

CONDORCET'S PARADOXON

von MARY ROUNCEFIELD und DAVID GREEN

Originaltitel in "Teaching Statistics" Vol. 11 (1989), Nr. 2:

CONDORCET's Paradoxon

Übersetzung und Bearbeitung: G. Scheu

Zusammenfassung: Die Autoren beschreiben verschiedene Modelle für die nicht transitive Relation "gewinnt gegen" und zeigen deren Äquivalenz bzw. deren Vor- und Nachteile. Sie präsentieren ein Kreiselmmodell sowie Tabellen zur Auswertung von Versuchssreihen und begründen theoretisch die Ergebnisse.

ZDM-Klassifikation: K 50, K 60

In den letzten Jahren sind verschiedene Versionen des im folgenden beschriebenen Paradoxons gegeben worden. In diesem Artikel werden folgende Wahrscheinlichkeiten benutzt und mit selbst angefertigten Kreiseln realisiert (s. Seite 23):

P(A gewinnt gegen B) = 5/9, d.h. A ist besser als B

P(B gewinnt gegen C) = 5/9, d.h. B ist besser als C

P(A gewinnt gegen C) = 4/9, d.h. A ist nicht besser als C

Mit dieser Definition kann es vorkommen, daß bei einer großen Anzahl von Versuchen der Kreisel A nicht gegen den Kreisel C gewinnt, obwohl der Kreisel A gegen den Kreisel B und der Kreisel B gegen den Kreisel C gewinnt! D.h. als intuitives Zählergebnis ergibt sich, daß die Relation "gewinnt gegen" nicht transitiv ist.

DAVID GREEN hat 1981 in einem Artikel in der Zeitschrift "Mathematics in School" drei nicht transitive Würfel beschrieben und sie als Chinesische Würfel bezeichnet. Diese Würfel sind folgendermaßen beschriftet:

Würfel A: 6, 6, 2, 2, 2, 2

Würfel B: 5, 5, 5, 5, 1, 1

Würfel C: 4, 4, 4, 3, 3, 3

Damit erhält man folgende Wahrscheinlichkeiten:

P(A gewinnt gegen B) = 5/9

P(B gewinnt gegen C) = 6/9

P(A gewinnt gegen C) = 3/9

(Die Summe dieser drei Wahrscheinlichkeiten ist auch 14/9 wie bei den obigen Kreiseln.)

Nach dem Erscheinen des Artikels hat D. GREEN viele Zuschriften erhalten. S. AINLEY hat 1978 in seinem Buch "Mathematical Puzzles" vier nicht transitive Würfel beschrieben. Diese Würfel sind folgendermaßen beschriftet:

Würfel A: 7, 7, 7, 7, 1, 1

Würfel B: 6, 6, 5, 5, 4, 4

Würfel C: 9, 9, 3, 3, 3, 3

Würfel D: 8, 8, 8, 2, 2, 2

Die Würfel haben die angenehme Eigenschaft, daß sie paarweise zyklisch angeordnet immer die gleiche Wahrscheinlichkeit erzeugen:

P(A gewinnt gegen B) = 2/3

P(B gewinnt gegen C) = 2/3

P(C gewinnt gegen D) = 2/3

P(D gewinnt gegen A) = 2/3

(Diese Eigenschaft ist auch bei den drei Kreiseln vorhanden, nicht aber bei den drei Würfeln von D. GREEN.)

Ebenfalls vier nicht transitive Würfel haben M. ROUNCEFIELD und P. HOLMES in einem Artikel in der Zeitschrift "Practical Statistics" beschrieben. Diese Würfel sind folgendermaßen beschriftet:

Würfel A: 2, 2, 2, 2, 6, 6

Würfel B: 5, 5, 5, 1, 1, 1

Würfel C: 4, 4, 4, 4, 0, 0

Würfel D: 3, 3, 3, 3, 3, 3

Diese vier Würfel sind zu den anderen vier Würfeln äquivalent, wie man durch Umordnen der Zahlen unter Beibehaltung der Relation "gewinnt gegen" zeigen kann. Die Transformationen von den ersten zu den zweiten Zahlen sind:

9 → 6, 8 → 5, 7 → 4, 6 → 3, 5 → 3, 4 → 3, 3 → 2, 2 → 1, 1 → 0.

S. AINLEY hat gezeigt, daß die Eigenschaft "Güte" eines Würfels transitiv ist, wenn der Verlierer dem Gewinner einen Betrag auszahlt, der proportional zur Differenz der gewürfelten Zahlen ist (es gibt also keinen festen Wetteinsatz). Es sei z. B. bei jedem Kreisel in diesem Artikel die Summe der Zahlen gleich 15, dann ist jeder Kreisel so "gut" wie der andere, wenn die Auszahlung proportional zu der Differenz der Zahlen ist. Mit einfachen Wahrscheinlichkeitsberechnungen kann gezeigt werden, daß der von A zu erwartende Gewinn, wenn A gegen B spielt, folgendermaßen berechnet wird:

$$1/9 [(1-3)+(1-4)+(1-8)+(5-3)+(5-4)+(5-8)+(9-3)+(9-4)+(9-8)] = 0.$$

Analoge Berechnungen, wenn B mit C und wenn C mit A spielt, ergeben ebenfalls Null. Bei den Würfeln von D. GREEN ist die Summe der Zahlen verschieden und die zu erwartenden Gewinne sind nicht Null. Es ist interessant zu untersuchen, warum die Summe der Zahlen ein Maß für die "Güte" eines Würfels ist.

Die Autoren würden sich freuen, wenn ihnen weitere verschiedene Anordnungen oder andere interessante Eigenschaften oder ähnliche Untersuchungen zu diesem Thema zugesandt würden. Sie hoffen, daß sie einige gute Ideen für Unterrichtsaktivitäten veröffentlichen können.

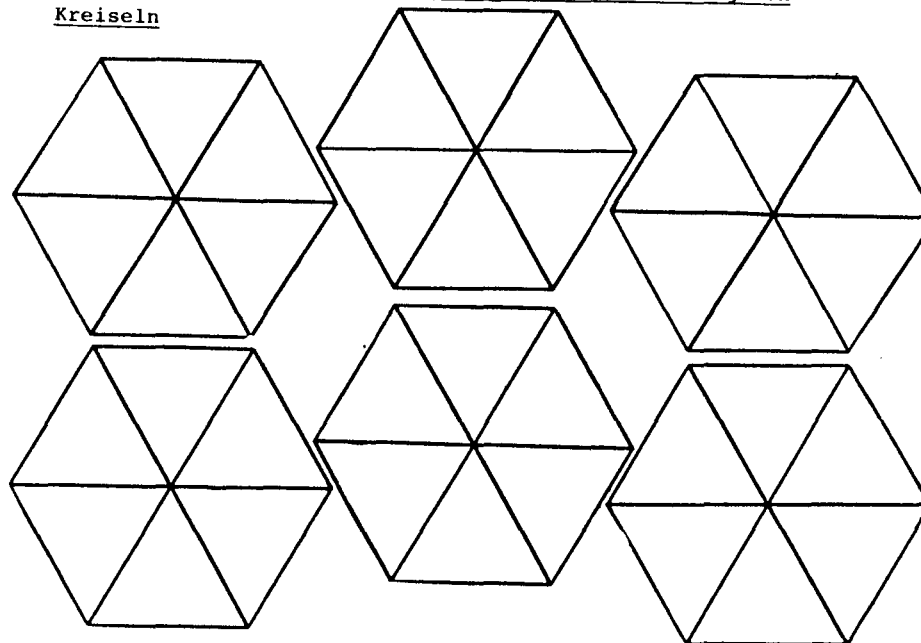
Literatur

AINLEY, S. (1978): Mathematical Puzzles, Bell and Hyman.
 GREEN, D. R. (1981): How Probability Pays, Mathematics in School, Vol. 10 (2), S. 23-24.
 HONSBERGER, R. (1979): Mathematical Plums, Dolciani Mathematical Expositions 4, The Mathematical Association of America.
 ROUNCFIELD, M. and HOLMES, P. (1989): Practical Statistics, Macmillan.

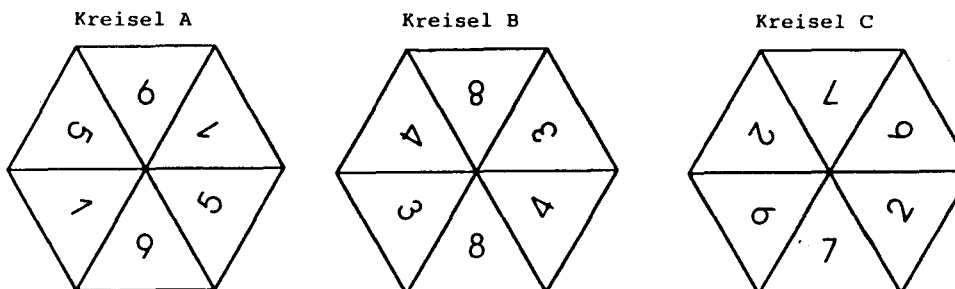
Die im folgenden vorgestellten Arbeitsblätter dürfen für Unterrichtszwecke kopiert werden. Beim Auswerten der dazugehörigen Versuchsreihen ergeben sich verschiedene Diskussionsthemen.

Zum Herstellen der Kreisel werden die sechseckigen Scheiben auf Karton geklebt und in der Mitte mit der Schere ein Loch gemacht, damit ein Bleistift durchgesteckt werden kann.

Unbeschriftete regelmäßige Sechsecke zur Herstellung von Kreiseln



Welcher Kreisel gewinnt?



Tabellen zum Auswerten der Versuche

Versuch 1 Man verwende Kreisel A und Kreisel B

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Punktzahl A | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Punktzahl B | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Gewinner | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Anzahl Gewinne

| | |
|---|--|
| A | |
| B | |

Versuch 2 Man verwende Kreisel B und C

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Punktzahl A | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Punktzahl B | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Gewinner | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Anzahl Gewinne

| | |
|---|--|
| B | |
| C | |

Versuch 3 Man verwende Kreisel A und C

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Punktzahl A | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Punktzahl B | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Gewinner | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Anzahl Gewinne

| | |
|---|--|
| A | |
| C | |

Welcher Kreisel gewinnt?

Versuchsreihen

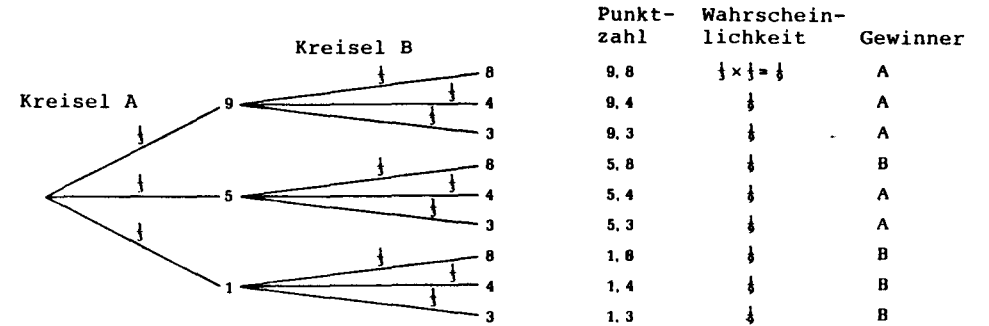
Bei jedem Versuch werden zwei Kreisel benutzt und die Zahlen von jedem Kreisel notiert. Der Gewinner ist der Kreisel mit den höchsten Zahlen. Man berechnet nach 16 Ergebnissen die Anzahl der Gewinne für jeden Kreisel. Welcher Kreisel hat den ersten Versuch gewonnen? Welcher den zweiten usw.? Gilt dies für eine größere Anzahl von Versuchen?

Welcher Kreisel ist der beste? (Welchen würdest Du benutzen?)

Du wirst bemerken, daß Deine Ergebnisse anders sind, als die Deines Nachbarn und daß bei jedem Versuch immer ein anderer Kreisel gewinnt. Erhält man ein klareres Bild, wenn man die Versuchsergebnisse mehrerer Spieler kombiniert? Da man bei

jedem Versuch andere Ergebnisse erhält, ist es sinnvoll, sich zuerst die zugehörigen theoretischen Wahrscheinlichkeiten zu überlegen, bevor man den Kreisel auswählt, welcher der tatsächliche Gewinner ist.

Versuch 1



Beim Versuch 1 sollte A theoretisch mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{9}$ und B mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{9}$ gewinnen.

Bestätigen die Versuche diese theoretischen Wahrscheinlichkeiten? Zeichne Baumdiagramme für die Versuche 2 und 3. Sind die experimentellen Ergebnisse in Übereinstimmung mit den theoretischen Wahrscheinlichkeiten? Welcher Kreisel ist der Gewinner?

Die vorgestellten Kreisel sind ziemlich ungewöhnlich. Die erhaltenen Ergebnisse werden als CONDORCET's Paradoxon bezeichnet. Kann man andere Kreisel oder Würfel mit den gleichen Eigenschaften herstellen? Man kann drei oder mehr Kreisel benutzen und man kann auch die Anzahl der Seiten bei einem "Würfel" ändern.