Ein klassisches Wahrscheinlichkeitsproblem

von *Ruma Falk*, Jerusalem; Übersetzung: *Hans-Dieter Sill*

Zusammenfassung: Es wird ein klassisches Wahrscheinlichkeitsproblem mit einer offensichtlich fehlerhaften Lösung analysiert. Die Klärung des entstehenden Widerspruchs beleuchtet grundlegende Konzepte der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Einleitung

Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist offenbar reich an Paradoxien, die grundlegende Situationen und Konzepte betreffen. Ein solches ist das folgende Problem, das bereits seit mehreren Generationen bekannt ist. Man muß kein Experte in der Wahrscheinlichkeitsrechnung sein, um die Fehlerhaftigkeit der Überlegungen in dieser Sache zu erfassen. In der Abbildung ist eine Version dieses Problems dargestellt, die im Kopf eines Werbeheftes einer Bank erschien.

[Abbildung 1 zeigt eine Karikatur, in der ein Fußballschiedsrichter am Anstoßpunkt eines Fußballfeldes drei Münzen in die Luft wirft, mit dem angegebenen Text. Die Zeichnung wurde in Teaching Statistics mit freundlicher Genehmigung der Kreditbank Österreich abgedruckt.]

„Wenn man drei Münzen wirft, werden immer zwei mit der gleichen Seite nach oben fallen. Da die dritte Münze in gleichberechtigter Weise Zahl oder Wappen zeigen kann, sind die Chancen, daß bei allen drei Münzen die gleiche Seite oben liegt oder nicht, gleich groß. Ist das wahr oder falsch?

Die mir bekannte früheste Version dieses Problems wurde von Sir Francis Galton vor 100 Jahren (1894) aufgeschrieben. Die folgende Formulierung ist ein Zitat aus der Zeitschrift *Nature* :

„Die Frage betrifft die Wahrscheinlichkeit, daß drei Münzen mit der gleichen Seite nach oben fallen, d.h. daß alle entweder Zahl oder Wappen zeigen. Die direkte Lösung ist ziemlich einfach; es gibt nämlich zwei verschiedene und gleichwahrscheinliche Möglichkeiten beim Werfen einer Münze, 4 Möglichkeiten beim Werfen von 2 Münzen und 8 Möglichkeiten für drei Münzen. Unter diesen 8 Möglichkeiten ist eine mit dreimal Wappen und eine mit dreimal Zahl. Die Wahrscheinlichkeit, daß alle auf die gleiche Seite fallen, ist also 2 zu 8 oder 1 zu 4.

Entgegen dieser Schlußfolgerung hörte ich unlängst folgende Argumentation, die in gutem Glauben vorgetragen wurde: Mindestens zwei der Münzen müssen mit der gleichen Seite nach oben liegen, und da die Chancen gleich sind, daß

Original ‘A Classic Probability Puzzle’ in *Teach.Stat.* **18**(1996), Nr. 1, 17-19.
Stochastik in der Schule **16**(1996), Nr. 3, 41-46

eine dritte Münze Zahl oder Wappen zeigt, stehen die Chancen, daß alle das gleiche zeigen, 1 zu 2 und nicht 1 zu 4. Wie liegt der Trugschluß?“ (Galton 1894, S. 365)

Ungeachtet der Bezeigung „Paradoxon“ im Titel von Galtons Artikel (Ein glaubhaftes Paradoxon der Wahrscheinlichkeit) gibt es keine Zweifel, welche der beiden Antworten in diesem anscheinenden Paradoxon die richtige ist. Im Unterschied zu dem Widerspruch, den viele bekannten Probleme enthalten, in denen zwei konträre Argumentationen in gleicher Weise überzeugend sind (vgl. z.B. das Drei-Gefangenen-Problem, Falk 1992, Morgan et al. 1991) liegt der springende Punkt in der Aufgabenstellung des vorliegenden Problems, die Irreführung in der zweiten Antwort aufzudecken. Dies ist jedenfalls keineswegs trivial. Es ist schwerer faßbar, als es zunächst scheint.

Das irreführende „Die“

Es ist sicherlich richtig, daß „wenigstens zwei der Münzen mit der gleichen Seite nach oben liegen müssen“. Es erscheint genauso vernünftig zu sein, zu behaupten, daß „die Wahrscheinlichkeit, ob eine dritte Münze Zahl oder Wappen zeigt, gleich ist“, obwohl die Identität der in den Darlegungen genannten Münze nicht klar ist. Ist eine bestimmte Münze, wie in der Werbeschrift zum Ausdruck gebracht wird: „... da *die* [kursiv vom Autor] dritte Münze in gleichberechtigter Weise Zahl oder Wappen zeigen kann“ oder ist es eine nicht spezifizierte allgemeine Münze?

Die Mehrdeutigkeit in Bezug auf die Formulierung „*die* dritte Münze“ kann zu dem Verlust an Klarheit über die zwei gleichberechtigten Münzen führen. Galtons Formulierung „mindestens zwei der Münzen“ macht keine genauen Angaben über zwei bestimmte Münzen. Ebensowenig sind sie eindeutig bestimmt durch die Formulierung der Werbeschrift „zwei fallen immer auf die gleiche Seite“.

Wir wollen zwei Möglichkeiten der Definition von *den* Münzen mit gleichem Ergebnis und entsprechend von *der* dritten Münze untersuchen. Die erste geht von den zwei *Münzen* aus, die gleich fallen. Die zweite stützt sich auf einer Spezifizierung der beiden gleichen *Ergebnisse* (entweder Zahl oder Wappen). Galtons Analyse (1894) des Paradoxon entspricht der zweiten Herangehensweise:

1. Wir können die Münzen mit I, II und III numerieren. Wenn die Münzen I und II *die* zwei sind, bei denen die gleiche Seite oben liegt, dann zeigt offensicht-

lich *die* dritte Münze, das wäre Münze III, mit der gleichen Wahrscheinlichkeit entweder Zahl (Z) oder Wappen (W). Aber bei den Münzen I und II liegt nicht mit Sicherheit die gleiche Seite oben, die Wahrscheinlichkeit dafür ist nur 1/2 (siehe die erste Spalte von Tabelle 1). Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Münzen I und II sowie die Münze III (die dritte Münze) mit der gleichen Seite nach oben liegen $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ und nicht $\frac{1}{2}$. Das gleiche gilt für die anderen zwei Möglichkeiten der Konkretisierung *der* zwei Münzen, die mit der gleichen Seite nach oben liegen.

2. Definiert man „Die zwei“ über die Ergebnisse, so können es entweder zwei W oder zwei Z sein. Die Tabelle 1 gibt den Stichprobenraum an, der die 8 gleichwahrscheinlichen Ergebnissen beim dreifachen Münzwurf enthält. *Die* zwei gleichen Ergebnisse sind für jeden Fall in der 2. Spalte aufgelistet und *das* dritte Ergebnis in der 3. Spalte.

Tabelle 1 Alle möglichen Ergebnistripel beim unabhängigen Werfen dreier Münzen

Die 8 gleichwahrscheinlichen Ergebnisse der drei Münzen				Die zwei gleichen Ergebnisse		Das dritte Ergebnis
	I	II	III			
(1)	Z	**Z**	Z	Z	Z	Z
(2)	Z	**Z**	W	Z	Z	W
(3)	Z	W	**Z**	Z	Z	W
(4)	W	Z	**Z**	Z	Z	W
(5)	W	**W**	W	W	W	W
(6)	W	**W**	Z	W	W	Z
(7)	W	Z	**W**	W	W	Z
(8)	Z	W	**W**	W	W	Z

Betrachten wir die Fälle (1) bis (4), in denen *die* zwei gleichen Ergebnisse Z sind. Wir sehen, daß *das* dritte Ergebnis nur in einem der Fälle gleich H ist, nämlich in Fall (1). Genauso ist in den Fällen (5) - (8), in denen *die* zwei gleichen Ergebnisse W sind, nur im 5.Fall *das* dritte Ergebnis auch W.

Wo liegt nun also der Trugschluß verborgen? Die gleiche Anzahl von Z und W in der dritten Spalte bestätigt Galtons Behauptung, daß „die Chancen, daß eine dritte Münze Zahl oder Wappen zeigt, gleich sind.“ Aber in jeder Untergruppe der Fälle, in denen die zwei gleichen Ergebnisse konstant sind (entweder Z oder W), sind die Chancen, daß die dritte Münze das gleiche Ergebnis zeigt nicht gleich, sondern stehen 1 zu 4. Der Trugschluß ist also, entsprechend Galtons eigener Analyse, in dem angenommenem Bindeglied in der Argumentationskette zu lokalisieren: „deshalb sind die Chancen gleich, daß *die* dritte Münze entweder Zahl oder Wappen zeigt.“

Zusammenfassend kann man sagen: Wenn *die* dritte Münze mit einer der Münzen (I, II oder II) identifiziert wird, ist es falsch, daß die zwei anderen immer auf die gleiche Seite fallen. Wenn jedoch *die* dritte Münze erklärt wird durch die Ergebnismehrheit (entweder Z oder W), dann ist es falsch, daß die Chancen gleich sind, daß das dritte Ergebnis das gleiche ist.

Unklare Bedingtheit

Die direkte Lösung durch Betrachtung der Menge der acht Ergebnistripel (erste Spalte der Tabelle 1), von denen zwei (Nummer (1) und (5)) drei identische Ergebnisse haben, liefert leicht die Antwort 1/4. Es ist in diesem Fall nicht notwendig, bedingte Wahrscheinlichkeiten zu verwenden. Jedoch, das täuschende Umgehen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten hat uns fast verleitet zu glauben, daß die Wahrscheinlichkeit des betrachteten Ereignisses 1/2 beträgt. Dies ist damit ebenfalls ein Beispiel für die Serie von verwirrenden Schlüssen, die durch Jonglieren mit fehlerhaft definierten bedingten Wahrscheinlichkeiten gewonnen werden (Bar-Hillel & Falk, 1982).

Das Ereignis „mindestens zwei identische Ergebnisse“ tritt infolge des Schubfachprinzips *a priori* mit Sicherheit ein. Diese Bedingung schränkt den ursprünglichen Stichprobenraum nicht ein und ist deshalb kein eigentliches bedingtes Ereignis. Die „bedingte Wahrscheinlichkeit“, daß alle drei Münzen mit der gleichen Seite nach oben fallen, ist deshalb genauso groß wie sie vor der „Bedingung“ war, nämlich 1/4.

Wir wollen formal P(A) berechnen, wenn A das gesuchte Ereignis ist (alle Ergebnisse sind gleich), indem wir von den beiden Interpretationen *der* zwei Münzen mit gleichem Ergebnis (und entsprechend *der* dritten Münze), die oben dargestellt wurden, ausgehen.

1. Es sei B das Ereignis, daß zwei spezielle Münzen , z.B. I und II, das gleiche Ergebnis zeigen. Es ist klar, daß $A \subset B$ und deshalb $A = A \cap B$ gilt. Da P(B) = 1/2 und P(A|B) = 1/2, erhalten wir

$$P(A) = P(A|B)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

2. Es sei B_z das Ereignis, daß das häufigste Ergebnis unter den dreien Z ist und B_w das Ereignis, daß es W ist. Es ist klar, daß man für die Wahrscheinlichkeit von drei gleichen Ergebnisse erhält

$$P(A) = P(A|B_z)P(B_z) + P(A|B_w)P(B_w)$$

Da $P(B_z) = P(B_w) = 1/2$ und $P(A|B_z) = P(A|B_w) = 1/4$ (vgl. Tab. 1), gilt

$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Was weiß man?

Der sicherste Weg, die Unklarheiten beim Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten zu vermeiden, ist die Rückführung auf ein Zufallsexperiment, das unser unsicheres Ereignis generiert, und die Erzeugung eines Verfahrens, durch das die Information gewonnen werden kann (Falk, 1992; Gardner, 1961). Wir benötigen eine Verfeinerung der Beschreibung des Experimentes mit den drei Münzen, die uns exakt erlaubt zu sagen, wie wir erfahren, das mindestens zwei der Münzen mit der gleichen Seite nach oben liegen. Diese epistemologische Fragestellung kann entscheidend für die mathematische Lösung sein.

In Anlehnung an die Methode von Freund (1965) bei seiner Analyse eines Problems bezüglich einer bestimmten Zusammenstellung von Karten in einer Hand, stellen wir uns vor, daß wir eine Spion beschäftigen, der uns mit den erforderlichen Kenntnissen versorgt. Das Experiment wird so durchgeführt, daß der Experimentator jedes Mal ansagt, wenn eine Münze geworfen wird. Wir können die Ergebnisse dieser Würfe nicht sehen, aber unser Spion hat eine Möglichkeit, dies zu tun und er betätigt jedesmal eine Klingel, wenn er ein Ergebnis sieht (entweder Z oder W), das schon einmal vorgekommen ist. Die Klingel wird natürlich mit Sicherheit einmal während des Experimentes ertönen, aber in welcher Stufe dies passiert, wird für uns informativ sein. Die fettgedruckten Buchstaben in der ersten Spalte der Tabelle 1 geben die Ergebnisse an, die vom Läuten der Klingel durch unseren Spion begleitet werden.

Wir wollen mir R_1, R_2 und R_3 die Ereignisse bezeichnen, daß die Klingel nach dem Werfen der Münze I, II oder III ertönt. Es ist offensichtlich, daß $P(R_1) = 0$ und $P(R_2) = P(R_3) = 1/2$. Immer wenn R_3 eintritt (Tripel (3), (4), (7) und (8) in Tab. 1), wissen wir, daß unser Zielereignis A (alle Ergebnisse sind gleich) nicht mehr eintreten kann. Wenn R_2 eintritt (Tripel (1), (2), (5) und (6) in Tab. 1), wissen wir, daß (buchstäblich) ein Münzwurf entscheidet, ob A eintritt oder nicht. P(A) ergibt sich durch

$$P(A|R_1)P(R_1) + P(A|R_2)P(R_2) + P(A|R_3)P(R_3) = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Schlußfolgerung

Obwohl diese Problem trivial in dem Sinne ist, daß die richtige Anwort von Anfang an bekannt ist, hat es seinen verwirrenden Charakter noch nicht verloren, der Galton vor 100 Jahren veranlaßt hat, seinen Artikel zu schreiben. Die Analyse des Problems unter verschiedenen Aspekten kann höchst instruktiv sein. Da keine komplizierten Techniken erforderlich sind, können die Schüler bereits in ihren ersten Lehrgängen zur Wahrscheinlichkeit Einsichten in solche fundamentalen Konzepte wie Zufallsexperiment, Ergebnismenge, bedingte Ereignisse und bedingte Wahrscheinlichkeit gewinnen.

Literatur

Bar-Hillel, M., and Falk, R. (1982). Some teasers concerning conditional probabilities. *Cognition*, **11**, 109 - 122

Falk, R. (1992). A closer look at the probabilities of the notorious three prisoners. *Cognition*, **43**, 197 - 223

Freund, J. E. (1965). Puzzle or paradox? *American Statistican*, **19**, 29 & 44

Galton, F. (1894). A plausible paradox in chances. *Nature*, **49**, 365 - 366

Gardner, M. (1961). *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*. New York: Simaon & Schuster

Morgan, J. P., Chaganty, N. R., Dahiya, R. C. and Doviak, M. J. (1991). Let's make a deal: The Players Dilemma. *American Statistican*, **45**, 284 - 287