Mensch-ärger-dich-nicht und Zufallsvariablen

von **Gunter Stein**, Darmstadt

Zusammenfassung: Die mittlere Schrittzahl beim Mensch-ärger-dich-nicht-Spiel läßt sich auf verschiedene Weisen berechnen. Die unterschiedlichen Lösungsmethoden (eine Sammlung aus verschiedenen Stochastikkursen) werden im Hinblick auf ein formalabstraktes Konzept der Zufallsvariablen diskutiert. Solche anspruchsvollen Aufgaben, von motivierten und ideenreichen Schülern bearbeitet, liefern eine Fülle von Lösungsideen, die dazu anregen, erneut über das Lehren und Lernen von Mathematik nachzudenken.

Schwierigkeiten mit Zufallsvariablen im Stochastikunterricht können verschiedene Ursachen haben: Bei der Einführung sind es die Sprech- und Schreibweise. Eine Zufallsvariable ist weder "zufällig" noch "variabel", sondern eine reellwertige Funktion auf dem Wahrscheinlichkeitsraum Ω. Daß diese Funktionen mit großen Buchstaben, $X:\Omega \to \mathbb{R}$, bezeichnet werden und Ereignisse $\{\omega | X(\omega)=a\}$ als $X=a$ geschrieben werden, ist für das Verständnis ebenfalls nicht förderlich. Allerdings ist diese abstrakte Begrifflichkeit nützlich bei weiteren Definitionen, beispielsweise bei der Unabhängigkeitsdefinition von Zufallsvariablen, und zum Beispiel beim Beweis, daß der Erwartungswert E ein linearer Operator auf der Menge der Zufallsgrößen ist. Bei den Anwendungen spielt die Formalisierung der Zufallsvariable als eine meßbare Funktion keine Rolle.

Im Mathematikunterricht werden die terminologischen Schwierigkeiten teilweise umgangen, indem man möglichst bald zur Verteilung übergeht bzw. formuliert: Eine Zufallsvariable liegt dann vor, wenn bei einem Zufallsexperiment reelle Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, \ldots$ erscheinen. Dies ermöglicht dann die Deutung der Zufallsvariable als Glücksspiel; der Erwartungswert $E = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \ldots$ ist dann der mittlere Gewinn, der sich beim Drehen des Glücksrades ergibt, wenn die Auszahlungen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, \ldots$ erfolgen (Abb. 1).

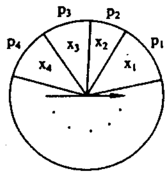

Abb. 1

Auch die Interpretation von E als Massenschwerpunkt kann zum Verständnis hilfreich sein (Abb. 2).

Stochastik in der Schule 12 (1992), Nr. 3, S. 29-36

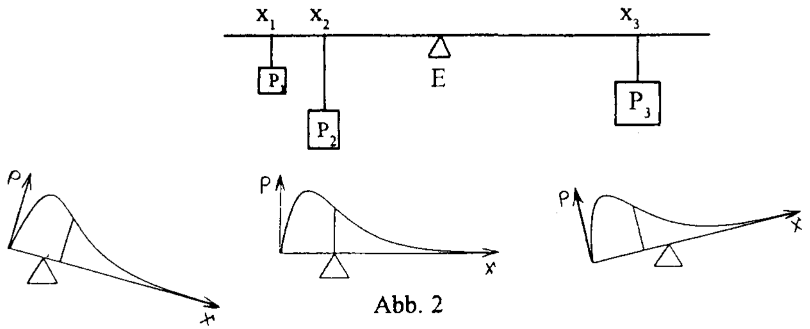

Abb. 2

Aber auch diese methodische Hilfe, bei der ein schwieriger Sachverhalt auf die Verständnisebene von Schülern herabtransformiert wird, bringt noch Schwierigkeiten mit sich. Es gibt Aufgaben, bei denen ein allzu starres Begriffskonzept der Zufallsvariablen einfache Berechnungen von Erwartungswerten behindert.

Dies soll an einem Beispiel des Mensch-ärger-dich-nicht-Spiels erläutert werden, und zwar geht es um die Berechnung der mittleren Schrittzahl. Dabei ist zu beachten, daß man nach einer 6 noch einmal würfeln darf, d.h. man darf so lange vorrücken, bis keine 6 mehr erscheint. (Ohne diese Spielregel ist die mittlere Augenzahl bekanntlich $^1/_6(1+2+3+4+5+6)={}^{21}/_6 = 3{,}5$.)

Um ungefähr abzuschätzen, um wieviel man weiter als 3,5 ziehen kann, könnte das Problem vorab mit einem programmierbaren Taschenrechner oder auf einem Tischrechner simuliert werden. Das Programm (Abb. 3) liefert bei 10000 Simulationen eine Schrittweite von 4,1964:

```
N = 0 : S = 0
A = [6*RND] + 1
S = S + A
A = 6
N = N + 1
IF N < 10000
PRINT S/N
```

Abb. 3

Bei einem Ansatz, der dem formalen Konzept entspricht, setzt man

$$\Omega = \{\omega = (\underbrace{6,6,\ldots,6}_{n},a) \mid a=1,2,3,4,5\}_{n\in N_0} = \{a, 6a, 66a, \ldots\}_{a=1,2,3,4,5}$$

$p(\omega) = (^1/_6)^{n+1}$, X: $\omega \to 6n+a$.

Die Berechnung des Erwartungswertes $E = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{a=1}^{5}(6n+a)(^1/_6)^{n+1}$ führt auf eine unendliche Reihe, deren Summation den Schülern i.a. nicht geläufig ist. Auch ein etwas weniger formaler Ansatz vereinfacht die Reihe kaum:

Schrittzahl	1 2...5	7 8...11	13...17	19...23	...
Wahrscheinlichkeit	1/6	$1/6^2$	$1/6^3$	$1/6^4$	...

$$E = \frac{1}{6}(1+2+\ldots+5) + \frac{1}{6^2}(7+8+\ldots+11) + \frac{1}{6^3}(13+\ldots+17) + \ldots$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 15 + \frac{1}{6^2}\cdot 45 + \frac{1}{6^3}\cdot 75 + \ldots = \frac{15}{6}\left(1 + \frac{3}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{7}{6^3} + \ldots\right).$$

Auch der Versuch, die mittlere Wurfzahl W zu ermitteln und diese dann mit 3,5 zu multiplizieren, um die mittlere Schrittzahl E zu erhalten, führt auf keine den Schülern bekannte Reihe:

Würfe	1	2	3	3	...
Wahrscheinlichkeit	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}\frac{5}{6}$	$(\frac{1}{6})^2\frac{5}{6}$	$(\frac{1}{6})^3\frac{5}{6}$	...

$$W = 1\cdot\frac{5}{6} + 2\cdot\frac{1}{6}\frac{5}{6} + 3\cdot\frac{1}{6^2}\frac{5}{6} + 4\cdot\frac{1}{6^3}\frac{5}{6} + \ldots = \frac{5}{6}\left(1 + \frac{2}{6} + \frac{3}{6^2} + \frac{4}{6^3} + \ldots\right)$$

Mancher Lehrer mag sich bei diesen Lösungsansätzen zu Recht fragen, ob es sich wegen dieser Aufgabe lohnt, die Summenformel für die Reihe

$$S = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots,\quad 0<|q|<1$$

herzuleiten, denn dazu braucht man die geometrische Reihe

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q}.$$

Für die Berechnung von S im Unterricht gibt es verschiedene Möglichkeiten:

$$\begin{aligned}
\text{(i)}\quad & 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots && = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-q}(1+q+q^2+\ldots) = \frac{1}{(1-q)^2} \\
& \quad + q + q^2 + q^3 + \ldots + q\frac{1}{1-q} \\
& \quad\quad + q^2 + q^3 + \ldots + q^2\frac{1}{1-q} \\
& \quad\quad\quad + q^3 + \ldots + \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)}\quad S &= 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots \\
qS &= q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots \\
\hline
S-qS &= 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q}
\end{aligned}$$

(iii) Der eleganteste Beweis setzt Analysiskenntnisse voraus:

$$S = \frac{d}{dq}(q + q^2 + q^3 + \ldots) = \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Somit ergibt sich für die mittlere Wurfzahl

$$W = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{6})^2} = \frac{6}{5} \text{ und somit } E = W\cdot\frac{21}{6} = \frac{21}{5} = 4{,}2.$$

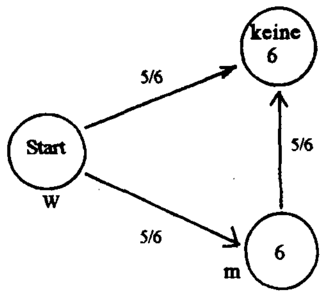

Abb. 4

Aus $W = 1 + \frac{1}{6}m$ und $m = 1 + \frac{1}{6}m$ folgt $W = \frac{6}{5}$.

Die Mittelwertsregeln für Markow-Ketten sind zwar ein hervorragendes Beispiel dafür, wie man einen schwierigen Sachverhalt bis auf Mittelstufenniveau herabtransformieren kann, aber die Behandlung im Unterricht dürfte eher die Ausnahme sein.

Eine Schwierigkeit für den Lehrer im Stochastikunterricht besteht darin, daß Schüler zu einer Aufgabe verschiedene, oft falsche Lösungen finden, bei denen es oft große Mühe macht, falsche Denkansätze aufzuklären. (Die Besprechung falscher Schülerlösungen vor der gesamten Klasse ist nicht unproblematisch, da nicht wenige Schüler durch die ausführliche Erörterung falscher Ansätze eher verwirrt als aufgeklärt werden.) Ebenfalls schwierig kann es für den Lehrer werden, wenn Schüler einen anderen Lösungsweg finden, der möglicherweise leichter und eleganter als der des Lehrers ist. Zum Beispiel folgende Lösung:

Nach einer Serie von Sechsen rückt ein Spieler zum Abschluß im Mittel $^{1+2+3+4+5}/_5=3$ Schritte vor. Davor wirft er im ersten, zweiten, dritten, ... Wurf eine 6 mit der Wahrscheinlichkeit $1/6$, $1/6^2$, $1/6^3$, ... Somit gilt

$$E = 6\cdot\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \ldots\right) + 3 = \frac{6}{5} + 3 = 4{,}2.$$

Eine andere Zerlegung des Spielvorgangs liefert

$$E = 1\cdot\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \ldots\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \ldots\right) + \ldots + 6\cdot\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \ldots\right)$$

$$= (1+2+3+4+5+6)\cdot\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \ldots\right) = 21\cdot\frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{21}{5}.$$

Eine Erklärung für den Summanden $2\cdot(1/6+1/6^2+1/6^3+\ldots)$ beispielsweise könnte sein: Man kann 2 Schritte machen beim ersten Wurf mit Wahrscheinlichkeit $1/6$, beim zweiten Wurf mit $1/6^2$ usw.

Will man für den so berechneten Erwartungswert den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum und die Zufallsvariable bestimmen, so wird dies nicht einfach sein. Dieser Lösung ist nicht anzusehen, daß die Wiederholungszahl 6 eine besondere Rolle spielt, bzw. man kann zu der erstaunlichen Einsicht gelangen, daß es für die mittlere Schrittzahl völlig gleichgültig ist, ob man nach einer 6 oder nach einer 1 noch einmal würfeln darf. Rückblickend wird man die Unabhängigkeit von der Wiederholungszahl schon aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl der Würfe entnehmen können. Aber diese Einsicht aufgrund mathematischer Formeln hat einen sehr schweren Stand gegen die Intuition der meisten Schüler, daß man "offensichtlich" bei 66...6a, a= 1,2,3,4,5 viel weiter kommt als mit 11...1a, a=2,3,4,5, 6. Welcher Mensch-ärger-dich-nicht-Spieler würde die Spielregel akzeptieren, daß er im Gegensatz zu allen anderen Mitspielern nur bei der Augenzahl 1 noch einmal würfeln darf?

Den Reihen für die mittlere Schrittzahl bei den Wiederholungszahlen 6, 1 bzw. 3

$$E = \frac{1}{6}\cdot 15 + \frac{1}{6^2}\cdot 45 + \frac{1}{6^3}\cdot 75 + \frac{1}{6^4}\cdot 105 + \ldots$$

$$E = \frac{1}{6}\cdot 20 + \frac{1}{6^2}\cdot 25 + \frac{1}{6^3}\cdot 30 + \frac{1}{6^4}\cdot 35 + \ldots$$

$$E = \frac{1}{6}\cdot 18 + \frac{1}{6^2}\cdot 33 + \frac{1}{6^3}\cdot 48 + \frac{1}{6^4}\cdot 63 + \ldots$$

sieht man nicht ohne weiteres an, daß jedesmal E=4,2 ist. Hilfreich bei dieser Einsicht kann das Simulationsprogramm sein; dem Computer glaubt man vielleicht eher als der Symmetrie gewisser mathematischer Formeln. Ersetzt man in dem Simulationsprogramm die Zeile IF A=6 durch IF A=1 (oder eine andere Augenzahl), läßt sich die Unabhängigkeit von der Wiederholungszahl auch empirisch bestätigen.

Ebenfalls unabhängig von der Wiederholungszahl erfolgt die Berechnung

$$E = 3{,}5 + 3{,}5\cdot\frac{1}{6} + 3{,}5\cdot\frac{1}{6^2} + \ldots = \frac{21}{6}\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \ldots\right) = \frac{21}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{21}{5}.$$

Erklärung: Man macht beim ersten Wurf ganz sicher im Mittel 3,5 Schritte, beim zweiten Wurf ebenfalls 3,5 Schritte mit der Wahrscheinlichkeit 1/6, zum 3. Wurf kommt man mit der Wahrscheinlichkeit $1/6^2$ und macht dann im Mittel ebenfalls 3,5 Schritte, usw.

Es geht auch ganz ohne unendliche Reihen: $E = 3{,}5 + \frac{1}{6}E$, und zwar aufgrund folgender Überlegung: Beim ersten Wurf rückt man im Mittel 3,5 Schritte vor, ein zweiter Wurf ist mit Wahrscheinlichkeit $^1/_6$ möglich, und danach liegt wieder die Ausgangssituation vor.

Entsprechend interpretiert man die Gleichung

$$E = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (6 + E)\frac{1}{6}$$

Wenn man statt nach einer 6 nach einer 1 weiterwürfeln darf, ergibt sich

$$E = \frac{1}{6}(2 + 3 + 4 + 5 + 6) + (1 + E)\frac{1}{6}$$

und damit ein weiterer Beweis dafür, daß E unabhängig von der Wiederholungszahl ist.

Diese einfachen, eleganten Lösungen lassen sich nicht in das Begriffskonzept der Zufallsvariablen einordnen. Das Entdecken solcher Lösungen kann durch die formal-abstrakte Definition von Zufallsgrößen und Erwartungswerten erschwert werden. Ein Unterricht, der Schüler ermutigt und befähigt, nach solchen Lösungsideen zu suchen, dürfte sich deutlich unterscheiden von einem Unterricht, der Zufallsvariablen als meßbare Funktion thematisiert.

Anmerkung: Die Rekursionsformeln für den Erwartungswert können einen eleganten Zugang zu Summenformeln der zugehörigen unendlichen Reihen bilden:

Beim "Warten auf den ersten Erfolg" wird das Glücksrad (Abb. 5) so lange gedreht, bis die 1 erscheint.

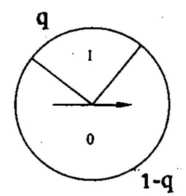

Abb. 5

Ereignis	1	01	001	0001	...
Drehungen	1	2	3	4	...
Wahrscheinlichkeit	1-q	q(1-q)	$q^2(1-q)$	$q^3(1-q)$	...

Die mittlere Anzahl D der Drehungen ist zum einen

$$D = (1-q)(1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \dots).$$

zum anderen gilt $D = 1 + q \cdot D$.

in Worten: Nach einer ersten Drehung muß man mit Wahrscheinlichkeit q ein zweites Mal drehen. danach liegt wieder die Ausgangssituation vor.

Also ist $D = \frac{1}{1-q}$ und somit $1+2q+3q^2+4q^3+\dots = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Auch die Summenformel der geometrischen Reihe $\Sigma q = \frac{1}{1-q}$ läßt sich leicht herleiten.

Da der Erfolg sicher irgendwann einmal eintritt, ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1. Aus $1=\Sigma(1-q)q^n=(1-q)\Sigma q^n$ folgt die Summenformel.