ERWARTUNGSWERT STETIGER ZUFALLSVARIABLEN - GENAU WIE ERWARTET

nach Petronellade Roos, University of Otago, Dunedin
Originaltitel in 'Teaching Statistics' Vol. 5 (1983), Nr. 3: Continuous Expectation: Just as Expected!
Übersetzung: K. Röttel, Bearbeitung: B. Wollring

Einleitung

Viele Kurse zur elementaren Statistik bringen die Formeln

(1) $\bar{x} = (\sum_{i=1}^{n} x_i f_i) / (\sum_{i=1}^{n} f_i)$

für den Mittelwert endlich vieler Daten x_i mit den absoluten Häufigkeiten f_i,

(2) $\mu_d = \sum_{x_1 \in W(X)} x_i p_i$

für den Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen und

(3) $\mu_c = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$

für den Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen.

Daß (1) ein Sonderfall von (2) ist, sieht man sofort. Daß (1) in (2) übergeht, kann mit der üblichen Definition der Wahrscheinlichkeit eingesehen werden: Mit der 'Stabilisierung' der relativen Häufigkeit kann gezeigt werden, daß sich μ_d aus $\bar{x}$ ergibt. Die Verwandtschaft von (2) und (3) wird gewöhnlich schnell erledigt: "Man ersetze die Summation durch die Integration, die Wahrscheinlichkeitsfunktion durch die Dichtefunktion, und schon sehen sie sich gleich!" Dieser unbefriedigende Zugang ist nicht notwendig. Die Verwandtschaft von (2) und (3), ähnlich der von (1) und (2), kann nämlich leicht gezeigt werden.

Wir nehmen an, daß X eine stetige Zufallsvariable ist und daß X nicht selbst, sondern eine durch Rundung entstandene Variante beobachtet wird. Das ist zum Beispiel bei einem Meßexperiment mit einer stetigen Zufallsvariablen der Fall, von der nur diskrete Werte festgestellt werden können. Diese sind auf die kleinste Meßeinheit gerundet, die die Genauigkeit der Meßvorrichtung gestattet (z. B. Kilogramm). Technische Verbesserungen erlauben immer weitere Verfeinerungen (z. B. Gramm, Zentigramm, Milligramm). Der Erwartungswert der gerundeten diskreten Zufallsvariablen geht dabei in den Erwartungswert der kontinuierlichen Verteilung über. So ist durch Rundung (3) auf (2) zurückführbar. Wie man zeigen kann, ist (3) der Grenzwert von (2). Im Abschnitt *Beweis* wird dies für Schüler mit entsprechenden Kenntnissen gezeigt. Die anderen Schüler dürften das folgende Modell leicht verstehen. Die sich anschließenden numerischen Beispiele werden die meisten überzeugen, daß zwischen (1), (2) und (3) eine Wechselbeziehung besteht.

Modell

Es sei X eine stetige Zufallsvariable mit dem Intervall [a;b] als Wertebereich, mit der stetigen Dichtefunktion (DF) $x \mapsto f(x)$ und der Verteilungsfunktion (VF) $x \mapsto F(x) = P(X \le x)$. Wir nehmen an, daß wir X nicht selbst beobachten können, sondern nur in der Lage sind, jedem Wert von X eine von n Klassen der Länge h zuzuweisen. Der Wertebereich von X ist also in n Klassenintervalle

$[a;a+h[;\ [a,a+2h[;\ \text{—};\ [a;\ a+(n-1)h;\ b]$

unterteilt, wobei $h = (b-a)/n$ gilt.

Wenn wir annehmen, daß alle in einem Klassenintervall liegenden Beobachtungswerte mit dessen Mittelpunkt zusammenfallen, haben wir praktisch eine diskrete Zufallsvariable definiert, wir nennen sie X_n, die den Wertebereich $W(X_n) = \{a+(i-0.5)h \mid i=1,2,...,n\}$ und die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p_i = P(X_n=a+(1-0.5)h) = F(a+ih)-F(a+(i-1)h),$$
$$i = 1,2,\ \text{—},\ n$$

besitzt. Der Erwartungswert $E(X_n) = \mu_d(n)$ kann nun anhand von (2) gefunden werden.

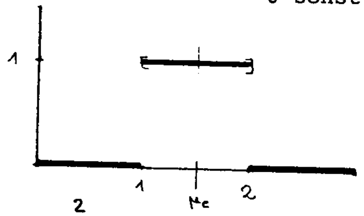
Im Abschnitt *Beweis* zeigen wir, daß $\mu_d(n)$ in μ_c übergeht, wenn n gegen ∞ strebt. Schon die folgenden Beispiele dürften die meisten Schüler überzeugen.

Beispiele

In den Beispielen 1 und 2 wird durch algebraische Umformungen ein einfacher Term für $\mu_d(n)$ gewonnen. Danach wird der Grenzübergang für $n \to \infty$ vollzogen.

<u>Beispiel 1</u>

X habe die DF: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



Graph zur DF
$x \mapsto f(x)$

a) $\mu_c = \int_1^2 x\,dx = 1.5$

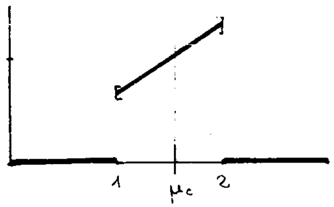
b) Teile [1;2] in n Intervalle der Länge $h = \frac{1}{n}$.
Die VF von X ist $F(x) = P(X \le x) = x-1,\ x \in [1;2]$.
Das Modell liefert:

$$\mu_d(n) = \sum_{i=1}^{n} (1+(i-0.5)h)\cdot(ih-(i-1)h)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (1+(i-0.5)h)\cdot h$$
$$= nh + h^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (i-0.5)$$
$$= nh + h^2\left(\tfrac{n}{2}(n+1) - \tfrac{n}{2}\right)$$
$$= 1.5, \text{ da } nh = 1$$
$$= \mu_c$$

Es gilt also $\mu_d(n) = \mu_c$, weil f(x) über [1;2] konstant ist und kein Fehler dadurch entsteht, daß alle in ein Teilintervall fallenden Werte mit dessen Mittelpunkt identifiziert werden.

<u>Beispiel 2</u>

X habe die DF: $f(x) = \begin{cases} 2x/3 & \text{für } 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



Graph zur DF
$x \longmapsto f(x)$

a) $\mu_c = \int_1^2 2x^2/3\,dx = 14/9$

b) Die VF von X ist $F(x) = \frac{1}{3}(x^2-1),\ x \in [1;2]$.

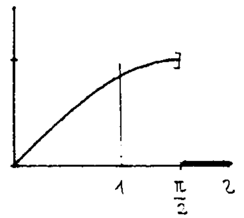
$$\mu_d(n) = \sum_{i=1}^{n} (1+(i-0.5)h)\cdot\frac{1}{3}\cdot\left((1+ih)^2-1-((1+(i-1)h)^2-1)\right)$$
$$= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} (1+(i-0.5)h)\ (2h+2ih^2-h^2)$$
$$= 14/9-h^2/18, \text{ da } \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2,$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6 \text{ und } nh=1$$

Also gilt: $\lim\limits_{h \to 0} \mu_d(n) = \mu_c$

Bei den folgenden Beispielen 3 und 4 steht nicht das Auffinden eines geschlossenen Terms für $\mu_d(n)$ im Vordergrund, sondern die Berechnung einzelner Werte von $\mu_d(n)$ und die Feststellung, daß diese offensichtlich gegen μ_c konvergieren.

Beispiel 3

X habe die DF: $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{für } x \in [0;\pi/2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



Graph zu DF
$x \longmapsto f(x)$

a) $\mu_c = \int_0^{\pi/2} x\sin x dx = 1$ (durch partielle Integration)

b) Die VF von X ist $F(x) = 1-\cos x$ für $x \in [0,\pi/2]$.

$$\mu_d(n) = \sum_{i=1}^{n} (i-0.5)h \ (\cos((i-1)h)-\cos(ih)).$$

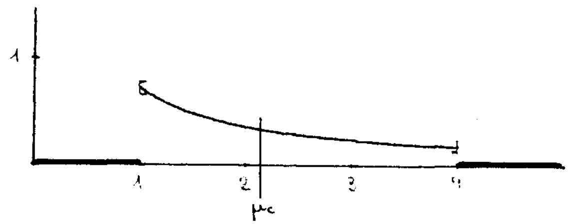
Mit einem Rechner können folgende Werte leicht ermittelt werden:

n	2	5	10	50
$\mu_d(n)$	0.94806	0.99176	0.99794	0.99992

Wie wir sehen, ist die Näherung schon für kleine n gut. Mit diesem Verfahren kann μ_c gewonnen werden, wenn die partielle Integration nicht bekannt ist.

Beispiel 4

X habe die DF: $f(x) = \begin{cases} (x\ln 4)^{-1} & \text{für } x \in [1;4] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



Graph zur DF
$x \longmapsto f(x)$

a) $\mu_c = (\ln 4)^{-1} \int_1^4 x/x dx = 3/\ln 4 \approx 2.16404256$

b) Die VF von X ist $F(x) = \ln x/\ln 4$ für $x \in [1;4]$.

$$\mu_d(n) = \sum_{i=1}^{n} (1+(i-0.5)h) \ (\ln(1+ih)-\ln(1+(i-1)h))/\ln 4$$

n	2	5	10	50
$\mu_d(n)$	2.25855	2.18004	2.16808	2.16405

Da unser Ansatz herausstellen will, daß (3) der Grenzwert von (2) ist, sollten Beispiele wie 3 und 4 auch wegen der Rundungsfehler mit großer Vorsicht behandelt werden. Viele Schüler dürften jedoch lieber durch algebraische Umformungen eine geschlossene Form für $\mu_d(n)$ herleiten.

Beweis

Aus (2) folgt:

$$\mu_d(n) = E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} (a+(i-0.5)h) \cdot (F(a+ih)-F(a+(i-a)h))$$

Da f stetig auf $[a;b]$ ist, ist F auf $[a;b]$ differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz gibt es daher Werte $z_i \in]a+(i-1)h; a+ih[$ mit

$$F(a+ih)-F(a+(i-1)h) = f(z_i) \cdot h .$$

Also erhalten wir zunächst:

$$\mu_d(n) = E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} (a+(i-0.5)h) \cdot f(z_i) \cdot h$$

Auf dem kompakten Intervall $[a;b]$ ist f als stetige Funktion sogar gleichmäßig stetig. Zu jedem $E > 0$ gibt es daher ein $N(E)$, so daß für alle $n > N(E)$ gilt:

$$|f(a+(i-0.5)h)-f(z_i)| < E \text{ für alle } i$$

Und daher gilt für $n > N(E)$:

$$|\mu_d(n) - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (a_i+(i-0.5)h)\cdot f(a_i+(i-0.5h)\cdot h}_{(*)}| < E \cdot \text{const.}$$

Andererseits ist $x \longmapsto xf(x)$ ebenfalls stetig auf $[a;b]$, daher konvergiert nach Definition des Riemann-Integrals die "Zwischensumme" (*) gegen $\int_a^b xf(x)dx$.

Wenn nun h gegen 0, also n gegen ∞ strebt, so "gehen die diskreten Zufallsvariablen X_n in die Stetige Zufallsvariable X über". Aus den Betrachtungen oben erhält man:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mu_d(n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a+(i-0.5)h)\cdot(F(a+ih)-F(a+(i-1)h)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a+(i-0.5)h)\cdot f(z_i)h \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a+(i-0.5)h)\cdot f(a+(i-0.5)h)\ h \\
&= \int_a^b xf(x)dx \\
&= \mu_c
\end{aligned}$$

Schlußbemerkung

Dieser Zugang zum Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen, durch einige wirkungsvolle Beispiele veranschaulicht, sollte die Zweifel beseitigen, die viele Schüler hinsichtlich des Zusammenhangs von (2) und (3) hegen und sie durch die klare Feststellung ersetzen, daß die kontinuierliche Erwartung nur eine kontinuierliche Version der diskreten Erwartung ist.

Literatur zum Vergleich

KOSSWIG, F. W.: Ein Zugang zu stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Parametern. - MNU 32 (1984), 2 (81-86)