bleiben nur noch die restlichen Regeln für die Regelkarten zu erwähnen:

a) Wähle eine Zahl A und bilde den Betrag der Summe aller Differenzen.

b) wie im 1. Beispiel

c) Wähle eine Zahl A und bilde das Produkt der Abstände.

d) ... und bilde die Summe der Quadrate der Abstände.

e) ... und bilde die Anzahl der von A verschiedenen Zahlen.

f) ... und bilde die Summe der Abstände.

g) ... und bestimme den größten Abstand O zwischen A und allen Zahlen, die größer als A sind. Bilde dann den größten Abstand U zwischen A und allen Zahlen, die kleiner als A sind. Gib dann den Abstand zwischen A und U an.

h) ... gib die Anzahl O der Zahlen an, die größer als A sind, und dann die Anzahl U der Zahlen, die kleiner als A sind. Gib dann den Abstand zwischen U und O an.

i) ... und bilde die Summe der Abstände zwischen A und den Zahlen, die größer als A sind. Bestimme dann die Summe der Abstände zwischen A und den Zahlen, die kleiner als A sind. Gib dann den Abstand zwischen beiden Summen an.

Je nach Altersstufe können diese Regeln mehr oder weniger formalisiert angegeben werden.

Fazit der Unterrichtserfahrungen

Bei einigen Regeln wurde die beste Strategie sehr schnell gefunden, auch von jüngeren Schülern.

Der Modalwert als Lösung für Regel e) wird sofort gefunden. Auch die Rangmitte $\frac{1}{2}(x_{min}+x_{max})$ als bester Wert für Regel b) wird recht schnell erkannt.

Meist wird dann auch der Median entdeckt, wenn die Summe der Abstände minimal sein soll (Regel f)). Dabei kann man jedoch nicht erwarten, daß diese Entdeckung bewiesen wird. Man beobachtet häufig, daß das arithmetische Mittel zuerst ausprobiert wird, und zwar bei jeder Regel. Vermutlich identifizieren Schüler die Begriffe Mittelwert und arithmetisches Mittel, weil ihnen als Mittelwert nur das arithmetische Mittel geläufig ist. Daß gerade dies arithmetische Mittel eine Lösung für Regel d) darstellt ist schwierig herauszufinden. Die Schüler vermuten zunächst oft, daß die Lösung stärker von den großen Zahlenwerten abhängt und deshalb eher zu groß als zu klein gewählt werden sollte. Wer auch hier zunächst das arithmetische Mittel ausprobiert, entdeckt schnell die Lösung.

Die meisten Schüler haben große Mühe, eine Lösung für Regel c) zu finden. Erst wenn sie den Modalwert ausprobiert haben, entdecken sie plötzlich, daß jeder Kartenwert als Lösung in Frage kommt.

Auch Schüler, die die Lösungen nicht allein finden, machen nützliche Erfahrungen und können bei einer anschließenden Diskussion die notwendigen Einblicke gewinnen.

Es ist nicht immer leicht, den Text oder die Symbolik der Regelkarten auf Anhieb zu verstehen. Viele Schüler sehen nicht den Unterschied zwischen "Betrag der Summe der Abweichungen" und "Summe der Beträge der Abweichungen". Es dürfte sich deshalb lohnen, auf solche Formulierungen einzugehen, weil damit eine differenzierte Textauffassung geschult wird.

Ganz nebenbei übt das Spiel die Handhabung des Betrages, der quadratischen Abweichung und ähnlicher Begriffe ein. Darüber hinaus macht es den Schüler damit vertraut, wie kleine Änderungen der Variablen den Wert einer Funktion beeinflussen.

Originaltitel in 'TEACHING STATISTICS' (1980) Vol. 2/Nr. 3
Minimise Your Losses
Übersetzung und Bearbeitung: B. Daun