Integrieren der Dichte der Normalverteilung

von *Alan H. Watkins* sowie *Nick Lord*, Kent;
Bearbeitung: *Manfred Borovcnik*, Klagenfurt

Kurzfassung: In *Teach. Statistics* 15(1993), Heft 2, wurde eine knappe Darstellung der Integration der Dichte der Normalverteilung gegeben. Der übliche Weg führt über Doppelintegrale, wobei das Integral durch Einführung von Polarkoordinaten lösbar wird. Die dabei erforderliche Jacobi-Determinante wurde zwar heuristisch motiviert, stellt aber einen Nachteil für die Behandlung in der Sekundarstufe dar. Zuerst werden kurz die wesentlichen Details von Watkins wiedergegeben; der darauffolgende Leserbrief von Kent skizziert einen heuristischen Umweg, der die Doppelintegrale vermeidet.

1. Integrieren durch Einführung von Polarkoordinaten

[Der Artikel von Watkins] Die Dichte der Normalverteilung muß bei Integration über ganz $\mathbf{R}$ den Wert 1 ergeben, sonst würde sie nicht eine Wahrscheinlichkeitsverteilung definieren. Für die Standardnormalverteilung ergibt sich daher durch Vereinfachen des Integranden folgende Forderung:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Dieses Integral hat man also auszuwerten. Der folgende Beweis ist nicht neu - obwohl er nicht gerade häufig benutzt wird - er sollte jedenfalls von mathematisch interessierten Schülern verstanden werden können. Schreibt man

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$$

so liegt es nahe, Polarkoordinaten einzuführen. Die zwei Gleichungen

$$x = r \cdot \cos(\theta) \quad \text{und} \quad y = r \cdot \sin(\theta)$$

führen Hilfsvariable r und θ mit $0 \le r < \infty$ und $0 \le \theta \le 2\pi$ ein. Da die Jacobi-Determinante dieser Transformation gleich r ist, erhalten wir weiters:

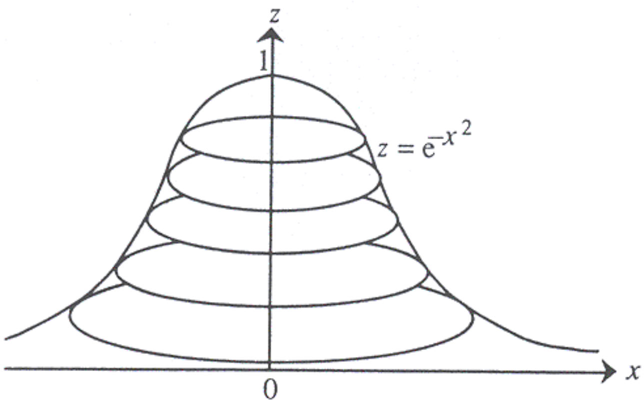
$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} r \cdot \mathrm{e}^{-r^2} \cdot \mathrm{d}r \cdot \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-r^2} \right]_0^{\infty} \cdot \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}\theta = \pi$$

Die für Herleitung bedarf der Kenntnis von Polarkoordinaten sowie einiger Erklärung für die neuen Integrationsgrenzen. Die Notwendigkeit der Jacobi-Determinante kann man intuitiv motivieren. Dazu sei auf Stephenson (1973) [bzw. Barth u. Haller, 1984] verwiesen.

2. Intuitives Umgehen der Integraltransformation

[Der Leserbrief von Lord] Die Handreichung für den Unterricht von Alan Watkins über die Integration der Dichte der Normalverteilung in der Sommerausgabe 1993 gefiel mir. Ich biete die folgende, bewußt informelle Variation, welche die technischen Feinheiten einer Doppelintegration umgeht und welche nach meiner Erfahrung sowohl eine zugängliche als auch unterhaltsame Ergänzung für gute Mathematik-Schüler in der sechsten Klasse [Klasse 10] ist.

Gleichwertig zur Integration der Dichte ist $I=\sqrt{\pi}$. Beginnen wir mit der Kurve $z = \mathrm{e}^{-x^2}$ und betrachten wir den Rotationskörper, der durch Drehen um die z-Achse entsteht. Dieser hat ein Volumen von [partielle Integration und der Grenzwert $z \ln z$ für $z \to 0$ bleiben allerdings nicht erspart]:



$$\pi \cdot \int_0^1 x^2(z)\,\mathrm{d}z = \pi \cdot \int_0^1 (-\ln z)\,\mathrm{d}z = \pi \cdot [-z \ln z + z]_0^1 = \pi$$

Die erzeugte Oberfläche hat die Gleichung $z = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$. (Für viele Schüler ist dies ihre erste Begegnung mit einer Funktion in mehr als einer Variablen, daher muß man dies etwas breiter erklären: Rotationssymmetrie bedeutet, daß z konstant auf Kreisen ist etc.) Nun stelle man sich vor, daß der Rotationskörper in Scheiben geschnitten wird, und zwar durch Ebenen parallel zur zx-Ebene. Die Scheibe im Abstand y vom Ursprung hat die Gleichung

$$z = \mathrm{e}^{-(y^2+x^2)} = \mathrm{e}^{-y^2} \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$$

und daher eine Fläche in x-Richtung von

$$z = e^{-y^2} \cdot I \text{, wobei } I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot dx$$

Das Volumen, das erzeugt wird, wenn y variiert, ist daher:

$$\int \text{'}Fläche \times Scheibendicke\text{'} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \cdot I \cdot dy = I^2$$

Der Vergleich unserer zwei Berechnungen des Volumens zeigt, daß $I^2 = \pi$

[...] Ich möchte auch hervorheben, daß dies ein einmaliger Trick ist, in welchem auf unorthodoxe Weise das Volumen eines Drehkörpers und die Faktorisierung der Gleichung der Oberfläche kombiniert wird, um die Fläche unter einer Kurve zu berechnen, die keine elementare Stammfunktion hat! (Es scheint nicht so allgemein bekannt zu sein, daß es eine wohlbegründete Theorie gibt, beginnend mit den zukunftsweisenden Arbeiten von Liouville im letzten Jahrhundert, welche gegenwärtig in der Computeralgebra angewendet wird und die es erlaubt zu beweisen, daß es unmöglich ist, eine Stammfunktion für die Dichte der Normalverteilung unter den elementaren Funktionen zu finden.)

Literatur:

Barth, F. und Haller, R.(1984): *Stochastik. Leistungskurs*, München: Ehrenwirt.

Stephenson, G.(1973): *Mathematical Methods for Science Students*, London: Longman.

*** *Was ist wahrscheinlicher?* ***

$ Die Mutter hat blaue Augen, wenn die Tochter blaue Augen hat. $

Die Tochter hat blaue Augen, wenn die Mutter blaue Augen hat.

* * * * * *