MODELLBILDEN IM STOCHASTIKUNTERRICHT

von GÜNTER SCHMIDT, Bad Kreuznach

Eine Unterrichtsreihe mit Einsatz des Computers zur Simulation und Veranschaulichung funktionaler Zusammenhänge

Zusammenfassung: In einem Unterrichtsprojekt in einem Leistungskurs der 12. Jahrgangsstufe werden die Auswirkungen einer (hypothetischen) Änderung der Tennisregeln durch stochastische Modellbildung untersucht. Dabei steht nicht nur das Ergebnis der Untersuchungen im Vordergrund, sondern ebenso der notwendige Prozeß der Modellbildung mit den eingesetzten Methoden der Simulation und der Auswertung funktionaler Abhängigkeiten. Es entspricht der gängigen Methode der Problemlösung mit Hilfe mathematischer Modelle, daß dabei der Computer als geeignetes Werkzeug eingesetzt wird. Es zeigt sich, daß die Schüler auf diese Weise die wesentlichen Schritte der Modellbildung und der darauf aufbauenden Problemlösung selbständig erarbeiten und kritisch würdigen können.

ZDM-Klassifikation: M 94, K 64

1. Einleitung

In dieser Zeitschrift erschien im Heft 2/1986 die Übersetzung eines Artikels von J. S. CROUCHER aus "Teaching Statistics" (1985), Vol. 7, in dem die Auswirkungen einer (hypothetischen) Änderung der Tennisregeln durch stochastische Modellbildung untersucht werden.

Die insgesamt recht knappen Darstellungen regten zu einem kleinen Unterrichtsprojekt an, das in einem Leistungskurs der 12. Jahrgangsstufe im Rahmen einer vertiefenden Wiederholung durchgeführt wurde. Dabei stand nicht nur das Ergebnis der Untersuchungen im Vordergrund, sondern ebenso der notwendige Prozeß der Modellbildung mit den eingesetzten Methoden der Simulation und der Auswertung funktionaler Abhängigkeiten. Es entspricht der gängigen Methode der Problemlösung mit Hilfe mathematischer Modelle, daß dabei der Computer als geeignetes Werkzeug eingesetzt wurde. Es zeigte sich, daß die Schüler auf diese Weise die wesentlichen Schritte der Modellbildung und der darauf aufbauenden Problemlösung selbständig erarbeiten und kritisch würdigen konnten.

2. Die Situation und das Problem

Änderung der Tennisregeln - Wer profitiert davon?

Geltende Tennisregel: Ein Spiel ("game") wird von dem Spieler gewonnen, der zuerst 4 Punkte gewinnt.
Davon ausgenommen ist der Fall, daß beide Spieler zuvor je 3 Punkte erreichen (Einstand/"deuce"). Dann wird so lange weitergespielt, bis einer der beiden Spieler 2 Punkte Vorsprung hat, dieser hat dann das Spiel gewonnen.

Änderung der Regel: Bei "deuce" ist der Gewinner des nächsten Punktes auch der Gewinner des Spiels.

Wir wollen den "Effekt" dieser Regeländerung überprüfen:

- Profitiert der stärkere oder der schwächere Spieler davon?
- Wird die mittlere zu erwartende Spieldauer dadurch wesentlich verkürzt?
- Lassen sich diesbezügliche Aussagen evtl. quantifizieren?

3. Erste (naive) Vermutungen

Das Tennisspiel ist mittlerweise recht populär. Viele Schüler bringen Erfahrung aus eigener Spielpraxis oder von den Fernsehübertragungen der großen Turniere mit. Für manche müssen die Tennisregeln und die gängigen Erfahrungen erläutert und bewußt gemacht werden.

Es liegt nahe, daß der etwas schwächere Spieler von der Regeländerung profitiert. Bei "deuce" entscheidet nach der neuen Regel der nächste Ballwechsel. Der Zufall ("das Glück") wird für den schwächeren Spieler eher zum Gewinn eines Ballwechsels führen als zu dem bei der alten Regel notwendigen 2-Punkte-Abstand. Bei dem nur etwas schwächeren Spieler wird der "Profit" wohl deutlicher sein als bei dem klar unterlegenen Spieler. Für ein bestimmtes Verhältnis der Spielstärken könnte dieser Profit maximal sein.

Die Frage nach der zu erwartenden Spieldauer ist schwer zu schätzen. Als Maß wird man nicht die Zeit, sondern die Anzahl der Ballwechsel bis zum Spielgewinn eines Partners benutzen. Es ist klar, daß die Anzahl der Ballwechsel pro Spiel stark von dem Leistungsunterschied der beiden Spieler abhängig ist. Wir orientieren uns zunächst an den Erfahrungen mit der geltenden Regel. Bei großem Leistungsunterschied werden viele Spiele nach 4 oder 5 Ballwechseln für den stärkeren Spieler entschieden sein, der Umweg über "deuce" wird nur selten vorkommen. Mittlere Spieldauer also zwischen 4 und 5 oder 5 und 6 Ballwechseln? Bei etwa gleichstarken Spielern wird "deuce" häufiger vorkommen, dann kann das Spiel unter Umständen aus einer längeren Folge von "advantage" und "deuce" bestehen. Mittlere Spieldauer also bei mehr als 6 oder 7 Ballwechseln?

Mit der neuen Regel wird das Schätzen erheblich einfacher. Die Anzahl der Ballwechsel bis zum gewonnenen Spiel liegt zwischen 4 und 7, je nach Spielstärkenunterschied wird man also eine mittlere Spieldauer um 5 oder 6 Ballwechsel erwarten.

Klar ist, daß bei beiden Regeln das Maximum der zu erwartenden Spieldauer bei gleicher Spielstärke beider Partner eintritt.

4. Über die Modellbildung zur Simulation

Von einigen Schülern kommt der (sinnvolle) Vorschlag, zur Bestätigung der Vermutungen einige Protokolle/Fernsehaufzeichnungen von Turnierspielen auszuwerten. Doch kommt man damit - abgesehen von dem enormen Aufwand - wirklich zu brauchbaren Ergebnissen? Wie will man die Spielstärke der einzelnen Spieler quantitativ einschätzen? Die Ranglistenposition ist eben nur eine Rangskala, wir benötigen aber eine metrische Skala.

Diese Probleme führen uns zu einem neuen Ansatz:

Läßt sich das Tennisspiel mit beiden Regeln auf dem Computer simulieren? Damit könnten wir schnell große Datenmengen produzieren und gleichzeitig auswerten.

Die Diskussion dieses Ansatzes macht schnell deutlich:

Die Durchführung der Simulation erfordert ein klar beschriebenes mathematisches Modell für unsere Situation. In der weiteren Diskussion wird die Notwendigkeit vereinfachender (idealisierender) Annahmen bewußt, in vielen Fällen wird hart um die

Zulässigkeit solcher Vereinfachungen, ggf. im Bewußtsein der Mängel entschieden.

Schließlich werden folgende Modellannahmen akzeptiert:

(I) A spielt gegen B. Wir beschränken uns auf solche Spiele, bei denen A serviert. Ansonsten ist die Festlegung einer konstanten Spielstärke (siehe (II)) völlig unrealistisch.

(II) Die Spielstärke von A wird festgelegt durch die Wahrscheinlichkeit p, mit der der Spieler A einen Ballwechsel gewinnt. Diese Wahrscheinlichkeit wird als konstant vorausgesetzt. Eine sicher unrealistische Annahme, die aber durch die auf "Dauer" ausgerichteten statistischen Fragestellungen akzeptabel erscheint. Die Wahrscheinlichkeit für einen Punktgewinn von B ist dann $q = 1-p$.

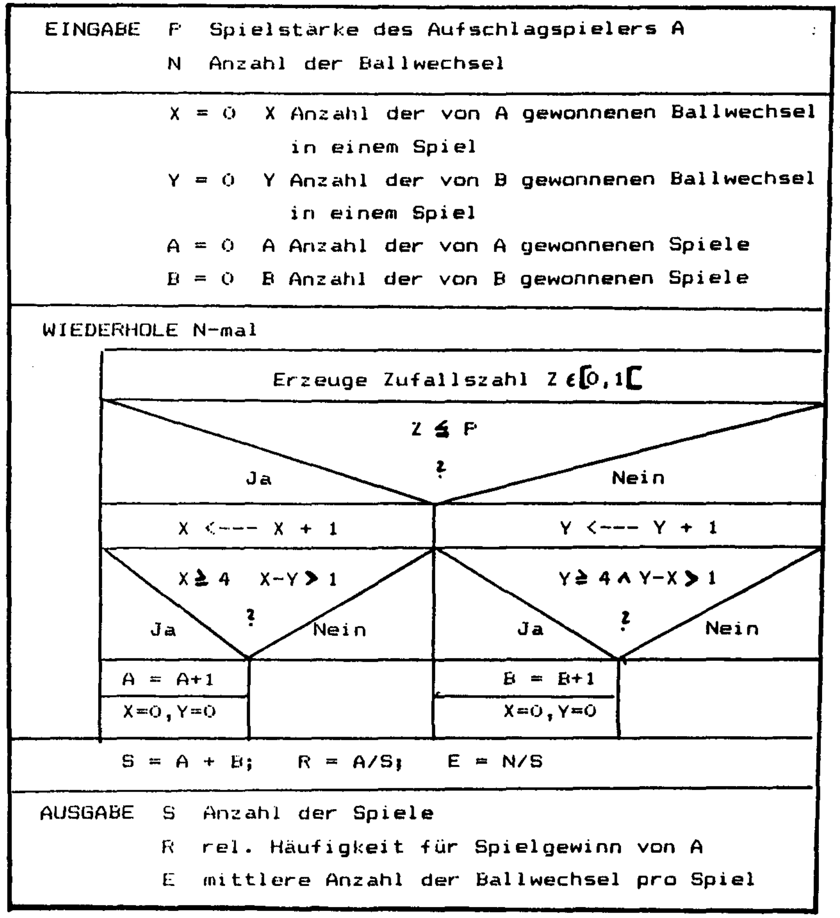
(III) Die Punkte, die ausgespielt werden, stellen unabhängige Ereignisse dar. Zur Rechtfertigung gelten die gleichen Argumente wie bei (II).

Mit diesem mathematischen Modell können wir die Simulation in Angriff nehmen. Für die Spielstärke p des Spielers A geben wir eine Zahl zwischen 0 und 1 ein. Dann erzeugen wir mit dem Zufallsgenerator wiederholt Zufallszahlen z zwischen 0 und 1. $z \leq p$ bedeutet Punktgewinn für A, $z > p$ Punktgewinn für B. Wir zählen für N Ballwechsel die Anzahl S der Spiele und die Anzahl A der von A gewonnenen Spiele. Mit $R = A/S$ erhalten wir dann die relative Häufigkeit für den Spielgewinn von A und mit $E = N/S$ die mittlere Anzahl der Ballwechsel pro Spiel.

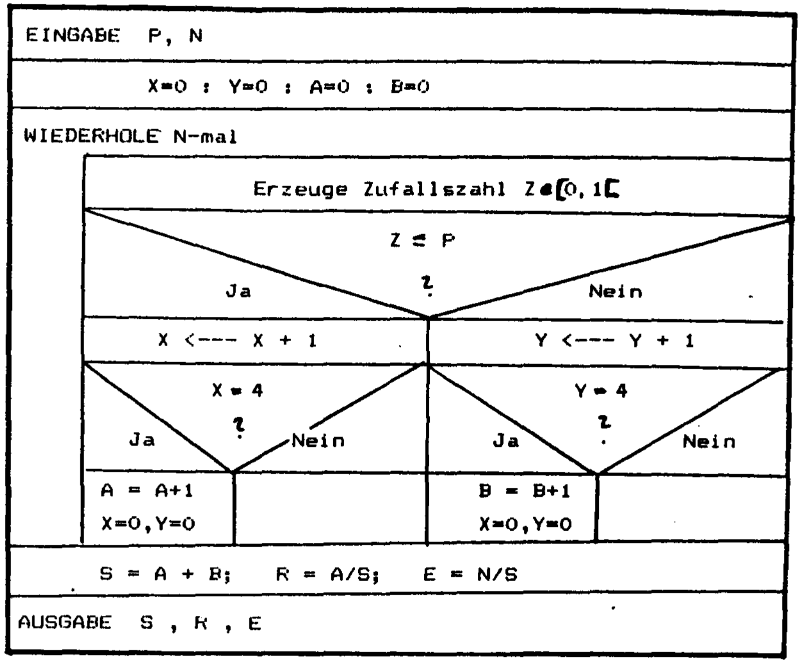
Wir entwickeln zwei Simulationsprogramme:

"TENNIS NORMAL" für die geltende Tennisregel
"TENNIS NEU" für die veränderte Tennisregel

Struktogramm für TENNIS NORMAL



Struktogramm für TENNIS NEU



In den folgenden Tabellen sind die Ergebnisse jeweils für einen Simulationsverlauf von N = 1000 Ballwechseln eingetragen:

TENNIS NORMAL

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
S	225	202	178	153	141	154	173	195	220
R	0.004	0.024	0.101	0.320	0.439	0.642	0.895	0.984	1.000
E	4.44	4.95	5.61	6.53	7.09	6.49	5.78	5.12	4.54

TENNIS NEU

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
S	224	205	186	175	172	179	182	205	226
R	0.004	0.019	0.139	0.325	0.558	0.715	0.879	0.965	1.000
E	4.46	4.87	5.37	5.71	5.81	5.58	5.49	4.87	4.42

Wir vergleichen die Tabellenwerte mit unseren Vermutungen vor der Simulation. Die meisten qualitativen Einschätzungen werden bestätigt, zusätzlich erhalten wir relative Häufigkeiten als Schätzwerte für die interessierenden Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte.

Die Frage, bei welcher Spielstärke der "Profit" durch die Regeländerung am größten wird, läßt sich auf Grund der einmaligen Simulationswerte nicht entscheiden. Ob größere N Aussagen ermöglichen, hängt unter anderem von der Qualität unseres Zufallszahlengenerators ab. [1)]

Weiteren Aufschluß könnte die graphische Auswertung der Tabellen bringen. Wir verfolgen diese Möglichkeit jedoch nicht weiter, sondern werten unser mathematisches Modell mit Hilfe wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen aus.

5. Weitere Quantifizierung der Vermutungen durch wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen

Wir greifen auf das der Simulation zugrundeliegende mathematische Modell zurück.

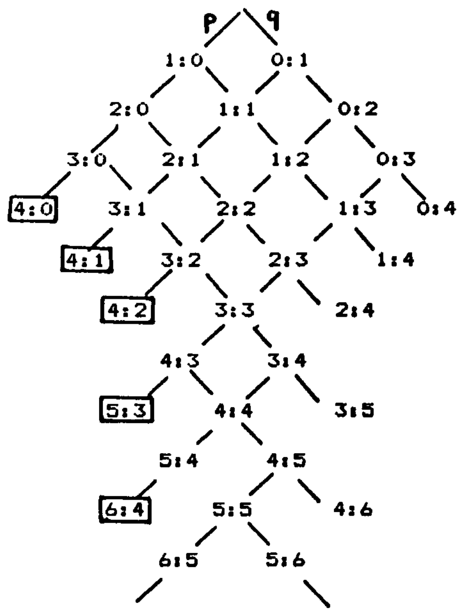
Wir berechnen die Wahrscheinlichkeiten

P1: A gewinnt zu Null (4:0)
P2: A gewinnt zu 15 (4:1)
P3: A gewinnt zu 30 (4:2)
P4: A gewinnt nach "deuce"

---

1) G. NOLL beschreibt in [4] eine Simulation unseres Problems, das nicht auf der Monte-Carlo-Methode beruht, sondern auf den sogenannten "Wahrscheinlichkeitsabakus" zurückgreift. Damit lassen sich "beliebig genaue" Simulationswerte erreichen.

Aus der Baumdarstellung gewinnt man:



$P1 = p^4$

$P2 = 4\cdot p^4\cdot q$ — 4:1 wird über 3:1 erreicht. Für 3:1 muß eine Rechtsentscheidung in 4 Stufen erfolgen, dies ist auf $\binom{4}{1}$ Arten möglich!

$P3 = 10\cdot p^4\cdot q^2$ — 4:2 über 3:2, d.h. 2 Rechtsentscheidungen in 5 Stufen, dies ist auf $\binom{5}{2}$ Arten möglich!

P4 — Kann nur über "deuce" erreicht werden. $P(3:3) = 20\cdot p^3\cdot q^3$

$$P4 = 20\cdot p^3\cdot q^3\cdot(p^2 + 2pqp^2 + 4p^2q^2p^2 + 8p^3q^3p^2 + \ldots)$$
$$= 20\cdot p^5\cdot q^3\cdot(1 + 2pq + (2pq)^2 + (2pq)^3 + \ldots)$$
$$P4 = 20\cdot p^5\cdot q^3 \sum_{r=0}^{\infty} (2pq)^r$$

Da $2pq < 1$, folgt nach der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$P4 = 20 \cdot p^5 \cdot q^3 \cdot \frac{1}{1-2pq}$$

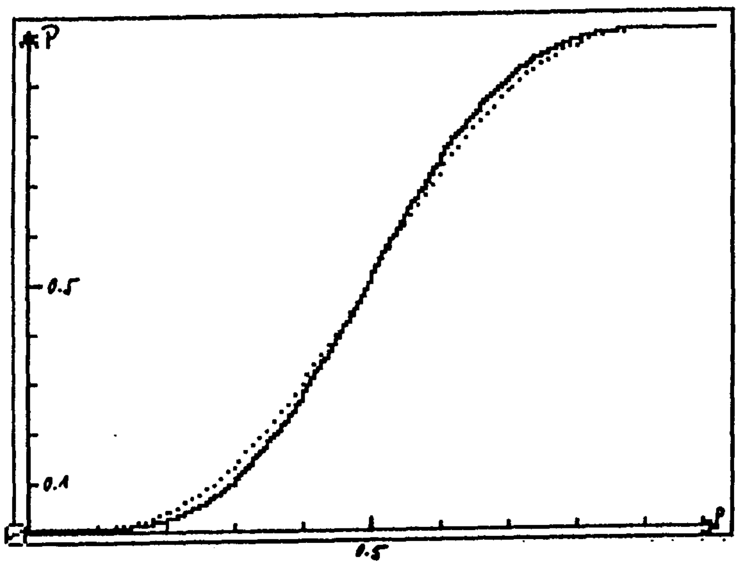
Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit, daß A das Spiel gewinnt, gilt somit:

$$P(A) = p^4 \ (1 + 4q + 10q^2) + \frac{20p^5q^3}{1-2pq}$$

Wendet man die neue Regel an, so erhält man:

$$P^*(A) = p^4 \ (1 + 4q + 10q^2) + 20p^4q^3$$

Unter Berücksichtigung von $q = 1-p$ lassen sich P und P* als Funktionen von p auffassen und graphisch darstellen.

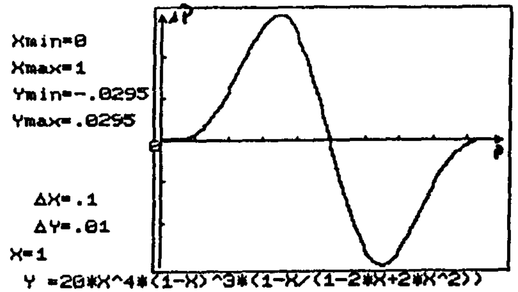


— P

.... P*

Für den durch die Regeländerung bedingten "Zuwachs" $P^* - P = \Delta P$ erhält man ebenfalls eine Funktion von p.

$$\Delta P = P^* - P = 20 \cdot p^4 \cdot q^3 \cdot \left(1 - \frac{p}{1-2pq}\right)$$



ΔP erreicht seinen maximalen Wert von 0.0295 bei $p = 0.347$ und den minimalen Wert von -0.0295 bei $p = 0.653$.

Ein Wert $p = 0.65$ für den Aufschläger A ist im professionellen Tennis nicht unüblich. Ein solcher Spieler würde unter der neuen Regel etwa 80 % seiner Aufschlagspiele gegenüber 83 % bei der alten Regel gewinnen.

6. Die zu erwartende Dauer eines Spiels

Als Maß für die "Dauer eines Spiels" verwenden wir den

$$\text{Erwartungswert } E(X) = \sum_i P(X = x_i) \cdot x_i$$

wobei die Zufallsgröße X die Anzahl der Ballwechsel (Punkte) in einem Spiel beschreibt.

Es gilt für

die alte Regel $\quad X \in \{4, 5, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$
die neue Regel $\quad X \in \{4, 5, 6, 7\}$

Für die alte Regel gilt:

$$\begin{aligned} E(X) &= (p^4 + q^4) \cdot 4 + 4(p^4q + q^4p) \cdot 5 + 10(p^4q^2) \cdot 6 + \\ &+ 20 \cdot p^3q^3 \cdot \left[(p^2 + q^2) \cdot 8 + (p^2 + q^2) \cdot 2pq \cdot 10 + \right. \\ &+ \left. (p^2 + q^2) \cdot (2pq)^2 \cdot 12 + (p^2 + q^2) \cdot (2pq)^3 \cdot 14 + \ldots\right] \\ &= 4(p^4 + q^4) + 20(p^4q + q^4p) + 60(p^4q^2 + q^4p^2) + \\ &+ 20 \cdot p^3 q^3 \cdot (p^2 + q^2) \cdot \left[(6+2) + 2pq(6+4) + \right. \\ &+ \left. (2pq)^2(6+6) + \ldots\right] \end{aligned}$$

$$= 4(p^4 + q^4) + 20(p^4q + q^4p) + 60(p^4q^2 + q^4p^2) +$$
$$+ 20\cdot p^3q^3\cdot(q^2 + p^2)\cdot[6(1 + 2pq + (2pq)^2 + \ldots) +$$
$$+ 20\cdot p^3q^3\cdot(p^2 + q^2)\cdot[2(1 + 2pq\cdot 2 + (2pq)^2\cdot 3 +$$
$$+ (2pq)^3\cdot 4 + \ldots)]$$

Wegen $\sum_{i=1}^{\infty} i\, x^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ erhält man:

$$E(X) = 4\ (p^4 + q^4) + 20\ (p^4q + q^4p) + 60\ (p^4q^2 + q^4p^2) +$$
$$+ 40\ p^3q^3\ (p^2 + q^2)\ \frac{3}{(1-2pq)} +$$
$$+ 40\ p^3q^3\ (p^2 + q^2)\ \frac{1}{(1-2pq)^2}$$

Da $p^2 + q^2 = 1-2pq$ folgt schließlich

$$E(X) = 4\ (p^4 + q^4) + 20\ (p^4q + q^4p) + 60\ (p^4q^2 + q^4p^2) +$$
$$+ 40\ p^3q^3\ (3 + \frac{1}{p^2+q^2})$$

Für die neue Regel erhält man

$$E^*(X) = 4\ (p^4 + q^4) + 20\ (p^4q + q^4p) + 60\ (p^4q^2 + q^4p^2) +$$
$$+ 20\ p^3q^3\ (p+q)\cdot 7$$

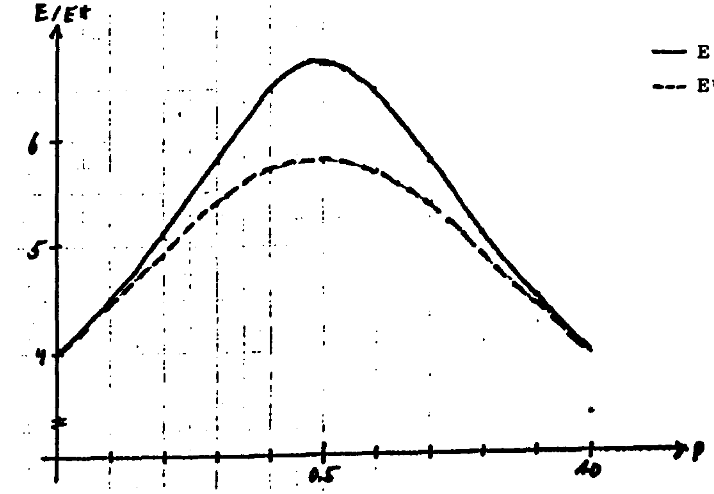
und wegen $p+q=1$

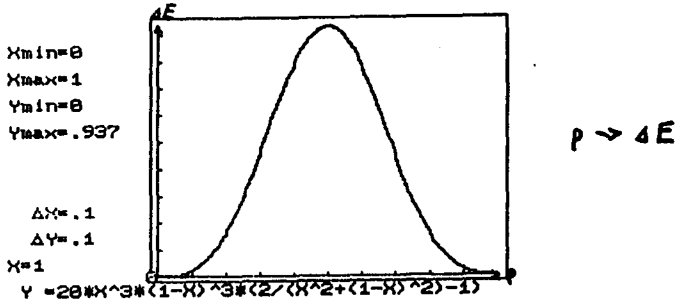
$$E^*(X) = 4\ (p^4 + q^4) + 20\ (p^4q + q^4p) + 60\ (p^4q^2 + q^4p^2) +$$
$$+ 140p^3q^3$$

Damit ergibt sich als Differenz der Erwartungswerte

$$E = E(X) - E^*(X) = 20\ p^3q^3\ (\frac{2}{p^2+q^2} - 1)$$

Wir tragen E, E* und Δ E wiederum als Funktionen von p auf:





E(X) und E*(X) erreichen ihre maximalen Werte von 6.75 bzw. 5.8125 jeweils bei p = 0.5, d.h. bei gleicher "Spielstärke" von A und B.

Auch die maximale Differenz der Erwartungswerte bei alter und neuer Regel wird bei p = 0.5 erreicht, sie beträgt mit E_{max} = 0.937 etwa einen Punkt.

7. Anregungen zu weiteren Untersuchungen

Unsere Problemstellungen - die durch das zugrundegelegte mathematische Modell von vorneherein beschränkt wurden - sind damit i. w. bearbeitet.

Die vorgestellten Überlegungen können in verschiedene Richtungen fortgesetzt oder erweitert werden:

- Wie groß ist die Gewinnwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Spielstärke p
  * in einem Satz (mit oder ohne Tie-break)
  * in einem Match (2 oder 3 Gewinnsätze)
- Vergleich der Zählweisen beim Tennis und Tischtennis. Welche Zählweise ist trennschärfer?

Literatur

[1] CROUCHER, J. S.: Changing the Rules of Tennis: Who has the Advantage? In: "Teaching Statistics" (1985), Vol. 7; dt. Übersetzung in: "Stochastik in der Schule" (1986), Vol. 2.

[2] WITZEL, W.: Vergleich der Zählweise beim Tennis und Tischtennis. In: "Praxis der Mathematik" (1984), 26 Nr. 6.

[3] Kultusministerium Rheinland-Pfalz: Handreichung zum Lehrplan Mathematik "Der Computer als Werkzeug im Mathematikunterricht". Worms, 1988.

[4] NOLL, G.: Computereinsatz bei der Behandlung stochastischer Prozesse mit dem Wahrscheinlichkeitsabakus. In: "Der Mathematikunterricht" (1989), Heft 4.