

GERÜCHTE

von Alan Kimber

Originaltitel: Rumours

Bearbeitung: G. Ihorst, Dortmund.

ZDM-Klassifikation: K 43, K 44

Zusammenfassung:

Alan Kimber untersucht in seinem Beitrag ein stochastisches Modell zur Verbreitung von Gerüchten oder Neuigkeiten in einer Gemeinschaft: behandelt wird ein Markov-Prozeß, dessen mathematische Einzelheiten sicherlich zu kompliziert sind für die meisten Schüler. Im wesentlichen ist es jedoch ein einfaches Modell, das die Anwendung elementarer Methoden wie Baumdiagramme oder kleiner Simulationen erlaubt. Darüberhinaus ist das Thema - Statistik angewendet auf das soziale Verhalten "richtiger Menschen" - für die meisten Schüler interessanter als die üblichen Anwendungsbeispiele wie Münzwurf und Würfelwurf.

Das Modell

Wir nehmen an, die uns interessierende Gemeinschaft besteht aus $N+1$ Individuen; während das Gerücht in Umlauf ist, kommt niemand hinzu oder verläßt die Gemeinschaft. Wir unterscheiden dabei drei verschiedene Typen von Individuen: solche, die das Gerücht nicht gehört haben (Ignoranten); solche, die es weitererzählen (Klatschbasen), und solche, die es hören, aber nicht weiter verbreiten (Unterdrücker).

Das Gerücht befindet sich im Zustand (x,y) , wenn es genau x Ignoranten und y Klatschbasen gibt. (Die Anzahl der Unterdrücker ist dann $N+1-x-y$.) Wenn ein Ignorant eine Klatschbase trifft, hört der Ignorant das Gerücht und - erfreut über die aufregende Neuigkeit - wird er ebenfalls zur Klatschbase. Es findet also ein Übergang vom Zustand (x,y) in den Zustand $(x-1,y+1)$ statt, was mit

$$(x,y) \rightarrow (x-1,y+1)$$

bezeichnet werden soll. Wenn eine Klatschbase einen Unterdrücker trifft, dann erzählt die Klatschbase diesem das Gerücht, das der Unterdrücker natürlich schon kennt. Die Klatschbase hat dann den Eindruck, daß die Geschichte schon allgemein bekannt ist, und damit man nicht von ihr glaubt, sie würde Neuigkeiten von gestern verbreiten, wird sie zum Unterdrücker. Es handelt sich somit um einen Übergang

$$(x,y) \rightarrow (x, y-1) .$$

Wenn sich zwei Klatschbasen treffen, dann stellt jede fest, daß die andere das Gerücht schon kennt. Beide Klatschbasen wollen jedoch "cool" erscheinen und darum werden sie zu Unterdrückern. Somit folgt

$$(x,y) \rightarrow (x, y-2) .$$

Bei den übrigen möglichen Treffen (Ignorant - Ignorant, Ignorant - Unterdrücker, Unterdrücker - Unterdrücker) ändert sich der Zustand des Gerüchtes nicht.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß der Prozeß im Zustand $(N,1)$ beginnt, d.h. es gibt eine einzige Klatschbase und N Ignoranten. Der Prozeß endet, wenn es keine Klatschbasen mehr gibt oder wenn keine Ignoranten mehr übrig sind.

Wichtig sind jetzt die Annahme bezüglich der stochastischen Struktur des Modells. Wir gehen davon aus, daß die Gemeinschaft eine homogene Mischung ist, d.h. jedes Individuum unterhält sich mit der gleichen Wahrscheinlichkeit mit irgendeinem der übrigen N Mitglieder der Gemeinschaft; außerdem sollen alle Unterhaltungen unabhängig voneinander stattfinden.

Wenn der Prozeß sich im Zustand (x,y) befindet, gibt es xy verschiedene mögliche Treffen zwischen einem Ignoranten und einer Klatschbase, $y(N+1-x-y)$ verschiedenen möglichen Treffen zwischen einer Klatschbase und einem Unterdrücker, außerdem $y(y-1)/2$ verschiedene mögliche Treffen zweier Klatschbasen. Alle diese Treffen sind gleich wahrscheinlich; falls also ein Übergang von (x,y) aus stattfindet, dann führt er in den Zustand $(x-1,y+1)$ mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_1(x,y) = \frac{xy}{xy + y(N+1-x-y) + y(y-1)/2} = \frac{x}{N - (y-1)/2} .$$

Auf ähnliche Weise erhält man die anderen beiden Übergangswahrscheinlichkeiten als

$$p_2(x,y) = \frac{N+1-x-y}{N - (y-1)/2}$$

und

$$p_3(x,y) = \frac{(y-1)/2}{N - (y-1)/2} .$$

Es handelt sich somit hierbei um einen Markov-Prozeß, bei dem der nächste Zustand lediglich vom momentanen Zustand des Prozesses abhängt und nicht davon, wie er dorthingelangt ist.

Wie viele Personen hören das Gerücht überhaupt nicht?

In der Praxis kann ein Gerücht während seines Umlaufs in der Gemeinschaft natürlich nicht beobachtet werden - schon der Versuch verändert den Prozeß. Jedoch ist es oft möglich, etwas darüber zu erfahren, wieviele Mitglieder der Gemeinschaft nie von dem Gerücht erfahren. Erfahrungsgemäß gibt es immer einige wenige Leute, die z.B. nichts von einer spontanen Einladung erfahren. Es ist daher interessant zu untersuchen, wie sich das Modell in dieser Beziehung verhält.

Eine Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, bietet die Untersuchung anhand eines Baumdiagramms, um auf diese Weise die Verteilung der Anzahl Ignoranten zu bestimmen, die schließlich übrigbleiben. Als Beispiel wurde der Fall $N = 3$ in Bild 1 skizziert:

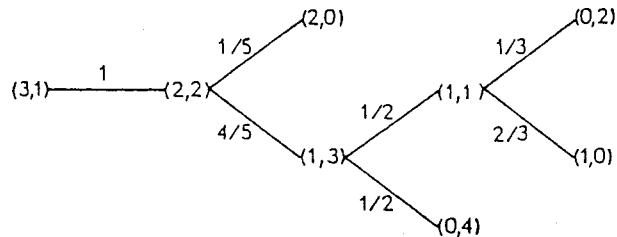


Bild 1: Baumdiagramm für $N = 3$.

Die angegebenen Wahrscheinlichkeiten werden aus den Übergangswahrscheinlichkeiten $p_1(x,y)$, $p_2(x,y)$ und $p_3(x,y)$ berechnet. In diesem Fall endet das Gerücht schließlich mit Wahrscheinlichkeit $1/5$ mit zwei Ignoranten, mit Wahrscheinlichkeit $(4/5) \cdot (1/2) \cdot (2/3) = 4/15$ mit einem Ignoranten, und mit einer Wahrscheinlichkeit von $8/15$ erfahren alle drei Personen das Gerücht. Diese Methode kann prinzipiell für jedes N angewendet werden, ist jedoch in der Praxis nur für kleine N machbar. Es ist möglich, eine Rekurrenzformel aufzustellen, um daraus die Verteilung der Anzahl der Ignoranten für jedes N zu bestimmen; für Anfänger ist dieser Vorschlag jedoch nicht geeignet. Eine Alternative bieten Simulationsverfahren, um die interessierenden Größen zu schätzen. Mit Hilfe eines Computers mit Zufallszahlengenerator kann ein Programm mit folgendem Ablauf aufgestellt werden: für festes N nimmt man an, der Prozeß befinde sich im Zustand (x,y) . Man erzeugt eine Zufallszahl u aus einer Rechteckverteilung auf dem Intervall $[0,1]$, und demgemäß findet der Übergang statt:

$$\begin{aligned} (x,y) &\rightarrow (x-1,y+1) && \text{falls } u < p_1(x,y) \\ (x,y) &\rightarrow (x,y-1) && \text{falls } p_1(x,y) \leq u < p_1(x,y) + p_2(x,y) \\ (x,y) &\rightarrow (x,y-2) && \text{falls } p_1(x,y) + p_2(x,y) \leq u \end{aligned}$$

Es werden solange Zufallszahlen erzeugt und die entsprechenden Übergänge durchgeführt, bis das Gerücht endet (d.h. $x=0$ oder $y=0$). Ausgangspunkt ist dabei der Zustand $(N-1,2)$, denn ein Gerücht im Zustand $(N,1)$ erreicht als nächstes notwendigerweise den Zustand $(N-1,2)$. Am Ende des simulierten Gerüchts wird die Anzahl x der verbliebenen Ignoranten notiert, und nach wiederholter

Durchführung dieser Prozedur erhält man schließlich ein Bild dafür, wie die Verteilung der Anzahl Ignoranten am Ende des Gerüchts aussieht.

Bild 2 zeigt ein Stabdiagramm für die Anzahl der verbliebenen Ignoranten bei $N = 19$, erstellt auf der Grundlage von 200 Simulationsläufen. Es ist dabei typisch, daß die Verteilung rechtsschief ist mit einem Mittelwert von ungefähr $0.2N$, eine beträchtliche Variabilität aufweist und eine Art "Signal" im Punkt $N-1$ (hier 18) besitzt.

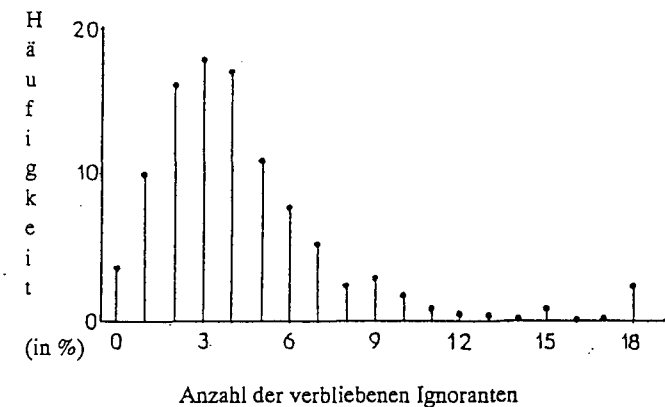


Bild 2: Stabdiagramm für die Anzahl der verbliebenen Ignoranten bei $N = 19$ auf der Grundlage von 200 Simulationsläufen.

Falls die Computer-Simulation nicht durchführbar ist, kann ein einfaches "Bälle-in-der-Tasche"-Verfahren angewendet werden. Dazu wird eine undurchsichtige Tasche benötigt und $3N$ Bälle gleicher Größe, von denen $N-1$ eine Farbe (z.B. grün) haben sollen, um die Ignoranten zu repräsentieren, $N+1$ eine andere Farbe (etwa rot), um die Klatschbasen darzustellen, die übrigen schließlich eine dritte Farbe (blau), um die Unterdrücker zu repräsentieren. Diese Art der Simulation geht natürlich ausgesprochen langsam vor sich. Man beginnt mit $N-1$ grünen und zwei roten Bällen in der Tasche. Der Inhalt wird gemischt, dann werden zwei Bälle gezogen. Wenn sie grün und rot sind, werden sie durch zwei rote ersetzt. Wenn sie rot und blau sind oder zwei rote ge-

zogen werden, kommen stattdessen zwei blaue in die Tasche. Bei jeder anderen Kombination werden die Bälle unverändert zurückgelegt. Der Tascheninhalt muß jedesmal gemischt werden, und die Prozedur wird fortgeführt, bis alle $N-1$ grünen Bälle aus der Tasche herausgezogen wurden, so daß keine Ignoranten mehr übrig sind, oder bis keiner der $N+1$ roten Bälle mehr in der Tasche ist, was bedeutet, daß keine Klatschbasen mehr da sind. Die Anzahl grüner Bälle in der Tasche ist dann die Anzahl der Ignoranten, die nie von dem Gerücht hören. Durch Wiederholung dieser Prozedur erhält man schließlich einen Schätzer für die Anzahl der Ignoranten am Ende des Gerüchts.

Diskussion:

Einer der Vorteile des behandelten Modells ist es, daß einige der Annahmen modifiziert werden können, ohne daß die Analysemethoden grundlegend geändert werden müßten.

Bei der Diskussion des Modells mit Schülern war der häufigste Verbesserungsvorschlag der folgende, bei dem der Übergang beim Treffen zweier Klatschbasen geändert wird von

$$(x,y) \rightarrow (x,y-2)$$

zu

$$(x,y) \rightarrow (x,y-1) ,$$

so daß vielleicht nur die erste Klatschbase, die das Gerücht ins Gespräch bringt, zum Unterdrücker wird, während die andere eine Klatschbase bleibt. Dies hat den Effekt, daß die mittlere Anzahl verbleibender Ignoranten von 20% auf etwa 13,5% sinkt.

Ein anderer häufig gemachter Vorschlag besagt, die Ausgangsbedingungen zu ändern: vielleicht wird der Prozeß durch mehr als eine Person in Gang gesetzt, oder vielleicht gibt es Individuen, die das Gerücht von Anfang an nicht weiterverbreiten wollen. Dies kann berücksichtigt werden, indem man eine abgeschlossene Gemeinschaft mit $N+j+k$ Individuen betrachtet mit passenden Werten für j und k ($j = 1$ und $k = 0$ liefern das ursprüngliche Modell); der Prozeß startet dann im Zustand (N,j) .

Man kann in die Untersuchung den Gedanken einbeziehen, daß die Individuen des Modells keine Individuen im üblichen Sinne sein müssen. Wenn es sich beispielsweise um eine Schulklasse handelt, gibt es oft "unzertrennliche Freunde". In diesem Fall können die Individuen des Modells Mischungen aus einzelnen Schülern und aus Cliques sein, die zusammen umherlaufen und sich im wesentlichen wie eine Person verhalten. Dieses Beispiel soll zeigen, daß die Annahmen bezüglich der Kommunikation in der Gemeinschaft nicht ganz so restriktiv sind, wie sie auf den ersten Blick scheinen.

Zusammenfassend läßt sich festhalten, daß das Modell einige schöne Eigenschaften zur Verwendung im Unterricht besitzt. Es sind nur Grundkenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung erforderlich. Außerdem ist eine beträchtliche Flexibilität in den zugrundegelegten Annahmen vorhanden, so daß das Modell leicht verändert werden kann, ohne die Analyse zu komplizieren; es bietet somit viel Stoff für weitergehende Untersuchungen.

Literatur

BARTHOLOMEW, D.J. (1973): "*Stochastic Models for Social Processes*", Chichester: Wiley.

DALEY, D.J. and KENDALL, D.G. (1965): "Stochastic Rumours", *J. Inst. Math. Applns.*, 1, 42-55.