Kettenbriefe - was sie versprechen, was sie halten

von **Dietmar Pfeifer**, Oldenburg

Zusammenfassung: Es wird ein einfaches stochastisches Modell eines Kettenbriefsystems vorgestellt, welches hinreichend genau erklärt, warum solche Systeme meist nicht das halten, was sie versprechen, wobei auch auf statistische Fragestellungen eingegangen wird. Eine Veranschaulichungsmöglichkeit des Modells durch den Einsatz eines PC in der Schule wird ebenfalls diskutiert.

Einleitung

Welcher Leser hat nicht schon einmal im Laufe seines Lebens einen *Kettenbrief* erhalten und sich gewundert, warum er trotz großer Versprechungen und genauester Einhaltung der Spielregeln keine oder wenig Resonanz erfahren hat? Jüngst kam meine Tochter mit einem solchen Kettenbrief von der Schule nach Hause, der nach dem folgenden Muster aufgebaut war: Auf einem separaten Blatt stehen sechs Namen mit Adressen; man schreibe an die oberste Adresse eine Postkarte, streiche diese und hänge dafür die eigene Adresse unten an. Das so modifizierte Blatt schicke man innerhalb von drei Tagen an sechs befreundete Schüler(innen) mit der Bitte, nach dem beschriebenen Muster fortzufahren. Wenn jeweils alle angeschriebenen Teilnehmer mitmachen, so wird versprochen, erhält man innerhalb kürzester Zeit 6^6=46656 Postkarten ... (Meine Tochter wartet seitdem immer noch vergeblich auf Post, hat die Hoffnung aber inzwischen aufgegeben.)

Die Tatsache, daß solche Kettenbriefe meist viel versprechen, aber letztlich doch nicht halten, läßt sich relativ schnell anhand eines einfachen stochastischen Modells verdeutlichen, welches sich aus folgenden Gründen ohne weiteres mit schulischen Mitteln behandeln läßt:

- es wird lediglich die Binomialverteilung verwendet
- es treten nur elementare bedingte Wahrscheinlichkeiten auf das Problem hat einen unmittelbaren Bezug zur "Wirklichkeit".

Darüberhinaus ergibt sich in diesem Zusammenhang eine echte Motivation zum Computer-Einsatz im Stochastik-Unterricht, da die explizite Angabe der auftretenden

Wahrscheinlichkeiten praktisch unmöglich ist. Ebenso bieten sich Simulationsstudien zur Verdeutlichung der Wirkung von Kettenbriefsystemen an.

In diesem Aufsatz sollen vor allem die folgenden drei Fragen genauer untersucht werden:

a) Wie groß ist der mittlere Postrücklauf an jeden Teilnehmer bei einer Teilnahmerate p?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man *keine* Post bekommt, in Abhängigkeit von der Teilnahmerate p?
c) Wie kann man die Teilnahmerate statistisch schätzen, wenn eine gewisse Menge Post zurückkommt?

Ein stochastisches Kettenbriefmodell

Zur stochastischen Analyse der Verbreitung eines Kettenbriefs der oben beschriebenen Art nehmen wir an, daß in jeder Runde m Teilnehmer angeschrieben werden (oben: $m=6$) und jeder Teilnehmer unabhängig von allen anderen mit einer Wahrscheinlichkeit (Teilnahmerate) $p\varepsilon[0,1]$ den Brief weitergibt. Es können demnach maximal m^m Teilnehmer nach der m-ten Runde zusammenkommen; dies ist zugleich die Höchstzahl der Postkarten, die jeder Teilnehmer erhalten kann.

Mit S_n wollen wir die Anzahl der in Runde n aktiven Teilnehmer bezeichnen, wobei wir gemäß der obigen Spielregel nur den Fall $0\leq n\leq m$ betrachten. Offensichtlich ist stets $S_0=1$; bricht das Spiel zwischendurch ab, d.h. ergibt sich für ein $n<m$ die Teilnehmerzahl $S_n=0$, so wird $S_i=0$ gesetzt für alle $i=n+1,\dots,m$.

Wegen des mehrstufigen Charakters des Spiels ist es zweckmäßig, zunächst die *bedingten Wahrscheinlichkeiten* dafür zu betrachten, daß in der n-ten Runde noch genau k Teilnehmer mitspielen, wenn in der n-1-ten Runde $s\varepsilon\{0,1,2,\dots,m^{n-1}\}$ aktive Teilnehmer vorhanden waren. (Im Fall $n=1$ ist wegen $S_0=1$ natürlich nur die Wahl $s=1$ möglich.) Da alle diese s Teilnehmer unabhängig voneinander je m weitere Teilnehmer anschreiben, von denen jeder mit Wahrscheinlichkeit p aktiv wird, ergibt sich also für die bedingte Verteilung von S_n unter der Bedingung $S_{n-1}=s$ eine *Binomialverteilung*:

$$P(S_n=k|S_{n-1}=s)=\binom{sm}{k}p^k(1-p)^{sm-k} \qquad (1)$$

mit $2\leq n\leq m$, $0\leq k\leq sm$, $0\leq s\leq m^{n-1}$.

Diese Formel ist insbesondere auch in dem Fall $s=0$ richtig, weil dann nach Voraussetzung $S_n=0$ zu setzen ist, die bedingte Wahrscheinlichkeit auf der rechten Seite von (1) also den korrekten Wert 1 ergibt.

Mit Hilfe von Formel (1) kann man sich nun zuerst einmal überlegen, wieviel Post man in Abhängigkeit von der Teilnahmerate p zu erwarten hat, d.h. den Erwartungswert $E(S_m)$. Zur vereinfachten Berechnung dieses Ausdrucks benutzt man am besten die folgende Formel, die ein Analogon zum *Satz für die totale Wahrscheinlichkeit* (vgl. Barth und Haller (1985), Satz 134.1) für Erwartungswerte darstellt:

Satz *(Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit für Erwartungswerte)*

X und Y seien Zufallsvariablen mit je endlich vielen Werten $\{x_1,\dots x_n\}$ bzw. $\{y_1,\dots,y_m\}$. Der bedingte Erwartungswert von X und $Y=y_j$ sei erklärt als der Erwartungswert bezüglich der bedingten Verteilung, also

$$E(X|Y=y_j)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i|Y=y_j),\ j=1,\dots,m. \qquad (2)$$

Dann gelten die folgenden Formeln:

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{m}P(X=x_i|Y=y_j)P(Y=y_j) \qquad (3)$$

$$E(X)=\sum_{j=1}^{m}E(X|Y=y_j)P(Y=y_j). \qquad (4)$$

Beweis. Formel (3) ist lediglich eine Fassung des bekannten Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit für Zufallsvariablen. Formel (4) ergibt sich aus (2) und (3) wie folgt:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{m}P(X=x_i|Y=y_j)P(Y=y_j)=\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i|Y=y_j)P(Y=y_j)\Big)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}E(X|Y=y_j)P(Y=y_j).$$

Wendet man die Formeln (2) und (4) auf die in Formel (1) angegebene Binomialverteilung an, so erhält man ohne weitere Rechnung (vgl. Barth und Haller (1985), Satz 241.1) sofort:

$$E(S_1) = mp,\quad E(S_n|S_{n-1}=s) = msp,\ 2\le n\le m \tag{5}$$

$$E(S_n) = \sum_{s=0}^{m^{n-1}} E(S_n|S_{n-1}=s)P(S_{n-1}=s) = \sum_{s=0}^{m^{n-1}} msp\,P(S_{n-1}=s) = mp\sum_{s=0}^{m^{n-1}} s\,P(S_{n-1}=s)$$

$$= mpE(S_{n-1}),\ 2\le n\le m. \tag{6}$$

Formel (6) ergibt damit rekursiv

$$E(S_n) = mpE(S_{n-1}) = (mp)^2E(S_{n-2}) = \dots = (mp)^{n-1}E(S_1) = (mp)^n \tag{7}$$

für $1\le n\le m$. Der erwartete Postrücklauf $E(S_m)$ an jeden Teilnehmer beträgt also

$$E(S_m) = (mp)^m. \tag{8}$$

Interessant ist dieses Ergebnis für den Fall $p={}^1/_m$, d.h. den Fall, daß im Mittel nur ein Teilnehmer den Kettenbrief weiterschickt. Der erwartete Postrücklauf beträgt dann ebenfalls genau 1. Die folgende Tabelle enthält einige Werte von $E(S_6)$ für verschiedene p.

p	.1	.2	.3	.4	.5
$E(S_6)$	0.0466	2.9859	34.012	191.12	729
p	.6	.7	.8	.9	1.
$E(S_6)$	2176.7	5489.0	12230.5	24794.9	46656

Selbst bei einer Teilnahmerate von 80% beträgt der mittlere Postrücklauf also nur ca. ein Viertel der angekündigten Postkartenzahl! Sinkt die Teilnahmerate gar unter 10%, kann man schon ziemlich sicher sein, nichts zu bekommen, denn es gilt

$$E(S_m) = \sum_{s=0}^{m^m} s\,P(S_m=s) \ge \sum_{s=1}^{m^m} P(S_m=s) = P(S_m\ge 1),$$

also

$$P(S_m=0) = 1 - P(S_m\ge 1) \ge 1 - E(S_m) = 0.9533; \tag{9}$$

in mindestens 95% aller Fälle geht man bei einer solch geringen Beteiligung leer aus.

Bemerkungen

a) Formel (8) ist auch intuitiv leicht einsehbar: In der ersten Runde werden m Teilnehmer angeschrieben, von denen jeder mit Wahrscheinlichkeit p weiter-

macht; im Mittel sind also in der ersten Runde mp Teilnehmer aktiv. Jeder von diesen setzt den Prozeß auf dieselbe Weise in der nächsten Runde fort; im Mittel ergeben sich in der zweiten Runde also $(mp)^2$ aktive Teilnehmer usw.

b) Zur Herleitung der Formel (8) wurde nicht von der speziellen Form der Binomialverteilung in (1) Gebrauch gemacht, sondern lediglich von ihrer Erwartungswerteigenschaft $E(S_n|S_{n-1}=s)=mps$. Formel (8) bleibt also allgemeiner auch dann gültig, wenn jeder aktive Teilnehmer einer Runde im Mittel mp weitere aktive Teilnehmer gewinnt, unabhängig davon, auf welche Weise dies geschieht.

c) Es läßt sich ähnlich wie in (6) und (7) auch eine Formel für die *Varianz* von S_m herleiten (vgl. hierzu auch Krengel (1991), S. 116, Aufgabe 3). Sie lautet:

$$\mathrm{Var}(S_m) = mp(1-p)\sum_{k=0}^{m-1}(mp)^{m-1+k} = \begin{cases} (mp)^m(1-p)\dfrac{(mp)^m-1}{mp-1}, & mp\ne 1 \\ m-1, & mp=1. \end{cases}$$

d) In dem hier betrachteten Modell wird die Möglichkeit, denselben Kettenbrief von *verschiedenen* Teilnehmern aus früheren Runden zu erhalten, zunächst außer acht gelassen. Mehrfachanschreiben lassen sich aber gegebenenfalls durch eine entsprechende Verkleinerung des Parameters p kompensieren.

Warum man damit rechnen muß, manchmal nichts zu bekommen

Formel (9) gibt eine erste Antwort auf die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit der ungünstigste Fall, nämlich überhaupt keine Postkarte zu erhalten, eintritt, und zwar im Sinne der obigen Bemerkung sogar unabhängig von der speziellen Verteilung (1). In diesem Abschnitt wollen wir statt einer groben Abschätzung die exakte Wahrscheinlichkeit hierfür berechnen, wobei jetzt die Binomialverteilung eine entscheidende Rolle spielt.

Eine Vorgehensweise analog zu Abschnitt 1 führt allerdings nicht direkt zum Ziel: Wegen $P(S_n=0|S_{n-1}=s)=(1-p)^{sm}$ für $2\le n\le m^{n-1}$ erhält man mit (3) zunächst nur den komplizierteren Ausdruck

$$P(S_n=0) = \sum_{s=0}^{m^{n-1}} (1-p)^s P(S_{n-1}=s) = E\left((1-p)^{S_{n-1}}\right), \tag{10}$$

den man nicht ohne weiteres (z.B. rekursiv) vereinfachen kann. Die "bessere" Vorgehensweise ist dagegen wie folgt (Rückwärtsrekursion):

Bezeichnet man mit P_n die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einem Teilspiel von n Runden zuletzt keine aktiven Teilnehmer mehr vorhanden sind, so gilt die Rekursionsformel

$$P_0=0,\ P_n = (pP_{n-1}+1-p)^m = (1-p(1-P_{n-1}))^m,\ 1\leq n\leq m. \qquad (11)$$

Dies macht man sich am einfachsten anhand der Baumstruktur des Kettenbriefs klar: Ein Teilspiel aus n Runden besteht aus m voneinander unabhängigen Teilspielen aus je n-1 Runden. Ein Teilspiel aus n Runden bricht dabei vor oder in der letzten Runde ab, wenn entweder einer der m angeschriebenen Teilnehmer der nächsten Runde den Brief - mit Wahrscheinlichkeit p - weitergibt und später das Spiel - mit Wahrscheinlichkeit P_{n-1} - abgebrochen wird oder er aber selbst inaktiv wird - mit Wahrscheinlichkeit $1-p$. Jeder der m angeschriebenen Teilnehmer verursacht also mit einer Wahrscheinlichkeit von $pP_{n-1}+1-p$ einen Abbruch des Verfahrens vor oder in der letzten Runde. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit müssen diese m Wahrscheinlichkeiten miteinander multipliziert werden, um für ein Spiel aus n Runden die Wahrscheinlichkeit eines Abbruchs vor oder in der letzten Runde zu berechnen; dies ergibt dann die Formel (11).

Eine Auswertung der Rekursion für den Fall m=6 ergibt somit mit der Abkürzung $q:= 1-p$

$$P(S_6=0) = P_6 = \left(p\left(p\left(p\left(p(pq^6+q)^6+q\right)^6+q\right)^6+q\right)^6+q\right)^6; \qquad (12)$$

dies ist ein Polynom vom Grad 55986 in p! Wollte man sämtliche 55987 Koeffizienten dieses Polynoms aufschreiben, und würde man dabei 10 Koeffizienten pro Zeile und 50 Zeilen pro Seite verwenden, so erhielte man ein Buch mit einem Umfang von über 100 Seiten! (Wer über ein Programmpaket verfügt, das symbolisch rechnen kann - z.B. DERIVE(c) -, probiere einmal aus, die entsprechende Rekursion für m=3, d.h. ein Polynom vom Grade 39 in p, explizit aufzulösen ...)

Im allgemeinen läßt sich also die Wahrscheinlichkeit dafür, keine Post zu erhalten, nur rekursiv unter Verwendung von (11) und damit sinnvollerweise am besten mit Hilfe eines PC berechnen.

Die folgende Tabelle enthält einige Werte von $P(S_6=0)$ für verschiedene p.

p	.1	.2	.3	.4	.5
$P(S_6=0)$	0.9715	0.5539	0.1856	0.0587	0.0173
p	.6	.7	.8	.9	1.
$P(S_6=0)$	0.00425	0.00073	0.00007	10^{-6}	0

Ein Vergleich von Formel (9) mit dem exakten Tabellenwert zeigt dabei, daß die einfache Abschätzung für $P(S_m=0)$ bei kleinem p schon recht brauchbar ist.

Die folgende Graphik (Abb. 1) zeigt die Komplementärwahrscheinlichkeiten $P(S_m>0)$ für Postrücklauf in Abhängigkeit von m=2,3,...,9 und p zwischen 0 und 1.

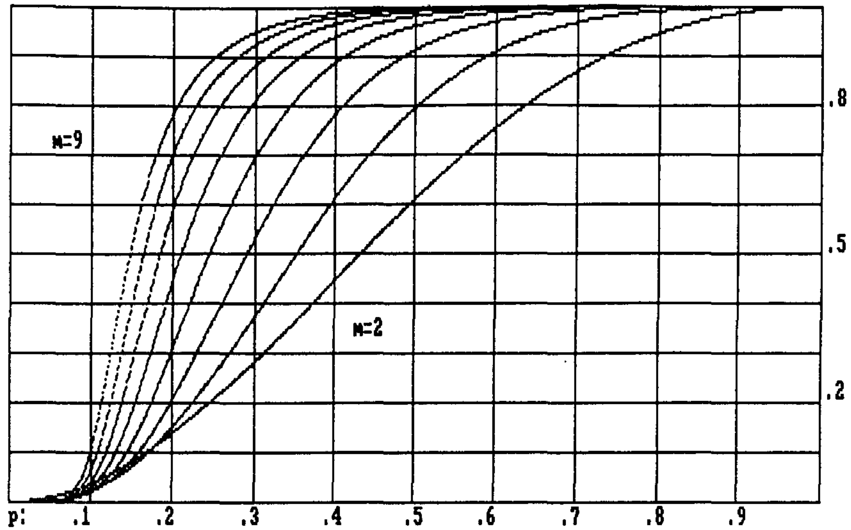

Abb. 1

Halten Kettenbriefe, was sie versprechen?

Wie steht es nun mit dem gegenteiligen Extremfall, d.h. wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man wirklich die versprochene Maximalzahl an Postkarten zugeschickt bekommt? Offensichtlich ist das genau dann der Fall, wenn *alle* möglichen m^n Teilnehmer auf *allen* Stufen n=0,1,...,m aktiv sind; wegen der stochastischen Unabhängigkeit des Verhaltens der Teilnehmer ergibt sich damit die Formel

$$P(S_m = m^m) = p^m \cdot p^{m^2} \cdot p^{m^3} \cdot \ldots \cdot p^{m^m} = p^{\sum_{k=1}^m m^k} = p^{m(m^m-1)/(m-1)}. \qquad (13)$$

In dem betrachteten konkreten Fall ist dies gerade $P(S_6=46656)=p^{55986}$. Selbst eine Teilnahmerate von 99,99% ergäbe hierfür also nur den Wert 0.0037, d.h. nicht einmal in einem halben Prozent aller Fälle würde dieses Ereignis tatsächlich eintreten!

Noch schwieriger gestaltet sich die exakte Berechnung der übrigen Wahrscheinlichkeiten $P(S_m=k)$ für $1<k<m^m-1$. Man stellt sie i.a. implizit in Form der *erzeugenden Funktion*

$$g_m(t) = E(t^{S_m}) = \sum_{k=0}^{m^m} P(S_m=k)t^k,\ t\varepsilon\mathbf{R}, \tag{14}$$

dar, die uns schon in Formel (10) für t=1-p begegnet ist (vgl. hierzu etwa Krengel (1991), S. 114ff.). Für die erzeugende Funktion gilt hier eine Rekursionsformel ähnlich wie (11):

$$g_m(t) = \underbrace{h_m \circ \ldots \circ h_m}_{m\text{-mal}}(t) \tag{15}$$

mit

$$h_m(t) = (1-p+pt)^m,\ t\varepsilon\mathbf{R}. \tag{16}$$

Für t=0 erhält man hieraus Formel (11) zurück. Die Wahrscheinlichkeiten $P(S_m=k)$, $1 \le k \le m^m-1$, lassen sich wegen der Reihendarstellung in (14) zwar analytisch durch Differenzieren vermöge

$$P(S_m=k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k} g_m(t)\Big|_{t=0} \tag{17}$$

gewinnen, eine explizite Berechnung scheitert aber wieder an dem hierfür notwendigen, enormen Rechenaufwand.

Interessant erscheint in diesem Zusammenhang noch die Frage, ob man aus der Anzahl der rückläufigen Postkarten statistisch auf die Teilnahmerate p schließen kann. Eine Möglichkeit hierzu eröffnet Formel (8): Wegen $E(S_m)=(mp)^m$ ist zumindest der Postrücklauf S_m eine *erwartungstreue Schätzgröße* für den "Parameter" $(mp)^m$ (vgl. Barth und Haller (1985), Definition 379.1 oder Krengel (1991), Abschnitt 4.3). Durch Umformung und Auflösung nach p bietet sich an, die Größe

$$\hat{p} = \frac{1}{m}\sqrt[m]{S_m} \tag{18}$$

als Schätzgröße für den Parameter p zu verwenden. Allerdings ist diese Schätzgröße nicht mehr erwartungstreu; wegen der *Jensen'schen Ungleichung* (vgl. Plachky u.a. (1983), Satz 4.7) erhält man nämlich i.a. nur die Abschätzung

$$E(\hat{p}) \le \frac{1}{m}\sqrt[m]{E(S_m)} = p \tag{19}$$

(die Abbildung $x \to \sqrt[m]{x}$ ist konvex!), d.h. $\hat{p}$ unterschätzt den wahren Wert p systematisch. Es läßt sich allerdings nachweisen, daß die Schätzgröße $\hat{p}$ *konsistent* bezüglich p ist (vgl. Barth und Haller (1985), Definition 379.2), und damit ihre Verwendung für große Werte von m gerechtfertigt werden kann.

Bemerkungen

a) Das hier vorgestellte stochastische Modell ist in der einschlägigen Literatur als ein Spezialfall des *Bienaymé-Galton-Watson-Prozesses* bekannt. Es wurde bereits im 19. Jahrhundert zur Untersuchung des Aussterbens berühmter Familiennamen von Francis Galton eingesetzt. Die Verwendung erzeugender Funktionen geht wohl auf Reverend Henry William Watson zurück, der 1874 eine (allerdings nicht ganz korrekte) Lösung angab. Seit 1972 weiß man, daß Irénée Jules Bienaymé schon 1845 eine Lösung entdeckt hatte. (Der interessierte Leser findet hierzu Anmerkungen in Krengel (1991, S. 114) und Barth und Haller (1985) unter den Stichworten BIENAYMÉ und GALTON im dortigen Anhang III.)

b) Eine andere Variante eines Kettenbriefsystems, welches sogar ein Gericht in den USA beschäftigt hat, wird in Gastwirth und Bhattachaya (1984) beschrieben. Auch hier wird mit relativ elementaren Mitteln gezeigt, daß solche Systeme i.a. nicht das halten können, was sie versprechen.

c) Kettenbriefsysteme sind unter bestimmten Voraussetzungen (z.B. im Zusammenhang mit Geldeinsätzen) gesetzlich verboten. Trotzdem tauchen derartige Systeme leider immer wieder in der Praxis auf. Das hier vorgestellte Modell sollte die Sinnhaftigkeit eines solchen Verbots hinreichend erklären und (hoffentlich) eine entsprechend abschreckende Wirkung erzielen.

Programme

Im folgenden wird ein BASIC-Programm vorgestellt, das das obige stochastische Kettenbriefmodell veranschaulicht.

Berechnet werden die Wahrscheinlichkeiten $P(S_m=0)$ für die Situation m=6 und n= 1,2,...,6. Mit der Option 'c' können Berechnungen für verschiedene Eingabewerte von p wiederholt werden. Die Option 's' simuliert mit dem zuletzt eingegebenen Wert von p für verschiedene Spiele den Postkarteneingang und gibt jeweils die Schätzgröße $\hat{p}$ für p aus. Die Option 'q' bricht das Programm ab.

```
10 DIM A#(6)
20 CLS
30 PRINT
40 PRINT
50 PRINT" Dieses Programm berechnet die Abbruchwahrscheinlichkeit in einem"
60 PRINT" Kettenbrief mit 6 Namen bis zur angegebenen Anzahl von Runden."
70 PRINT" Dabei bezeichnet die Größe 'p' die Wahrscheinlichkeit dafür, daß"
80 PRINT" jeder angeschriebene Teilnehmer im Spiel bleibt, d.h. jeweils"
90 PRINT" 6 Briefe weiterleitet."
100 PRINT" Das Programm startet neu bei Eingabe von 'c' und bricht ab"
110 PRINT" bei Eingabe von 'q'. Bei Eingabe von 's' wird der Postrücklauf"
120 PRINT" für einen Kettenbrief mit je 6 Namen simuliert und die eingegebene"
130 PRINT" Teilnahmewahrscheinlichkeit 'p' nach der Formel 'S^(1/6)/6' ge-"
140 PRINT" schätzt, wobei 'S' die Anzahl der eingegangenen Briefe bezeichnet."
150 PRINT
160 PRINT
170 INPUT" p=";P#
180 PRINT
190 PRINT
200 A#(0)=0
210 FOR I=0 TO 5
220 A#(I+1)=(A#(I)*P#+1#-P#)^6#
230 PRINT" P(Abbruch vor oder in Runde";I+1;")=";A#(I+1)
240 NEXT I
250 PRINT
260 PRINT" P(kein Abbruch bis Runde 6)=";1-A#(6)
270 I$=INKEY$
280 IF I$="q" THEN GOTO 310
290 IF I$="c" THEN GOTO 20
300 IF I$="s" THEN GOTO 320 ELSE GOTO 270
310 SYSTEM
320 CLS
330 RANDOMIZE TIMER
340 S#=1
350 Z#=0
360 FOR K=1 TO 6
370 FOR I=1 TO 6*S#
380 Z#=Z#+INT(RND+P#)
390 NEXT I
400 S#=Z#
410 Z#=0
420 NEXT K
430 PRINT "p=";
440 PRINT USING "#.####";P#
450 PRINT" Postrücklauf: ";S#;TAB(40);"Schätzwert für Teilnahmerate: ";
460 PRINT USING "#.####";S#^(1/6)/6
470 J$=INKEY$
480 IF J$="" THEN GOTO 340 ELSE SYSTEM
```

- Programm 1 -

Die Quellcodes dieses und weiterer Programme (graphische Darstellung der Rücklaufwahrscheinlichkeiten für verschiedene Werte von m und p) zusammen mit kompilierten Versionen für IBM-kompatible Rechner (.EXE-Files) können gegen Einsendung einer formatierten Diskette (5¼-Zoll, 360 KB oder 3½-Zoll, 720 KB bzw. 1,44 MB) sowie eines Freiumschlages vom Autor unter der Anschrift

Prof. Dr. Dietmar Pfeifer · Fachbereich Mathematik
Universität Oldenburg · Postfach 2503 · W-2900 Oldenburg

bezogen werden.

Literatur

[1] **Barth, F. und Haller, R.** (1985): *Stochastik Leistungskurs*, 3. Aufl., Ehrenwirth, München.

[2] **Gastwirth, J. L. und Bhattachaya, P. K.** (1984): *Probability models of pyramid or chain letter systems demonstrating that their promotional claims are unreliable*. Operations Research 32, 527-536.

[3] **Krengel, U.** (1991): *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. 3. Aufl., Vieweg, Braunschweig.

[4] **Plachky, D., Baringhaus, L. und Schmitz, N.** (1983): *Stochastik I*. Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden.

Für interessierte Leser:

Die Auflösung der Rekursion (11) im Fall m=3 ergibt das folgende Polynom vom Grad 39:

$$
\begin{aligned}
P(S_3=0) = {} & - p^{39} + 27p^{38} - 351p^{37} + 2916p^{36} - 17325p^{35} + 78030p^{34} - 275346p^{33} \\
& + 775008p^{32} - 1751013p^{31} + 3156597p^{30} - 4427001p^{29} + 4497444p^{28} \\
& - 2519586p^{27} - 1035177p^{26} + 4094253p^{25} - 4433319p^{24} + 1848393p^{23} \\
& + 1381761p^{22} - 2654910p^{21} + 1550799p^{20} + 182898p^{19} - 875889p^{18} \\
& + 489591p^{17} + 35289p^{16} - 159921p^{15} + 50733p^{14} + 14091p^{13} - 3618p^{12} \\
& - 6669p^{11} + 270p^{10} + 3168p^{9} - 864p^{8} - 432p^{7} + 81p^{6} + 72p^{5} + 27p^{4} \\
& - 27p^{3} + 1.
\end{aligned}
$$