Anmerkungen und Ergänzungen zu C. PENDLEBURY:

Ein ungewöhnliches Wochenende im Zweitligafußball

von Heinz Klaus Strick, Leverkusen

In Heft 3/82 von STOCHASTIK IN DER SCHULE wurde im o.a. Aufsatz untersucht, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein gewisses Wochenendresultat im Fußball auftritt: Von 11 Spielen in der 2. englischen Liga waren 7 Unentschieden und 4 Heimniederlagen, obwohl Unentschieden in der 2. Liga nur mit einem Anteil von ca. 27,7 % und Heimniederlagen nur mit einem Anteil von ca. 22,7 % auftreten.

Am Ende des Aufsatzes wird die Frage gestellt, ob durch die Einführung einer neuen Wertung die Anteile von Heimsiegen, Unentschieden und Heimniederlagen sich verändern würden. Von der Spielzeit 1981/82 an gilt nämlich die folgende Regelung: Siege werden mit 3 Pluspunkten, Unentschieden weiterhin mit 1 Pluspunkt bewertet.

Nun, die Spielzeit 1981/82 ist vorüber, und die Verantwortlichen des englischen Fußball-Verbandes werden enttäuscht sein: Der Anteil der 'unentschiedenen' Spiele hat sich kaum geändert: Zwar hat der Anteil der Heimsiege abgenommen (46,5 % gegenüber vorher ca. 51 %) und der Anteil der Heimniederlagen zugenommen (27,3 % gegenüber vorher ca. 22 %), aber insgesamt blieb der Anteil der Unentschieden bei 26,2 % - gegenüber vorher ca. 27 %.
(Die Daten stammen aus der 1. englischen Liga).

Wenn man die einzelnen Spielergebnisse anschaut, dann fällt auf, daß in der (1.) englischen Liga deutlich weniger Tore pro Spiel fallen als in der 1. Bundesliga: In 462 Spielen der Spielzeit 81/82 fielen in England 1173 Tore; das sind ca. 2,5 Tore pro Spiel; während in der Bundesliga in 306 Spielen 1081 Tore geschossen wurden; das sind ca. 3,5 Tore pro Spiel (81/82).

(Nach Änderung der Punktewertung, die die Spiele offensiver machen sollte, fielen in der Spielzeit 81/82 sogar weniger Tore als in der Spielzeit 80/81!)

Man vergleiche auch die Anzahl der Spiele mit k Toren in beiden Ligen: siehe Tabelle 1.

Übrigens: Auch für die Verteilung der Tore in der englischen Liga lassen sich ähnliche Beobachtungen machen wie in der Bundesliga (vgl. (1)).

Anzahl der Tore k	Anteil der Spiele (Anzahl der Spiele) mit k Toren: 1. Bundesliga	1. Englische Liga
0	4% (12)	10 % (46)
1	9 % (27)	21 % (95)
2	20 % (62)	23 % (107)
3	20 % (60)	19 % (89)
4	47 % (145)	27 % (125)

Tabelle 1: Vergleich der Verteilung der Tore in der 1. Bundesliga und der 1. Englischen Liga

Eine zweite Frage soll hier noch angesprochen werden: Wie sieht es in der Bundesliga mit 'ungewöhnlichen' Wochenendresultaten aus?

Dem Autor liegen die Ergebnisse der 102 Spieltage der Spielzeiten 79/80 bis 81/82 vor. Von den 9 Spielen eines Spieltags waren k_1 Siege der Heimmannschaft und k_2 Unentschieden (und $9-k_1-k_2$ Siege der Gastmannschaft): siehe Tabelle 2.

Welche Resultate sind davon ungewöhnlich?

Man kann die einzelnen Spiele eines Spieltags als voneinander unabhängig ansehen, so daß ein Spieltag in der Bundesliga aufgefaßt werden kann als ein 9-stufiger Zufallsversuch. Jede Stufe hat die Ausgänge

- Heimsieg (mit Wahrscheinlichkeit 57 %)
- Unentschieden (mit Wahrscheinlichkeit 23 %)
- Heimniederlage (mit Wahrscheinlichkeit 20 %)

(Die Wahrscheinlichkeiten wurden aufgrund der Ergebnisse der genannten Spielzeiten geschätzt.)

Anzahl der Heimsiege \ Anzahl der Unentschieden	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x
2	-	1	1	1	1	-	-	1	x	
3	-	-	2	4	-	1	-	x		
4	-	1	6	5	2	3	x			
5	2	6	11	12	2	x				
6	2	12	8	2	x					
7	3	4	5	x						
8	1	2	x							
9	1	x								

Tabelle 2: Empirische Verteilung der Heimsiege und Unentschieden an einem Spieltag der Fußball-Bundesliga in den Spielzeiten 79/80 - 81/82 (insgesamt 102 Spieltage)

Anzahl der Heimsiege \ Anzahl der Unentschieden	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	.001	.002	.001	0	0	0	x
2	0	.001	.004	.008	.009	.006	.002	0	x	
3	.001	.007	.020	.030	.026	.012	.002	x		
4	.004	.024	.056	.065	.037	.009	x			
5	.012	.056	.096	.074	.021	x				
6	.023	.080	.091	.035	x					
7	.028	.065	.037	x						
8	.020	.023	x							
9	.006	x								

Tabelle 3: Polynomialverteilung für $n = 9$ und $p_1 = 0,57$; $p_2 = 0,23$; $p_3 = 0,20$

Für alle k_1, k_2, $k_3 (=0,1,2, \ldots, 9 ; k_1+k_2+k_3 = 9)$ kann man dann die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, daß an einem Spieltag k_1 Spiele Heimsiege, k_2 Spiele Unentschieden und k_3 Spiele Heimniederlagen sind (Polynomialansatz, vergl. (2)):

$$P(X_1=k_1, X_2=k_2, X_3=k_3) = \frac{9!}{k_1!\,k_2!\,k_3!}\, 0,57^{k_1} \cdot 0,23^{k_2} \cdot 0,20^{k_3}$$

Man erhält dann die folgende Verteilung: siehe Tabelle 3.

Auf diese Weise lassen sich zwar Wahrscheinlichkeiten für einzelne Ausgänge berechnen, aber wie kann man beurteilen, welche Spieltage 'ungewöhnlich' sind?

Es genügt nicht, alle Ausgänge hierzu zu zählen, die mit einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit auftreten. Im Sinne der beurteilenden Statistik müßte man vielmehr einen Bereich beschreiben (kritischer Bereich), außerhalb dessen Ausgänge insgesamt nur mit einer kleinen Wahrscheinlichkeit auftreten, z.B. 1 % oder 5 %.

Für die Bestimmung eines solchen Bereichs benötigt man eine Größe, die Abweichungen zu den Erwartungswerten

$$\mu_1 = 9 \cdot 0,57 = 5,13$$
$$\mu_2 = 9 \cdot 0,23 = 2,07$$
$$\mu_3 = 9 \cdot 0,20 = 1,80$$

mißt. Dies geschieht mit Hilfe der Zufallsgröße χ^2:

$$\chi^2 = \frac{(X_1 - \mu_1)^2}{\mu_1} + \frac{(X_2 - \mu_2)^2}{\mu_2} + \frac{(X_3 - \mu_3)^2}{\mu_3}$$

Welche Werte von χ^2 sind möglich? Dazu berechnen wir für k_1, k_2, $k_3 = 0,1,2, \ldots, 9$, $k_1+k_2+k_3 = 9$ die entsprechenden Werte: siehe Tabelle 4.

Beispiel: Für den Ausgang (4 ; 3 ; 2) (4 Heimsiege - 3 Unentschieden - 2 Heimniederlagen) ergibt sich:

Anzahl der Heimsiege \ Anzahl der Unentschieden	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	⊖	⊖	⊖	⊖	⊖	⊖	⊖	⊖	⊖	⊖
1	⊖	⊖	⊖	9.43	7.81	8.27	⊖	⊖	⊖	x
2	⊖	⊖	7.62	5.02	4.51	6.08	9.73	0	x	
3	⊖	7.12	3.57	2.10	2.70	5.39	⊖	x		
4	8.01	3.49	1.05	0.69	2.41	6.20	x			
5	4.76	1.35	0.03	0.78	3.60	x				
6	3.02	0.72	0.51	2.37	x					
7	2.77	1.59	2.48	x						
8	4.04	3.96	x							
9	6.79	x								

Tabelle 4: Werte von χ^2 zu den Erwartungswerten
$\mu_1 = 5,13$; $\mu_2 = 2,07$; $\mu_3 = 1,80$
(⊖ bedeutet: $\chi^2 > 10$)

Anzahl der Heimsiege \ Anzahl der Unentschieden	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	.001	.002	.001	0	0	0	x
2	0	.001	.004	.008	.009	.006	.002	0	x	
3	.001	.007	.020	.030	.026	.012	.002	x		
4	.004	.024	.056	.065	.037	.009	x			
5	.012	.056	.096	.074	.021	x				
6	.023	.080	.091	.035	x					
7	.028	.065	.037	x						
8	.020	.023	x							
9	.006	x								

Tabelle 5: Aus den Tabellen 3 und 4 entnommen: Bereiche mit
$\chi^2 \leq 1$ – – – bzw. $\chi^2 \leq 2$ ———

$$\chi^2(4;3;2) = \frac{(4-5,13)^2}{5,13} + \frac{(3-2,07)^2}{2,07} + \frac{(2-1,80)^2}{1,80}$$

$$= 0,25 + 0,42 + 0,02 = 0,69.$$

Aus Tabelle 3 und Tabelle 4 kann man ablesen, mit welchen Wahrscheinlichkeiten bestimmte Werte von χ^2 auftreten:

$p(\chi^2 \leq 1) = 0,065 + 0,096 + 0,074 + 0,080 + 0,091 = 0,406$
$p(\chi^2 \leq 2) = 0,406 + 0,056 + 0,056 + 0,065 = 0,583$
$p(\chi^2 \leq 3) = 0,583 + 0,030 + 0,026 + 0,037 + 0,035 + 0,037 + 0,028 = 0,776$
$p(\chi^2 \leq 4) = 0,776 + 0,020 + 0,024 + 0,023 + 0,023 + 0,021 = 0,887$
$p(\chi^2 \leq 5) = 0,087 + 0,009 + 0,020 + 0,012 = 0,928$
$p(\chi^2 \leq 6) = 0,928 + 0,008 + 0,012 = 0,948$
$p(\chi^2 \leq 7) = 0,948 + 0,006 + 0,009 + 0,006 = 0,969$
$p(\chi^2 \leq 8) = 0,969 + 0,007 + 0,004 + 0,002 = 0,982$
$p(\chi^2 \leq 9) = 0,982 + 0,001 + 0,004 = 0,987$
$p(\chi^2 \leq 10) = 0,987 + 0,001 + 0,002 = 0,990$

Tabelle 6: (Kumulierte) Verteilung von χ^2 für n = 9 und
$p_1 = 0,57$; $p_2 = 0,23$; $p_3 = 0,20$

Anzahl der Heimsiege \ Anzahl der Unentschieden	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	x
2	–	1	1	1	1	–	–	1	x	
3	–	–	2	4	–	1	–	x		
4	–	1	6	5	2	3	x			
5	2	6	11	12	2	x				
6	2	12	8	2	x					
7	3	4	5	x						
8	1	2	x							
9	1	x								

(– – – $P(\chi^2 \leq 6) \approx 0,95$
——— $P(\chi^2 \leq 10) \approx 0,99$)

Tabelle 7: Kritische Bereiche zum 95 % - und 99 % - Niveau

Aus Abbildung 2 werden die Bereiche deutlich, in denen mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % bzw. ca. 99 % die Resultate eines Spieltags liegen.

Im Sinne dieser Beschreibung sind die Resultate (2 ; 1 ; 6) und (2 ; 7 ; 0) die eines ungewöhnlichen Wochenendes, da das Ereignis $\chi^2 > 10$ mit einer Wahrscheinlichkeit von nur 1 % eintritt. Abschließend seien noch die empirischen Werte aus Tabelle 2 mit der theoretischen Verteilung von χ^2 verglichen: siehe Tabelle 8.

k	$p(\chi^2 \leq k)$	Anteil der Spieltage mit $\chi^2 \leq k$
1	41 %	47 %
2	58 %	63 %
3	78 %	78 %
4	89 %	87 %
5	93 %	91 %
6	95 %	93 %
7	97 %	97 %
8	98 %	98 %

Tabelle 8: (Kumulierte theoretische und empirische Verteilung von

Hier ist eine gute Übereinstimmung festzustellen.

Literatur:

(1) : STRICK, H.K. : Fußball-Bundesliga und Stochastikunterricht, Stochastik in der Schule 1/82

(2) : STRICK, H.K. : Der Chiquadrat-Anpassungstest im Mathematik- und im Biologieunterricht der Sekundarstufe II, MNU 34 (1981), 139 ff.