EIN INTUITIVER ZUGANG ZUR BEDINGTEN WAHRSCHEINLICHKEIT UND ZUR BAYES-FORMEL

von **Manfred Borovcnik**, Klagenfurt

Kurzfassung:

Es gibt drei wohlbekannte Interpretationen von Wahrscheinlichkeit, nämlich Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit, als Anteil an gleich möglichen Ausgängen sowie als Grad der Überzeugung in eine ungewisse Aussage. Im üblichen Unterricht jedoch wird die Deutung als Grad der Überzeugung sehr vernachlässigt. Das führt zu unnötigen Problemen im Verständnis, besonders im Zusammenhang mit der bedingten Wahrscheinlichkeit. In diesem Artikel soll gezeigt werden, wie das sogenannte "Odds-Konzept" die Deutung von Wahrscheinlichkeit als Grad der Überzeugung unterstützt und wie dieser Zugang zum besseren Begriffsverständnis beitragen kann. Die Ideen sollen nicht darin münden, daß Wahrscheinlichkeit nun auf diese Deutung allein reduziert wird, sondern es soll ein integriertes Konzept mit allen Deutungen aufgebaut werden.

1 Übliche Einführung der bedingten Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Üblicherweise motiviert man die Definition

$$W(A|I) = \frac{W(A \cap I)}{W(I)}$$

mit Häufigkeitsüberlegungen: In einer Folge von Zufallsversuchen gibt es eine Teilfolge von $n(I)$ Ergebnissen, in denen I eintritt. In dieser Teilfolge tritt das Ereignis A insgesamt $n(A \cap I)$-mal auf. Die relative Häufigkeit von A in der Teilfolge mit I ist daher

$$\frac{n(A \cap I)}{n(I)}.$$

Das ist nach der Häufigkeitsdeutung eine Schätzung der

Wahrscheinlichkeit von A, bedingt auf das Ereignis, besser, bedingt auf die Aussage I, in Zeichen $W(A|I)$. Division von Zähler und Nenner oben schließt die Heuristik ab.

Im Rahmen der Deutung von Wahrscheinlichkeit als Anteil kann man die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit auch so motivieren: Die zufällige Auswahl eines Elements wird auf die Teilmenge I, die dem bedingenden Ereignis entspricht, beschränkt. Nun ist der Anteil von E, der in der Menge I liegt, zu bestimmen, d.h.

$$W(E|I) = \frac{|E \cap I|}{|I|},$$

wobei $|.|$ Anzahl oder Fläche bedeutet.

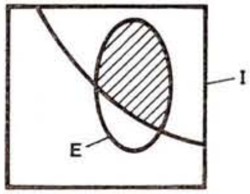

Fig. 1

Beispiel:

Farbenblindheit und Geschlecht; für die Daten aus folgender Tabelle bestimme man einerseits die Wahrscheinlichkeit für Farbenblindheit i.a. und für Farbenblindheit unter Männern.

Farbenblindheit	Geschlecht M	Geschlecht W	gesamt
F ja	38	6	44
F nein	442	514	956
	480	520	1000

$W(F) = 44/1000 = 0{,}044$ $\qquad$ $W(F|M) = 38/480 = 0{,}079.$

Im Zusammenhang mit axiomatischen Überlegungen wird der Bildraum der Wahrscheinlichkeitsfunktion auf einen Teilraum reduziert, der dem bedingenden Ereignis entspricht; die solcherart eingeschränkte Funktion erfüllt die Bedingungen der üblichen Axiome und ist daher eine Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Die Bayes-Formel

Die Bayes-Formel wird entweder mit Hilfe von Regeln für die Wahrscheinlichkeit bewiesen oder aus dem Baumdiagramm abgelesen:

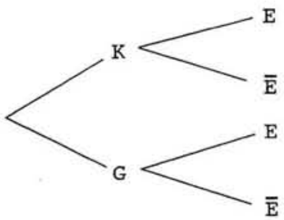

Fig. 2

$$W(K|E) = \frac{W(K \cap E)}{W(E)} = \frac{W(K)*W(E|K)}{W(K)*W(E|K) + W(G)*W(E|G)}$$

Das erste Gleichheitszeichen gilt wegen der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit, das zweite ist leicht aus dem Baumdiagramm abzulesen. Auf jeder Stufe des Baumdiagramms werden alle Möglichkeiten ausgeschöpft, d.h. $K = \overline{G}$. Es gibt wirklich viel zugunsten des Baumdiagramms zu sagen. Es stellt ein leicht zugängliches Werkzeug dar, um mehrstufige, unsichere Situationen zu strukturieren; wie in der Buchhaltung werden die Möglichkeiten auf jeder Stufe aufgelistet, ebenso werden die bedingten Wahrscheinlichkeiten in der "Vorwärts"-Richtung aufnotiert. Es gibt jedoch hiebei keine Möglichkeit einzusehen, wie die bedingten Wahrscheinlichkeiten in der "Rückwärts"-Richtung damit zusammenhängen; insbesondere kann man kein Gefühl dafür entwickeln, wie spezielle Werte der Einflußgrößen die berechnete bedingte Wahrscheinlichkeit verändern.

Beispiel:

K "Krank, leidet an der Krankheit K, die es zu überprüfen gilt"
G "gesund, leidet nicht an dieser Krankheit"
E "Evidenz, ein positives Resultat, z.B. ein Bluttest, der auf K hinweist"
$\overline{E}$ "der Bluttest von oben ergibt ein negatives Resultat, was auf G hinweist".

Für die Wahrscheinlichkeiten $W(K)=0,01$, $W(E|K)=0,99$ sowie $W(E|G)=0,05$ ergibt sich als Wahrscheinlichkeit, krank zu sein, bedingt auf einen positiven Befund:

$$W(K|E) = \frac{0.01*0,99}{0,01*0,99 + 0,99*0,05} = 0,167.$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist sehr klein. Das überrascht umso mehr, als der Test zunächst sehr zuverlässig erscheint: $W(E|K)$ ist die Sicherheit, einen Kranken tatsächlich als krank zu erkennen, diese Sicherheit beträgt 0,99; $W(E|G)$ ist die Fehlerrate, mit der Gesunde fälschlich als krank eingestuft werden, diese ist mit 0,05 auch sehr gering. Warum aber ist die Wahrscheinlichkeit, krank zu sein, nach Vorliegen eines positiven Befundes, gar so klein? Wo liegt der Haken? Was hat man an den Kenngrößen der Zuverlässigkeit des Tests nicht so richtig verstanden? In der üblichen Darstellung der Bayes-Formel erhält man wohl ein zahlenmäßiges Resultat, aber sie gestattet keine Hilfe zu verstehen, wie dies zustandekommt.

2. Chancenverhältnisse und Wahrscheinlichkeit

Chancenverhältnisse und Gewinnquoten

Sei E ein Ereignis in einer ungewissen Situation, für $W(E)$ nennt man den Quotienten

$$W(E) : W(\overline{E})$$

das Chancen- bzw. Wahrscheinlichkeitsverhältnis von E gegen E. Für $W(E)=1/6$ ergibt sich ein Chancenverhältnis von

$$\frac{1}{6} : \frac{5}{6} = 1:5 .$$

Beim Wetten ist die Bezeichnung Odds für Chancenverhältnisse geläufiger Jargon (nirgendwo wird so viel gewettet wie in England, daher ein englischer Ausdruck). Das Chancenverhältnis bezieht sich immer auf ein Ereignis E und dessen Komplement E. Bei der Wette gibt es zwei Partner, Spieler und Bank. Setzt der Spieler auf E, so ist das Gegenteil E der Gewinnfall für die Bank. Man spricht daher kurz, das Chancenverhältnis von E bzw. die Odds von E betragen z.B. 1:5. Üblich ist auch die Sprechweise, die Chancen von E stehen 1:5. Aus dem Chancenverhältnis kann man leicht die Wahrscheinlichkeit von E zurückberechnen:

Stehen die Chancen (Odds) von E a:b, dann gilt $W(E) = \frac{a}{a+b}$,
stehen die Chancen von E 1:5, dann gilt $W(E)=1/6$.

Chancenverhältnisse werden dazu verwendet, die Gewinnquoten auszuhandeln; ein Chancenverhältnis von 1:5 bedeutet, daß man beim Wetten auf E den Betrag von DM 1.- zu bezahlen hat. Diesen Einsatz verliert man an die Bank, falls E nicht eintritt. Man gewinnt jedoch netto einen Betrag von DM 5.-, falls E eintritt (d.h. man erhält DM 6.- ausbezahlt). Die Gewinnquote beträgt 5:1, d.h. für 1 Mark Einsatz erhält man im Gewinnfall 5.

Chancen:	Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten	1:5
Quoten:	Verhältnis der möglichen Nettogewinne	5:1

Das Verhältnis der Nettobeträge, die die beiden Parteien der Wette gewinnen oder verlieren, steht im umgekehrten Verhältnis zu ihren Chancen.

Gewinnquote = Kehrwert der Chancen

Stehen die Chancen a:b, so müßte man für die Berechnung der Gewinnquoten eigentlich 1/(a:b) ansetzen. Die Verwendung von Doppelbrüchen kann man jedoch umgehen, indem man das Chancenverhältnis direkt umdreht. Die Berechnung der Gewinnquoten macht für einen einzelne Wette Sinn.

Chancenverhältnis und Wert einer Wette

Die folgende Analogie zur Wirtschaft soll die Berechnung der Einsätze von oben heuristisch stützen. Beim Kauf von Waren ergibt sich der Endpreis als Produkt von Preis pro Einheit mal Zahl der Einheiten, die man kauft (sieht man einmal davon ab, daß man vielleicht einen Rabatt mit zunehmender Menge erhalten kann). Vor der Wette haben beide Wettpartner "Güter" verschiedener Preise mit unterschiedlicher Menge anzubieten, die sie durch Eingehen der Wette gegenseitig abtauschen wollen oder nicht.

Beispiel:

Die Chancen von E stehen 1:5; ich setze auf E, die Bank demnach auf $\bar{E}$. Die Gewinnquoten seien mit 2:1 vereinbart. Dann ergibt sich folgendes Bild von der Situation:

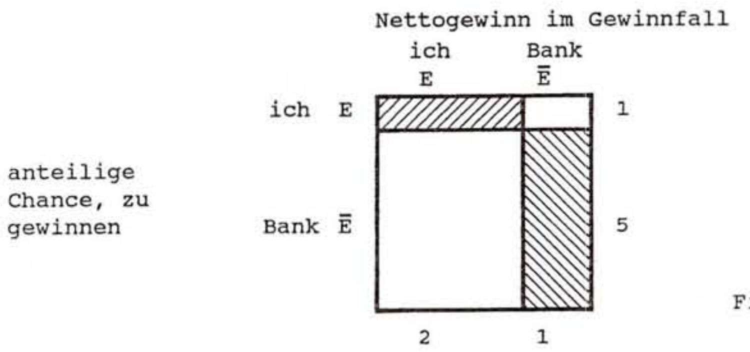

Fig. 3

Eine Seite des Einheitsquadrates steht für die relativen Nettogewinne der beiden Parteien, das sind die Quoten von 2:1, die andere Seite steht für die Anteile an Sicherheit, das ist das Chancenverhältnis von 1:5. Das Quadrat wird durch Chancenverhältnis und Gewinnquoten in Rechtecke zerlegt. Die anteiligen Chancen zu gewinnen, stehen für die Einheiten an (der Ware) Sicherheit, welche jede der beiden Parteien hat. Je weniger man davon hat, desto riskanter die Situation. Der andere Teil ist, wieviel man gewinnt, das ist der Preis pro Einheit. Je weniger ich an anteiligen Chancen habe, desto riskanter die Wette für mich, umso besser sollte ich dafür entschädigt werden, falls ich gewinne. Der Wert einer Wette kann für beide Parteien so festgehalten werden:

Wert der Wette = Preis pro Einheit * Einheiten

Verhandeln der Gewinnquoten beim Wetten ist wie das Aushandeln der Preise wirtschaftlicher Güter. Der Preis pro Einheit ist dabei der mögliche Nettogewinn, die Einheiten entsprechen der anteiligen Gewinnchance. Diese Rechnung kann man für beide Wettpartner durchführen. In der Figur oben sind dies die beiden schraffierten Rechtecke. Die Berechnung des Werts der Wette ergibt:

	möglicher Nettogewinn	*	anteilige Gewinnchance	=	Wert der Wette
ich	2	*	1	=	2
Bank	1	*	5	=	5

Mein Wert der Wette ist zu klein gegenüber dem der Bank (2 gegen 5), damit die Werte für beide Parteien gleich sind, müßte ich im Verhältnis 5:1 für mein höheres Risiko entschädigt werden.

Beispiel:

Eine Versicherung rechnet ihre Prämien im wesentlichen nach obigem Schema des Werts einer Wette aus. Sie wollen z.B. eine riskante Unternehmung versichern lassen; die Chancen für den Schadensfall seien mit 1:1000 zu bewerten. Im Schadensfall hat die Versicherung DM 10000.- auszuzahlen. Die Prämie dafür sollte DM 10.- betragen. Ein gewisser Spielraum an Gewinn für die Versicherung erscheint durchaus zulässig, die Versicherung hat außerdem noch Ausgaben für Personal und Mieten; die Prämie könnte daher mit DM 15.- bemessen werden. (Für den Fall, daß die Versicherung mit der Auszahlung im Schadensfall in Schwierigkeiten gelangt, wird sie mit anderen Gesellschaften eine Rückversicherung abschließen.)

Chancenverhältnis und Erwartungswert

Chancenverhältnisse und Erwartungswert stehen in enger Beziehung zueinander; das gibt eine weitere heuristische Brücke zwischen den verschiedenen Konzepten. Bei den Gewinnquoten geht es um das Verhältnis von Gewinn von mir zu Gewinn der Bank (Verlust von mir, mein Einsatz). Beim Erwartungswert sieht man die Gewinne (oder auch Zahlungen) nur aus der Sicht des Spielers. Mit den Daten aus obigem Beispiel ergeben sich folgende Gewinne

falls	E	$\overline{E}$
Nettogewinn von mir	5	-1
Wahrscheinlichkeit	1/6	5/6

Negative Gewinne bedeuten Verluste. Der Erwartungswert des Gewinns beträgt daher

$$5*(1/6) + (-1)*(5/6);$$

das entspricht gerade der üblichen Bedingung eines fairen Spiels nach dem Erwartungswert. Die Berechnung der Gewinnquoten nach der Regel "Kehrwert des Chancenverhältnisses" führt zu denselben Gewinnen und Verlusten wie die Bedingung, daß der Erwartungswert gleich Null ist.

Diese Beziehung zwischen Chancenverhältnis und Erwartungswert kann man unterschiedlich ausnützen. Ist die Heuristik mit dem Wert einer Wette tragfähig, so hat man eine intuitive Begründung dafür, daß der Erwartungswert auch für ein einzelnes Spiel den fairen Preis bestimmen soll. Es ist nämlich eine (nicht nur intuitive) Hürde beim Erwartungswert, daß er sowohl einen Richtwert für den mittleren Gewinn pro Spiel in einer längeren Serie von Spielen angibt, wobei es nicht ganz einfach ist, diesen Wert für eine Serie auf ein Einzelspiel, in welchem man gewinnen oder verlieren kann, zu beziehen. In jedem Fall ist im Einzelspiel der Erwartungswert kein Richtwert, weil er ja notwendigerweise von dem wirklichen Gewinn bzw. Verlust abweicht.

Umgekehrt, für den Fall, daß der Wert einer Wette nicht überzeugend genug ist, kann man wegen der angesprochenen Zusammenhänge diesen genauso wie den Erwartungswert wenigstens mit einer Überlegung, was auf lange Sicht passiert, abstützen.

3. Intuitive Kontexte zu bedingter Wahrscheinlichkeit und Bayes-Formel

Chancenverhältnisse und bedingte Wahrscheinlichkeit

Wenn die Information I die neue Basis für die Bewertung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E ist, dann ist es noch immer eine Wette auf E gegen $\overline{E}$. Da I nicht länger diskutiert bzw. bezweifelt wird, sind die Chancenverhältnisse von

$$E \cdot I \text{ gegen } \overline{E} \cdot I$$

zu vergleichen. Bei zusätzlicher Information I ändern sich die Chancen von E auf:

$$W(E \cdot I) : W(\overline{E} \cdot I).$$

Diese Chancen von E unter zusätzlicher Information kann man leicht in Wahrscheinlichkeiten umschreiben:

$$W(E|I) = \frac{W(E \cdot I)}{W(E \cdot I) + W(\overline{E} \cdot I)}.$$

Der Nenner ist mit $W(I)$ identisch, die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ist in diesem Kontext selbstverständlich:

$$W(E|I) = \frac{W(E \cdot I)}{W(I)}.$$

Die Multiplikationsregel ist lediglich eine Umordnung dieser Beziehung. Der Spezialfall, daß die neue Information I zu keiner Neubewertung der Chancen und der damit zusammenhängenden Wahrscheinlichkeit führt, gibt eine sehr anschauliche Interpretation von Unabhängigkeit. Falls

$$W(E \cdot I) : W(\overline{E} \cdot I) = W(E) : W(\overline{E}),$$

ist die Information I irrelevant für die neuen Chancen. Die heuristische Motivation der Unabhängigkeit von zwei Ereignissen wird üblicherweise so geführt: Zwei Ereignisse sind unabhängig, falls es keine kausalen Bezüge zwischen ihnen gibt; z.B. ist die zweite Münze physikalisch völlig unabhängig von der ersten. Diese Motivation erfaßt jedoch nur einen Teil der wirklichen Zusammenhänge, physikalische und stochastische Unabhängigkeit sind zwei überlappende Konzepte, in vielen Fällen entartet der Hinweis auf fehlende kausale Zusammenhänge zu einem mysteriösen Argument. Dies wird bei den Chancenverhältnissen umgangen.

Beispiel:

Nach einer Serie von 12-mal "rot" am Roulette-Tisch diskutieren Spieler leidenschaftlich über die nun größer oder kleiner gewordene Wahrscheinlichkeit von "schwarz" in der nächsten Runde. Falls es da eine solche Änderung der Wahrscheinlichkeit gäbe, würde dies das Casino auch schon bemerkt haben, sie sind sicherlich die Experten in Sachen Glücksspiel; dann aber hätten sie das Verhältnis der Gewinne zufolge der neuen Chancenverhältnisse schon abgeändert. Aber sie haben das nicht getan, und sie tun es nicht, weil sich die Chancen überhaupt nicht verändert haben durch die vorausgegangene Serie von 12-mal "rot". Innerhalb dieses Kontextes können irreführende Intuitionen entmystifiziert werde.

Andere Eigenschaften der bedingten Wahrscheinlichkeit sind mit dem Konzept der Chancenverhältnisse auch leichter verständlich: Wenn die Information I die Chancen von E gegenüber $\bar{E}$ erhöht, dann muß sie die Chancen vom Gegenteil $\bar{E}$ verringern, da die Chancen von $\bar{E}$ das Verhältnis aus der Sicht des Wettgegners beschreiben. Mit anderen Worten, wenn die Information I das Auftauchen von E begünstigt ($\nearrow$), dann benachteiligt ($\searrow$) I das Auftauchen von $\bar{E}$, in Zeichen:

$$I \nearrow E \iff I \searrow \bar{E}.$$

Ein weiteres Beispiel soll die Schlagkraft des Chancen-Konzepts verdeutlichen.

Beispiel:

Eine Urne enthält zwei weiße und zwei schwarze Kugeln. Zwei Kugeln werden zufällig, nacheinander und ohne Zurücklegen gezogen. Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, daß die zweite weiß ist (W_2), falls die erste weiß ist (W_1), wird leicht mit 1/3 beantwortet. Die Umkehrfrage nach der ersten Kugel, ob sie weiß ist (sie wurde vorübergehend vor dem Betrachter verborgen), falls die zweite weiß ist, hat ihre Tücken. Viele behaupten, die Wahrscheinlichkeit sei nun 1/2 und argumentieren, daß die zweite Kugel die Farbe der erstgezogenen nicht beeinflussen kann, weshalb W_1 von W_2 unabhängig ist.

Nun, die Basis für die neuen Chancen ist das Ereignis W_2. Daher hat man zu vergleichen:

$$W_1\text{-}W_2 \quad \text{gegen} \quad S_1\text{-}W_2,$$

das neue Chancenverhältnis ist:

$$W(W_1\text{-}W_2) : W(S_1\text{-}W_2).$$

Das ist aber genau dasselbe Chancenverhältnis, das man in

der Vorwärtsrichtung hat, wenn die erste Kugel weiß war:

$$W(W_1\text{-}W_2) : W(W_1\text{-}S_2).$$

Dies sieht man unmittelbar, weil die Wahrscheinlichkeit für eine gemischte Folge $W_1\text{-}S_2$ bzw. $S_1\text{-}W_2$ unabhängig von ihrer Reihenfolge ist. Die Symmetrie der beiden Fragestellungen ist nun offenkundig. Man kann die Chancen für W_1 unter der Bedingung W_2 auch direkt ausrechnen:

$$W(W_1)*W(W_2|W_1) : W(S_1)*W(W_2|S_1) = \left(\frac{2}{4}*\frac{1}{3}\right):\left(\frac{2}{4}*\frac{2}{3}\right) = 1:2.$$

Die Information W_2 benachteiligt W_1, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt 1/3 wie in der Vorwärtsrichtung des Beispiels.

Indizien und Diagnosefaktoren

Vor Gericht ist es oft nötig, auf Indizien zurückzugreifen, die andeuten, daß der Angeklagte schuldig ist.

In der Medizin ist die Diagnose von bestimmten Krankheiten nicht mit Sicherheit möglich, vielmehr muß man sich auf verschiedenste Laborbefunde (Bluttests, Röntgen etc.), auf Indizien, stützen, die anzeigen, daß die Krankheit für die untersuchte Person zutrifft. Ein vereinfachter Kontext könnte wie folgt abgebildet werden:

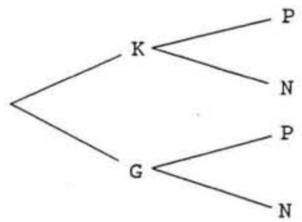

Fig. 4

Die Ereignisse K und G stehen für: "hat die Krankheit" bzw. "hat sie nicht"; P markiert einen positiven Befund, der das Vorliegen der Krankheit andeutet, N einen negativen Befund.

Der Kontext vor Gericht würde bedeuten, daß eine Person schuldig bzw. unschuldig gesprochen wird durch die Bewertung der vorliegenden Indizien.

Es gibt viele Fehlvorstellungen, wie solches Wissen um Indizien in die "Beweisführung" miteinbezogen werden soll. Ein solcher Kontext kann dazu benützt werden, Licht auf wesentliche Eigenschaften der bedingten Wahrscheinlichkeit zu werfen. Dies soll im folgenden durch die Diskussion der Bayes-Formel unterstrichen werden.

Ein Labor-Test mit Ergebnis P wird nur dann als Diagnosefaktor für das Vorliegen der Krankheit K in Erwägung gezogen, falls

$$W(P|K) \gg W(P|G) \quad \text{und} \quad W(N|K) \ll W(N|G),$$

in Zeichen:

$$K \nearrow P \quad \text{und} \quad K \searrow N. \qquad (1)$$

Ein positiver Befund P hat also stark gehäuft unter jenen, die an K leiden, aufzutreten, N dagegen wesentlich weniger häufig. Das Resultat P wird als Diagnosefaktor genommen, da man wegen der obigen Beziehungen erwartet, daß auch gilt:

$$P \nearrow K \quad \text{und} \quad N \searrow K, \qquad (2)$$

d.h. P "begünstigt", N "benachteiligt" das Vorliegen von K, ansonsten würde die ganze Vorgangsweise keinen Sinn machen. Die Beziehung (2) kann aus (1) hergeleitet werden, der Vorteil des Kontexts liegt darin, daß man klare Vorstellungen hat, was man beweisen müßte, und, daß dies eigentlich offensichtlich ist. Um wieviel ein Diagnosefaktor P die bedingte Wahrscheinlichkeit von K erhöht, ist direkt nicht klar, dies hängt von der "Trennkraft" des Labor-Tests ab. Dies ist der Quotient $\frac{W(P|K)}{W(P|G)}$, der mißt, um wieviel eher man ein positives Resultat unter Kranken erhält als unter Gesunden. (Im Fachjargon heißt dies die Inzidenz von Positiven unter Kranken im Vergleich zu Gesunden, in der Statistik ist dies der Likelihood-Quotient.) Die neue, bedingte Wahrscheinlichkeit von K erhält man jedenfalls nicht durch naives Gleichsetzen von $W(P|K)$ mit $W(K|P)$, wie dies häufig mißverständlich geschieht.

Bayes-Formel mit Chancen

Eine neue Information I verändert die Chancen zu

$$W(E \cap I) : W(\bar{E} \cap I).$$

Diese neuen Chancen kann man durch Anwendung der Multiplikationsregel so schreiben:

$$W(E)*W(I|E) : W(\bar{E})*W(I|\bar{E}),$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{W(E)}{W(\bar{E})}*\frac{W(I|E)}{W(I|\bar{E})} : 1.$$

Das ist lediglich eine Umskalierung des Chancenverhältnisses. Man kann die Beziehung wie folgt lesen:

neues Chancenverhältnis	=	altes Chancenverhältnis	* Trennkraft

oder

posteriori odds = priori odds * Likelihood-Quotient

Je größer das alte Chancenverhältnis, je größer die Trennkraft, desto größer das neue Chancenverhältnis. Die Beziehung ist linear, z.B. Verdoppeln der Eingänge verdoppelt das neue Chancenverhältnis. Bei der Bewertung der neuen Chancen hat man <u>zwei</u> Komponenten in Betracht zu ziehen, die alten Chancen und die Kraft des Tests zu trennen (im Beispiel zwischen jenen, die an der Krankheit leiden, und jenen, die nicht daran leiden; vor Gericht würde dies als Stärke der Indizien, zwischen schuldig und unschuldig zu trennen, interpretiert werden).

Beispiel:

Für einen medizinischen Test seien die Wahrscheinlichkeiten wie folgt festgelegt: Alte Wahrscheinlichkeit, krank zu sein, sei gleich 0,1%; der Bluttest sollte jene, die an der Krankheit leiden, mit Sicherheit 0,99 erkennen; er sollte nur 5% von jenen, die gesund sind, fälschlicherweise als positiv einstufen. Das ist ein sehr gutes Design für einen Diagnose-Test, nicht alle Tests haben so hohe Zuverlässigkeiten. Die neuen Chancen für krank unter positivem Befund ergeben sich wie folgt:

Altes Chancenverhältnis	1 : 999
Trennkraft	0,99 : 0,05
Neues Chancenverhältnis	$\frac{1}{999}*\frac{0{,}99}{0{,}05} \approx \frac{1}{1000}*\frac{20}{1} = \frac{20}{1000} = \frac{1}{50}.$

Dieses Chancenverhältnis ergibt eine neue Wahrscheinlichkeit von lediglich 2%. Dies ist nicht Ergebnis einer schlecht angelegten Diagnoseprozedur. Das positive Resultat erhöht die Chancen für K um den Faktor 20. Die kleine neue/posteriori Wahrscheinlichkeit für K wird hauptsächlich durch die kleine alte Wahrscheinlichkeit von K mit W(K)=

0,001 verursacht. Es ist zu überlegen, ob dieser Wert überhaupt zum Problem paßt. Wären die alten Chancen um den Faktor 20 höher, so wäre es auch das neue Chancenverhältnis, die resultierenden 2:5 würden dann eine Wahrscheinlichkeit für K von ca. 30% ergeben. Man beachte, daß die Trennkraft des Diagnoseverfahrens nicht geändert wurde.

Es gibt ein sogenanntes inverses Baumdiagramm, welches sehr hilfreich ist; die Bayes-Formel mit Chancen ist leicht daraus abzulesen. Für obiges Beispiel gilt:

Alte Chancen	"Zustände der Welt"		Indiz
1	K	0,99	P
999	G	0,05	

Fig. 5

$$\frac{1}{999}*\frac{0,99}{0,05} \approx \frac{20}{999} \approx \frac{1}{50}.$$

Die Pfade werden mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten des Indizes unter den verschiedenen Möglichkeiten beschriftet. Für die Berechnung reicht es aus, diese Wahrscheinlichkeiten im richtigen Verhältnis zueinander anzugeben. Ein abschließendes Beispiel soll die Kraft dieses inversen Baumdiagramms demonstrieren.

Beispiel (Bertrand's Schubladen-Paradoxon):

Es gibt drei Kästchen mit je zwei Laden. Zuerst wird ein Kästchen zufällig ausgewählt, dann wird eine der Laden zufällig ausgewählt und geöffnet. Eines der Kästchen enthält je eine Goldmünze, eines je eine Silbermünze in den Laden, eines enthält eine Gold- und eine Silbermünze in den Laden. Nun, man findet eine Goldmünze in der geöffneten Lade. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich eine Goldmünze auch in der anderen Lade? Die Antwort findet man leicht aus dem üblichen Baumdiagramm, das hilft jedoch nicht einzusehen, warum diese Antwort von der intuitiv erwarteten (von 1/2) abweicht (viele Menschen geben diese Antwort), da alle gleich wahrscheinlich sind und nun nur mehr zwei der drei in Frage kommen, da das S/S-Kästchen ausgeschieden ist.

1	G/G	1	G
1	G/S	1/2	
1	S/S	0	

Fig. 6

1 : 1 : 1 - 1*1 : 1*(1/2) : 1*0 = 2 : 1 : 0.

Die Wahrscheinlichkeiten verhalten sich wie 2:1:0 für die Möglichkeiten G/G:G/S:S/S, d.h. die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist 2/3. Natürlich begünstigt das Kästchen G/G "G" in der geöffneten Lade, daher begünstigt "G" das Kästchen G/G, es ist ein Indiz für G/G.

4. Abschließende Bemerkungen

Die Häufigkeitsinterpretation ist sehr hilfreich, um die Additivität der Wahrscheinlichkeit zu verstehen, sie ist ferner von Vorteil, wenn man einige Eigenschaften von statistischen Methoden erhellen will. Im Zusammenhang mit der bedingten Wahrscheinlichkeit jedoch versagt die Häufigkeitsinterpretation, das Chancenverhältnis ist wesentlich klarer und stützt direkt die Art der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten und die Idee, die dahinter steht, nämlich die Neubewertung von Einsätzen und Chancen aufgrund von neuen Informationen. Nebenbei, das Chancenverhältnis eignet sich auch hervorragend als Referenzmodell für die Problemstellung in der Beurteilenden Statistik. Das möchte ich an anderer Stelle weiter ausführen, hier verweise ich auf Buth, 1991.

Literatur

BOROVCNIK, M.: *Revising probabilities according to new information: A fundamental stochastic intuition.* In: Davidson, R. und Swift, J.: Proceedings of the Sec. Int. Conf. on Teaching Statistics, The University of Victoria, Canada, 1987

BOROVCNIK, M.: *Anwendungen der Bayesschen Formel.* In: Didaktik der Mathematik 14 (1986), S. 183-203

BUTH, M.: *Die Behinderung des gesunden Menschenverstandes durch Stochastik, dargestellt am Beispiel des Testens von Hypothesen.* Erscheint in: Stochastik in der Schule 11 (1991)

RIEMER, W.: *Neue Ideen zur Stochastik.* Bibliographisches Institut, Mannheim 1985