verteilt, sondern geometrisch verteilt, aber beim Grenzübergang $N \to \infty$ gehen die beiden diskreten Verteilungen in die entsprechneden stetigen Verteilungen über. Die Annäherung ist für $p \leq 1/10$ hinreichend gut.

Ich möchte nun noch einmal auf die von Herrn Lindenau auf Seite 48 geäußerten Bedenken zurückkommen. Die Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \lambda \cdot \Delta t$ bei der Bernoullikette ist die Ankunftswahrscheinlichkeit für einen Kunden in einem Teilintervall T_i. Kürzere Intervalle als die T_i treten im Modell nicht auf und die Ankunftswahrscheinlichkeit für Intervalle mit einer vielfachen Länge von Δt sind nicht proportional zur Zeit. Betrachten wir ein Intervall I der Länge $2 \cdot \Delta t$, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens 1 Kunde im Intervall ankommt $1-(1-p)^2$, und das ist ungleich $2 \cdot p$ für $p > 0$.

Abschließend möchte ich feststellen, daß mir alle drei Modelle M1, M2 und M3 geeignet erscheinen, Kundenströme in der Sekundarstufe I zu simulieren. Auf die Vor- und Nachteile der einzelnen Modelle möchte ich an dieser Stelle nicht weiter eingehen. Welches Modell im Einzelfall zu Simulation herangezogen wird, dürfte weitgehend von den Vorkenntnissen der Schüler und von der Aufgabenstellung abhängen.

V. Lindenau: ERGÄNZENDE BEMERKUNGEN zu dem Artikel "Einfache Simulationsmodelle für Warteschlangen" (Stochastik in der Schule, Heft 3/1988)

Herr Rainer Schmidt aus Göttingen hat in einem Brief an die Redaktion darauf hingewiesen, daß die angegebenen Simulationsalgorithmen deutlich kleinere durchschnittliche Warteschlangenlängen liefern als die nach der Formel

$$\bar{L} = \frac{\lambda^2}{\mu^2 - \mu\lambda}$$

für das (M;M;1)-Bedienungsmodell berechneten.

Zu diesem völlig richtigen Einwand möchte ich Stellung nehmen:

Die schlechten Simulationsergebnisse haben ihre Ursache zunächst einmal darin, daß jedes der beiden angegebenen Simulationsmodelle vom (M;M;1)-Bedienungsmodell in wesentlichen Punkten abweicht. So wird im ersten Modell angenommen, daß die Kunden gruppenweise und mit konstanter Bedienungszeit bedient werden, und im zweiten Modell wird unzulässigerweise von einer von vornherein feststehenden Gesamtkundenzahl ausgegangen, außerdem von einer konstanten Bedienungszeit.

Trotzdem ist - zumindest beim ersten Simulationsalgorithmus - die Übereinstimmung der sich ergebenden Warteschlangenlänge mit der für das (M;M;1)-Bedienungsmodell berechneten sogar recht gut: man muß nämlich, wenn man diesen Vergleich vornimmt, die auf Seite 51 des Textes erwähnte Wartezeit der Kunden in ihrem Ankunftszeitintervall berücksichtigen; dadurch erhöht sich die Warteschlangenlänge im Durchschnitt um $\lambda/2$:

a zu dem Beispiel von Seite 52 oben gehören die Ankunftsrate $\lambda = 5$ und die Bedienungsrate $\mu = 6$; es ist also $\lambda/2 = 2.5$; die Simulation hatte als (zusätzliche) durchschnittliche Länge der Warteschlange den Wert 1.4 ergeben, also

$\bar{L}$(simuliert) $\approx$ 2.5 + 1.4 = 3.9 Kunden

b Theoretisches Ergebnis im (M;M;1)-Modell:

$$\bar{L} = \frac{\lambda^2}{\mu^2-\mu\lambda} = \frac{25}{36-30} \approx 4{,}17.$$

Eine weitere Ursache für "schlechte" Simulationsergebnisse ist in der Tatsache zu sehen, daß die Warteschlangenlängen Zufallsgrößen mit sehr großer Streuung sind (siehe Seite 57 des Textes). Im (M;M;1)-Bedienungssystem hat die Warteschlangenlänge L die Streuung:

$$\sigma_L = \frac{\lambda^2}{\mu^2-\mu\lambda}\sqrt{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 + \frac{\mu}{\lambda} - 1},$$

und diese ist somit größer als der Erwartungsert $\frac{\lambda^2}{\mu^2-\mu\lambda}$ von L (!);im Beispiel λ = 5, μ= 6, $\bar{L}$= 4.17 ist die Streuung von L gleich 5.34. Dies hat in der Praxis eine verhängnisvolle Konsequenz: Ab und zu treffen im Warteraum des Bedienungssystems innerhalb kurzer Zeit sehr viele Kunden ein, die eine sehr lange, sich nur langsam abbauende Warteschlange bilden. Die selten auftretenden, sehr langen Warteschlangen "verderben" den Durchschnitt (d.h. vergrößern die durchschnittliche Warteschlangenlänge). Auch die geringe Stabilität der mit den Simulationsalgorithmen ermittelten durchschnittlichen Warteschlangenlängen beruht auf der großen Streuung der Warteschlangenlänge. Beim Simulationsmodell M2 (Seite 52/53) wird durch die Annahme einer Gesamtkundenzahl das zufällige starke Anwachsen des Kundenstroms geradezu ausgeschlossen, so daß die sich ergebende durchschnittliche Warteschlangenlänge unter der für das (M;M;1)-Modell berechneten liegt.

In der dem Text vorangestellten "Zusammenfassung" habe ich insofern zuviel versprochen: nicht das (M;M;1)-Bedienungsproblem selbst wird durch Simulation gelöst, sondern jeweils - durch jeden der beiden Simulationsalgorithmen - ein durch wesentliche Vereinfachungen sich ergebendes Bedienungsproblem.