Abituraufgaben

Einem Aufruf unseres Mitherausgebers StD Heinz Althoff in Heft 2/1993 folgend, wurden einige Abituraufgaben eingesandt, die wir beginnend mit diesem Heft veröffentlichen wollen.

Wir bitten die Leser, um Zusendung weiterer Aufgaben bzw. um Meinungsäußerungen zum Inhalt, Anforderungsprofil und Schwierigkeitsgrad der vorgestellten Aufgaben.

Die Aufgaben werden mit kurzen Vorbemerkungen zum vorherigen Unterricht, zu Quellen der Aufgabe sowie zum Ablauf der Prüfungen versehen, soweit dies aus den Zuschriften der Autoren ersichtlich war.

Es wäre sicher weiterhin interessant gewesen, etwas zu den erzielten Ergebnissen, zu aufgetretenen Schwierigkeiten und typischen Fehlern sowie zur Resonanz solcher Aufgaben bei Schülern zu erfahren.

Aufgabe 1 (Grundkurs, schriftliches Abitur)

Autor: OStD Heinz Klaus Strick, Leverkusen

Vorbemerkungen:

Es wurden in Klasse 12 und 13 insgesamt 63 Stunden Stochastik unterrichtet. Als Lehrbuch wurde „Grundkurs Stochastik“, Schroedel Schulbuchverlag, verwendet.

Die Aufgabe zerfällt in Teilaufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung (2.1-2.3), die in 12.2 behandelt wurde, und aus der Beurteilenden Statistik (2.4-2.5), die Schwerpunktthema in 13.1 war. Ähnliche Fragestellungen wurden an anderen Sachthemen besprochen. In 12.2 wurde jedoch das Sammelbilderproblem ausgeklammert, die Fragestellungen von 2.1 und 2.2 am Beispiel des Geburtstagsproblems erarbeitet. Aufgaben vom Typ 2.3 wurden im Zusammenhang mit der Binomialverteilung (Warten auf einen Erfolg) behandelt. Einseitige Hypothesentests und Wahrscheinlichkeitsberechnungen wie in 2.5 wurden mehrfach in 13.1 und 13.2 besprochen.

Im Abitur wurden 2 etwa gleichwertige Aufgaben gestellt. Die Arbeitszeit beträgt 3 Zeitstunden.

Aufgabenstellung:

Ein Kaugummihersteller legt den Packungen jeweils ein Sammelbild bei. Zu einer Serie von Sammelbildern gehören 20 Bilder. Es sei angenommen, daß die Bilder einer Serie gut gemischt verteilt werden.

2.1 A. kauft 5 Packungen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens zwei der beigefügten Bilder gleich sind?

2.2 B. kauft 24 Packungen dieser Kaugummimarke.

2.2.1 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein bestimmtes Bild, z.B. Bild Nr. 15, keinmal, einmal, zweimal, mehr als zweimal beigefügt ist?

2.2.2 Schätzen Sie hieraus, wie viele Bilder der Serie nach dem Kauf von 24 Packungen noch fehlen.

2.3 C. ist nur am Bild Nr. 1 interessiert.

2.3.1 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach dem Kauf von 20 Packungen das Bild Nr. 1 immer noch nicht dabei ist?

2.3.2 Wie viele Packungen muß C. mindestens kaufen, damit dieses Bild mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens einmal vorhanden ist?

2.4 Die Firma, die die Kaugummis herstellt, ist vor der Aktion mit den Sammelbildern 70% der Bevölkerung bekannt. Die Werbeabteilung der Firma hofft, daß der Bekanntheitsgrad durch das Beifügen von Sammelbildern zunimmt. Die Geschäftsleitung sieht dies eher etwas skeptisch und will den Effekt durch eine Befragung von 600 zufällig ausgewählten Personen überprüfen lassen.

2.4.1 Interpretieren Sie den Vorgang als das Testen von Hypothesen. Welche Hypothesen können getestet werden?
Erläutern Sie jeweils, welcher Standpunkt vertreten wird.

2.4.2 Geben Sie die zugehörigen Entscheidungsregeln an ($\alpha = 0{,}10$).

2.4.3 Beschreiben Sie jeweils Fehler 1. und 2. Art und mögliche Auswirkungen dieser Fehler in der Sachsituation.

2.5 Angenommen, der Bekanntheitsgrad der Kaugummimarke beträgt nach der Sammelbilderaktion nunmehr 75%.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß bei der Stichprobe unter 600 Personen weniger als 435 Personen angeben, die Marke zu kennen.

Hinweise: Definieren Sie gegebenenfalls geeignete Zufallsgrößen.
Fertigen Sie gegebenenfalls Skizzen zu den σ-Umgebungen an.

Zugelassene Hilfsmittel: nicht-programmierbarer Taschenrechner, Formelsammlung, Tabelle über σ-Umgebungen

Lösungshinweise und Bewertungsvorschlag:

2.1 Gegenereignis: 5 verschiedene Bilder ($\overline{E}$)

$$P(\overline{E}) = \frac{20}{20} * \frac{19}{20} * \frac{18}{20} * \frac{17}{20} * \frac{16}{20} = 0{,}5814$$

$P(E) = 1 - 0{,}5814 = 0.4186$ **3 P**

2.2.1 Binomialverteilung mit $p = \frac{1}{20}$, X: Anzahl der Bilder Nr. 15,

$P(X=0) = 0{,}292$, $P(X=1) = 0{,}369$, $P(X=2) = 0{,}223$

$P(X>2) = 1-(0{,}292+0{,}307+0{,}154) = 0{,}116$ **6 P**

2.2.2 Für jedes Bild gilt: Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 29,2% ist es nach dem Kauf von 24 Packungen noch nicht vorhanden.
Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit: Ca. 29.2% der Bilder sind noch nicht vorhanden, d.h. 29,2% von 20 = 5,84 $\approx$ 6 ca. 6 Bilder fehlen noch aus der Serie. **2 P**

2.3.1 W: Anzahl der gekauften Packungen bis zum Eintreten eines Erfolges

$P(W>20) = \left(\frac{19}{20}\right)^{20} = 0{,}358$ **2 P**

2.3.2 Gegenereignis: Nach n Käufen ist das Bild noch nicht vorhanden

$P(W>n) = 0{,}95^n$

$P(W \leq n) = 1-0{,}95^n \geq 0{,}90 \Leftrightarrow 0{,}95^n \leq 0{,}10 \Leftrightarrow n \geq 45$ **5 P**

2.4.1 X: Anzahl der Personen, die die Marke kennen
Standpunkt der Werbeabteilung: Durch die Aktion hat der Bekanntheitsgrad zugenommen. Von diesem Standpunkt lassen wir uns erst bei signifikant kleinen Werten von X abbringen.
Zu testende Hypothese: $p > 0{,}7$
Standpunkt der Geschäftsleitung: Die Aktion hat nichts zum Bekanntheitsgrad beigetragen. Von diesem Standpunkt lassen wir uns erst bei signifikant großen Werten von X abbringen.
Zu testende Hypothese: $p \leq 0{,}7$ **4 P**

2.4.2 Für $p = 0{,}7$ und $n = 600$ ist $\mu = 420$ und $\mu + 1{,}28\,\sigma = 434{,}37$
$\mu - 1{,}28\sigma = 405{,}63$
Hypothese $p > 0{,}7$: Für $p > 0{,}7$ ist $\mu - 1{,}28\sigma > 405{,}63$

Entscheidungsregel: Verwirf $p > 0{,}7$, falls die Anzahl der Personen, die die Marke kennen, kleiner ist als 406.

Hypothese $p \leq 0{,}7$: Für $p < 0{,}7$ ist $\mu + 1{,}28\sigma < 434{,}37$

Entscheidungsregel: Verwirf $p \leq 0{,}7$, falls die Anzahl der Personen, die die Marke kennen, größer ist als 434. **6 P**

2.4.3 $p > 0{,}7$:

Fehler 1. Art: Eine erfolgreiche Werbeaktion wird irrtümlich eingestellt.

Fehler 2. Art: Obwohl die Werbeaktion nichts nützt, wird sie fortgesetzt.

Bei der Hypothese $p \leq 0{,}7$ vertauschen sich die Auswirkungen der Fehler 1. und 2. Art. **7 P**

2.5 $n = 600$, $p = 0{,}75$, $\mu = 450$, $\sigma = 10{,}61$ Gesucht ist $P_{p=0{,}75}(X<435)$

$r = 1{,}46\sigma = 15{,}5$ $\quad P(435 \leq X \leq 465) \approx P(\mu - 1{,}46\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}46\sigma) = 0{,}856$

$$P(X<435) \approx \frac{1 - 0{,}856}{2} = 0{,}072$$ **5 P**

Σ: 40 P

Aufgabe 2 (Leistungskurs, schriftliches Abitur)

Autor: Heinz Böer, Gelsenkirchen

Vorbemerkungen:

Dies ist eine von 3 etwa gleichwertigen Aufgaben in der schriftlichen Abiturprüfung 1993. Die Arbeitszeit betrug 5 Zeitstunden.

Den Schülern wurde neben Formelsammlung und Taschenrechner Tabellen der Normal- und χ^2-Verteilung zur Verfügung gestellt.

Aufgabenstellung:

Aus der Abteilung für Biometrie (Leiter: Prof. Dr. B. Schneider)
der Medizinischen Hochschule Hannover, Hannover

Ergebnisse einer Feldstudie über den therapeutischen Wert von Aprotinin beim traumatischen Schock. - In: Arzneim. Forsch (Drug Res.) 26, Nr. 8 (1976)

2.2. Unterschiede zwischen den verschiedenen Behandlungsgruppen

Die Zuteilung der Patienten zu den Behandlungsgruppen (Behandlung ohne Trasylol, Behandlung zusätzlich mit Trasylol) sollte in jedem Krankenhaus so vorgenommen werden, daß die an einem ungeraden Tag aufgenommenen Patienten ohne Trasylol und die Patienten, die an einem geraden Tag aufgenommen wurden, mit Trasylol behandelt werden. Bei der Auswertung zeigte sich aber, daß diese Zuteilung von den Krankenhäusern nicht immer strikt eingehalten wurde. Es wurden sowohl Patienten, die an einem geraden Tag aufgenommen wurden, ohne Trasylol als auch insbesondere Patienten mit einem ungeraden Aufnahmetag mit Trasylol behandelt. Somit sind für die Auswertung insgesamt 4 verschiedene Behandlungsgruppen zu unterscheiden:

Gruppe I: Behandlung ohne Trasylol, ungerader Aufnahmetag
Gruppe II: Behandlung ohne Trasylol, gerader Aufnahmetag
Gruppe III: Behandlung mit Trasylol, ungerader Aufnahmetag
Gruppe IV: Behandlung mit Trasylol, gerader Aufnahmetag

Die Gruppe I der korrekt ohne Trasylol behandelten Patienten umfaßt 1909 Patienten oder 40,7%; die Gruppe IV der korrekt mit Trasylol behandelten Patienten umfaßt 1962 oder 41,9%. In die Gruppe II (ohne Trasylol, gerader Tag) entfallen nur 225 oder 4,8% und in die Gruppe III (mit Trasylol, ungerader Tag) 588 oder 12,5%. Bemerkenswert ist die starke Besetzung der Gruppe III, also der Patienten, die entsprechend der Zuteilungsordnung ohne Trasylol hätten behandelt werden sollen, aber trotzdem mit Trasylol behandelt wurden. Diese große Zahl deutet darauf hin, daß ein wesentlicher Teil der Patienten vom behandelnden Arzt als so schwer verletzt angesehen wurde, daß er diesen Patienten die Behandlung mit Trasylol nicht vorenthalten wollte.

	ungerader Tag	gerader Tag
ohne Trasylol	Gruppe I Patienten insgesamt: 1909 verstorben: 223	Gruppe II Patienten insgesamt: 225 verstorben: 19
mit Trasylol	Gruppe III Patienten insgesamt: 588 verstorben: 125	Gruppe IV Patienten insgesamt: 1962 verstorben: 227

aus: K. Langbein u. a., Gesunde Geschäfte, Köln 1983

In dem Artikel ist einer der größten Medikamententests in der Bundesrepublik beschrieben. Führen Sie mit den Daten verschiedene Testansätze durch:

a) Berücksichtigen Sie alle Patienten mit und alle Patienten ohne Verabreichung von Trasylol - ohne Beachtung der richtigen oder falschen Tageswahl. Direkter Kommentar zur Tauglichkeit des Medikaments?

b) Berücksichtigen Sie nur die Patienten, die am „richtigen" Tag behandelt bzw. nicht behandelt wurden. Direkter Kommentar zur Tauglichkeit des Medikamentes?

Der Leiter der Untersuchung, Prof. Dr. B. Schneider, schlägt vor (wie im Text angedeutet): Gruppe I, II und III gelten als „Nicht-Trasylol-Behandelte" und nur Gruppe IV als „Trasylol-Behandelte". Wie problematisch solche nachträglichen Datenkorrekturen auch sind; sie seien im folgenden hingenommen.

c) Testen Sie den Parameter p aus der „Nicht-Trasylol-Gruppe". Wertung ($\alpha = 1$ %)?

d) Notieren Sie den Vorschlag von Herrn Schneider als 4-Felder-Tafel. Begründen Sie für den Unabhängigkeitstest die Wahl der Testgröße. Bei geeigneter Wahl ergibt sich (laut Rechnerprogramm) $P(X \leq 227) \approx 2{,}9\%$. Wertung ($\alpha = 1$ %)?

e) Prof. Dr. Schneider hat einen χ^2-Unabhängigkeitstest durchgeführt, wie bei solchen Tests üblich. Zeichnen Sie ihn nach! Wertung (α =1 %)? Ergebe sich mit $\alpha = 5$ % ein positives Ergebnis für Trasylol?

f) Erläutern Sie die Unterschiede der Ergebnisse in c und d bzw. in d und e.

g) „Medikamententests mit Menschen müssen doppelblinde randomisierte kontrollierte Experimente sein." Erläutern Sie die 4 Forderungen an so einen Test. Was wurde beim Test oben falsch gemacht, schon in der Versuchsplanung?

Lösungshinweise:

a) q sei die Sterblichkeitsquote: $q_{mit} = \frac{352}{2550} \approx 13{,}8\%$; $q_{ohne} = \frac{242}{2134} \approx 11{,}3\%$ disqualifiziert Trasylol als patientengefährdend.

b) $q_{mit} = \frac{227}{1962} \approx 11{,}6\%$; $q_{ohne} = \frac{223}{1909} \approx 11{,}7\%$. Ein kaum merkbarer Vorteil für Trasylol.

c) X : Zahl der Gestorbenen die Trasylol erhielten (Gruppe IV)

H_0: $q_{ohne} = \frac{367}{2722} \approx 13{,}5\%$; H_1: $q < 13{,}5\%$ (einseitig!) n = 1962 ; $\alpha = 1$ %

$P(X \leq \mu - 2{,}33 \cdot \sigma) \approx 1\%$ liefert den Verwerfungsbereich für H_0 : K = {0,1,2, ... ,229}. Da 227 im Verwerfungsbereich liegt, ist H_0 zu verwerfen und H_1 zu akzeptieren. Trasylol hilft ($\alpha = 1$ %).

d)

	leb.	tot	Summe
mit Trasylol	1735	227	1962 = N1
ohne Trasylol	2355	367	2722 = N2
Summe	4090	594 =W	4684

H_0 : Trasylolgabe und Gesundung sind unabhängig.
H_1 : Trasylol beeinflußt die Gesundung positiv (einseitig!).

n = 4684 ; $\alpha = 1\%$. Die hypergeometrische Wahrscheinlichkeit wird (mit Rechner) rekursiv berechnet. Die Rekursionsformel erfordert W < N2, da sonst der Nenner mit zunehmenden k Null wird. Entsprechend muß die Wahl der Zufallsgröße erfolgen: X : Zahl der Verstorbenen die Trasylol erhalten haben. Um H_0 zu verwerfen, müßte $P(X \leq 227) < 1\%$ sein. Das trifft nicht zu. H_0 wird nicht verworfen.

e) H_0, H_1, n, α wie in d.

	leb.	tot	Summe
mit Trasylol	0,36575 = 1713,2	0,05312 = 248,8	0,41887
ohne Trasylol	0,50744 = 2376,8	0,07369 = 345,2	0,58113
Summe	0,87319	0,12681	1

Die relativen Häufigkeiten der Randverteilung werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert. Die Unabhängigkeitsannahme erlaubt die Multiplikation nach

„innen". Die absoluten Zahlen ergeben sich durch Multiplikation mit n.

χ^2 testet diese theoretischen Werte bei Unabhängigkeitsunterstellung gegen die empirischen Werte in Tabelle d:

$$\chi^2 = \frac{(1735-1713,2)^2}{1713,2} + \frac{(227-248,8)^2}{248,8} + \frac{(2355-2376,8)^2}{2376,8} + \frac{(367-345,2)^2}{345,2} \approx 3,76$$

Laut Tabelle gilt (f = 1): $P(\chi^2 \geq 6,63) \approx 1\%$ und $P(\chi^2 \geq 3,84) \approx 5\%$. Der berechnete χ^2 - Wert überschreitet beide kritischen Werte nicht. H_0 ist weder mit $\alpha = 1$ % noch mit $\alpha = 5$ % zu verwerfen.

f) In c wird ein Parametertest durchgeführt mit einem p, das aus der „Kontrollgruppe" erst gewonnen wurde und selbst nur eine Schätzung ermöglichte. Der Test ist daher ungenau. In d wird (unter der Vorgabe der Zusammenlegung der Gruppen) exakt auf Unabhängigkeit getestet. In e wird mit dem χ^2 - Test ein zweiseitiger Test gemacht, obwohl hier vom Ansatz ein einseitiger nötig ist. Es ergibt sich daher auch eine Irrtumswahrscheinlichkeit, die etwa doppelt so hoch ist wie beim exakten Test von Fisher in d.

g) Die Auswahl der Gruppenmitglieder muß zufällig erfolgen (randomisiert) - klar. Es muß eine Kontrollgruppe geben, da die Unabhängigkeit von Medikamentengabe und Heilung getestet werden soll (kontrolliert). Der Versuch muß für den Patienten blind erfolgen, d. h. er darf nicht wissen, ob er das Medikament oder ein Placebo erhält. Das Wissen allein würde die Heilung deutlich beeinflussen, wie die Placeboforschung zeigt. Die Medikamentengabe muß auch für den Arzt blind (doppelblind) erfolgen, d. h. auch er darf nicht wissen, ob er das Medikament oder ein Placebo gibt. Auch sein Wissen könnte den Patienten und dessen Heilung beeinflussen; z. B. durch unbeabsichtigte Äußerungen.
Der Versuch oben war nicht doppelblind. Die Ärzte haben aufgrund ihrer Kenntnis der Medikamentengabe (oder nicht) die Zufallsauswahl deutlich beeinflußt.

Aufgabe 3 (Grundkurs, schriftliches Abitur)

Autor: StD Heinz Althoff, Bielefeld

Vorbemerkungen:

Es wurde etwa ein Halbjahr Stochastik unterrichtet und dabei das Lehrbuch „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik" von H. Althoff, Metzler-Verlag 1985, verwendet.
Die Aufgabe ist eine von 3 etwa gleichwertigen Aufgaben aus der schriftlichen Abiturprüfung im Leistungskurs 1992. Die Arbeitszeit betrug 5 Zeitstunden.
Die Aufgabe wurde „konstruiert" in Anlehnung an die Aufgabe 85/3 im Zentralabitur Baden - Württemberg (LK 1985)

Aufgabenstellung:

Etwa 2% der Bevölkerung eines größeren Landes sind sogenannte „K-Personen"; das sind Personen, die den Erreger einer noch nicht ausgebrochenen Krankheit K im Blut haben.

a_1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist unter 50 (zufällig ausgewählten) Personen (aus obiger Bevölkerung) höchstens eine K-Person?

a_2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter 1000 Personen mindestens 25 K-Personen?

a_3) Wie viele Personen muß man untersuchen, um mit der Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens eine K-Person zu haben?

b) Bei einem Schnelltest werden 94% der K-Personen als solche erkannt. Andererseits stuft der Test 8% der Nicht-K-Personen irrtümlicherweise auch als K-Personen ein.

b_1) Hans unterzieht sich dem Schnelltest und wird als Nicht-K-Person eingestuft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er trotzdem zu den K-Personen gehört?

b_2) Kurt unterzieht sich ebenfalls dem Schnelltest; er wird als K - Person eingestuft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er dann tatsächlich eine K-Person?

b_3) Wie beurteilen Sie die Qualität des Schnelltests?

c) Die Wahrscheinlichkeit p, daß die Krankheit K bei einer K-Person ausbricht, beträgt etwa 10%. Eine Arzneimittelfirma behauptet nun, daß sie ein Vorbeugungsmittel M gegen den Ausbruch von K gefunden hat.

c_1) Warum setzen wir $H_0 : p = 0{,}1$ an und führen einen <u>ein</u>seitigen Test durch?

c_2) Es soll auf dem Signifikanzniveau 1% anhand einer Stichprobe vom Umfang n = 100 getestet werden. Welche ist die beste Entscheidungsregel dafür?

Lösungshinweise:

a) X = Anzahl der K-Personen in der ausgewählten Stichprobe, kleine Stichprobe aus großer Gesamtheit, folglich ist X ist näherungsweise binomialverteilt, p = Anteil der K- Personen in der Bevölkerung = Wahrscheinlichkeit, daß die zufällig ausgewählte Person eine K- Person ist

a_1) $P(X \le 1) = B(50;0{,}02;1) = 0{,}736$

a_2) $P(X \ge 25) = 1 - B(1000;0{,}02;24)$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{24{,}5-20}{\sqrt{20\cdot 0{,}98}}\right)$$
$$= 1 - \Phi(1{,}016) = 0{,}155$$

Laplace - Näherung zulässig wegen: $1000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 = 19{,}6 > 9$

(mit Poisson - Näherung erhält man 0,157)

a_3) $P(X \ge 1) \ge 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - b(n;0{,}02;0) \ge 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}98^n \le 0{,}01 \Leftrightarrow n \ge 228$

b) K ... Person ist eine K - Person
E ... Person wird beim Schnelltest als K - Person eingestuft

b_1) $P_{\bar{E}}(K) = \dfrac{0{,}02 \cdot 0{,}06}{0{,}02 \cdot 0{,}96 + 0{,}98 \cdot 0{,}92} = 0{,}0013$ (Satz von Bayes)

b_2) $P_E(K) = \dfrac{0{,}02 \cdot 0{,}94}{0{,}02 \cdot 0{,}94 + 0{,}98 \cdot 0{,}08} = 0{,}193$

b_3) Von den als Nicht-K-Personen eingestuften Personen sind in Wirklichkeit 1,3 ‰ doch infiziert. Da dieses Untersuchungsergebnis ein schwerwiegender Fehler ist, ist dieser relativ kleine Anteil eventuell doch schon hinreichend

groß. Von den als K-Personen eingestuften Personen sind mehr als 80 % in Wirklichkeit nicht infiziert. Diese Fehlerwahrscheinlichkeit für den weniger schlimmen Fehler dürfte sogar für einen Schnelltest relativ hoch sein. Deshalb ist die Qualität des Schnelltestes insgesamt nicht als gut einzustufen.

c_1) Die irrtümliche Annahme, daß das Medikament hilft (obwohl p = 0,1 geblieben ist), ist der schlimmere Fehler, den man aufgrund des Stichprobenergebnisses machen kann. Da es nur um eine Verkleinerung von p geht, ist als Gegenhypothese allein $\overline{H}_0$: $p < 0{,}1$ und damit ein einseitiger Test sinnvoll.

c_2) Y = Anzahl der K-Personen in der Stichprobe, bei denen K ausbricht (näherungsweise binomialverteilt, da kleine Stichprobe aus großer Gesamtheit) Form der Entscheidungsregel: Verwirf $H_0 \Leftrightarrow Y \le a$. Gesucht ist die größte natürliche Zahl a mit $B(100;0{,}1;a) \le 0{,}01$. Aus der entsprechenden Tabelle erhält man $a \le 3$. Um die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art möglichst gering zu halten, wählt man a = 3. Man hält also M genau dann für wirksam, wenn bei höchstens 3 von 100 behandelten K-Personen die Krankheit K ausbricht.

Aufgabe 4 (Grundkurs, mündliches Abitur)

Autor: StD Heinz Althoff, Bielefeld

Vorbemerkungen:

Es wurden 2 Halbjahre (70 - 80 Stunden) Stochastik unterrichtet.
Der Prüfling hatte 30 Minuten Vorbereitungszeit und 10 - 15 Minuten, um die Lösung auf OH-Folie zu schreiben.
Für den Vortrag der Lösung waren ca. 10 Minuten vorgesehen. Es folgten im Prüfungsgespräch ca. 10 Minuten Vertiefung dieses Themas und ca. 10 Minuten Analysis.

Aufgabenstellung:

Eine Krankenkasse führt regelmäßig Entwöhnungskurse für Raucher durch. Sie geht von einer Erfolgsquote von 40 % aus, d.h. daß ein Jahr nach Beendigung des Kurses durchschnittlich etwa 40 % der Kursteilnehmer als Nichtraucher betrachtet werden können.

a) Herr A. berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, daß von 20 Kursteilnehmern genau 8 zu Nichtrauchern werden, mit Hilfe des Ansatzes:

$$P(X=8)=\binom{20}{8}\cdot 0{,}4^{8}\cdot 0{,}6^{12}$$

a_1) Welche Voraussetzungen bezüglich des Verhaltens der Kursteilnehmer macht Herr A. in seinem Ansatz?

a_2) Ermitteln Sie den Zahlenwert für die Wahrscheinlichkeit.

a_3) Erläutern Sie, welche inhaltliche Bedeutung die Faktoren im Ansatz von Herrn A. haben.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei 300 Kursteilnehmern der Erwartungswert für die Anzahl der „Erfolge" um wenigstens 10 % überschritten?

c) Der Leiter der Raucherentwöhnungskurse in B: behauptet, daß *seine* Erfolgswahrscheinlichkeit deutlich Höher als 40 % liegt. Wie ist ein Signifikanztest anzulegen, mit dem die *schwächere* Behauptung „die Erfolgswahrscheinlichkeit liegt über 40 %" auf einem Signifikanzniveau von 10 % abgesichert werden kann?

Hinweis zu c): Eine konkrete Entscheidungsregel braucht nicht unbedingt ermittelt zu werden, es genügt eine (möglichst genaue) Erläuterung, wie man sie ermitteln könnte.

Literaturhinweis:

Weitere Aufgabenvorschläge sowie Anregungen zur „Konstruktion" von Aufgaben und zur Durchführung mündlicher Abiturprüfungen findet man in: H: Althoff / D: Koller: Mündliches Abitur Mathematik Klett-Verlag 1992 (Rezension des Buches in Stochastik in der Schule Heft 1/94)

Lösungshinweise (in Kurzform für den Prüfungsausschuß):

a_1) Die Teilnehmer fällen unabhängig voneinander die Entscheidung „Nichtraucher" zu werden.

a_2) $b(20;\,0{,}4;\,8)\approx 0{,}18$

a_3) 20-stufiger Bernoulli-Versuch, günstig sind alle 20-Tupel, die 8 mal „N" und 12 mal „R" enthalten; in einem günstigen Pfad (20 - Tupel mit 8 mal „N")

liefert jede Komponente „N" den Wahrscheinlichkeitsfaktor 0,4 und jede Komponente „R" 0,6; nach der Pfadregel hat jeder günstige Pfad dann die Wahrscheinlichkeit $0{,}4^{8}\cdot 0{,}6^{12}$; $\binom{20}{8}$ gibt die Anzahl der günstigen Pfade an.

b) $E(X_{300})=300\cdot 0{,}4=120$, 10 % von 120 sind 12; $n\cdot p\cdot(1-p)=72>9\Rightarrow$

$$P(X_{300}\ge 120+12)=1-P(X_{300}\le 131)\approx 1-\Phi\left(\frac{131{,}5-120}{\sqrt{72}}\right)=1-\Phi(1{,}355)\approx 0{,}09$$

c) (1) $H_0: p\le 0{,}4$; $H=\overline{H_0}: p>0{,}4$ (abzusichernde Hypothese)

(2) Man legt den Stichprobenumfang n für die Befragung der Kursteilnehmer ein Jahr nach Kursende fest.

(3) Eine brauchbare Entscheidungsregel ist: Verwirf $H_0 \Leftrightarrow X_n > a_n$

(4) gesucht ist die kleinste natürliche Zahl a_n mit $P_{p=0,4}\,(X_n > a_n)\le 0{,}1$. Man ermittelt sie aus der Tafel der summierten Binomialverteilung.

(5) Überprüft man die *n* Personen der Stichprobe, so gilt die Behauptung: „Die Erfolgswahrscheinlichkeit liegt über 40 %" genau dann auf dem Signifikanzniveau als abgesichert, wenn unter n befragten Personen mehr als a_n Nichtraucher geworden sind.

StD Heinz Althoff
Ruschfeldweg 17
33619 Bielefeld

OStR Heinz Böer
Bahnhofstr. 72
48301 Appelhülsen

OStD Heinz Klaus Strick
Pastor-SchreiberStr. 10
51381 Leverkusen