Das Mang Kung-Würfelspiel

von Wai-Sum Chan, Singapur,
übersetzt von Klaus Krug, Bamberg

Zusammenfassung: Es wird ein chinesisches Würfelspiel vorgestellt. Nach der Beschreibung werden seine Wahrscheinlichkeitsverteilung untersucht und Spielsimulationen diskutiert.

Einführung

Dieser Artikel folgt auf Veröffentlichungen, die schon früher in der Zeitschrift TEACHING STATISTICS erschienen sind und sich mit dem Einsatz von Würfeln im elementaren Statistikunterricht beschäftigen, so z. B. die Artikel von Wang (1989 und 1993) über chinesische Spiele, die herkömmliche Würfel benutzen, und jener von Rouncefield und Green (1989) über das Condorcet Paradoxon.

Das Mang Kung-Würfelspiel ("Blinde Männer") ist ein altes chinesisches Spiel, das mit sechs nicht herkömmlichen Würfeln gespielt wird. Diese Würfel, die als Mang Kung-Würfel bezeichnet werden, sind wie folgt gekennzeichnet:

Würfel 1 :	1	□	□	□	□	□
Würfel 2 :	□	2	□	□	□	□
Würfel 3 :	□	□	3	□	□	□
Würfel 4 :	□	□	□	4	□	□
Würfel 5 :	□	□	□	□	5	□
Würfel 6 :	□	□	□	□	□	6

Dabei stellt das Symbol □ das Leerzeichen dar. Mit anderen Worten, fünf Seiten von jedem Mang Kung-Würfel sind nicht markiert. Nur eine Seite von jedem Würfel ist entsprechend der üblichen Art und Weise gekennzeichnet.

Das Mang Kung-Würfelspiel ist unter chinesischen Spielern im südlichen China und in Hong Kong immer noch ein ziemlich populäres Spiel. Im nächsten Abschnitt beschreiben wir das Spiel. Wir untersuchen auch einige Eigenschaften des Spiels, die für den elementaren Statistikunterricht nützlich sind.

Stochastik in der Schule 17(1997)1, S.34-40
Übersetzung aus Teaching Statistics 18(Summer 1996)2, S.42-44

Spielbeschreibung

Zuerst beschreiben wir das Spiel für drei Spieler. Jeder Spieler steuert 7 Einheiten des Spieleinsatzes in einen Behälter (= "Pool") in der Tischmitte bei. Auf diese Weise sind zu Beginn insgesamt 21 Einsatzeinheiten im "Pool". Ein Spieler wird zufällig ausgewählt, um mit dem ersten Spiel anzufangen. Jedes Mal werden die sechs Mang Kung-Würfel gleichzeitig geworfen. Die gesamten nach oben sichtbaren Augenzahlen der Würfel werden zusammengezählt. Diese Augensumme F wird dann mit dem Gesamtbestand P im "Pool" verglichen. Die möglichen Ergebnisse und die zugehörigen Handlungen der Spieler sind in Tabelle 1 aufgelistet. Das Spiel ist jedoch nicht auf drei Teilnehmer beschränkt. Es kann leicht auf n Teilnehmer geändert werden, wobei jeder Spieler zu Beginn einen Beitrag von (21/n) oder einem Vielfachen davon setzt, wenn der Einsatz (21/n) nicht ganzzahlig ist. Beispiel: Ist n=4, so wäre der Einsatz 21 Einheiten, wenn n=6 ist, so würde der Einsatz pro Spieler aus 7 oder 14 Einheiten bestehen.

Tab. 1: Die drei möglichen Situationen beim Mang Kung Würfelspiel

Ergebnis	Spielerreaktion
$F < P$	Der Spieler kann den Betrag F aus dem "Pool" nehmen. Dann gibt er die Würfel an den nächsten Spieler zu seiner Linken weiter, damit das Spiel fortgesetzt wird.
$F > P$	Der Spieler muß den "Pool" mit dem Differenzbetrag F-P auffüllen. Dann übergibt er die Würfel an den nächsten Spieler, damit das Spiel fortgesetzt wird.
$F = P$	Der Spieler gewinnt das Spiel. Er erhält den Betrag P aus dem "Pool". Überdies muß ihm jeder andere Spieler den Betrag F als Bonus zahlen. Außerdem beginnt er die nächste neue Spielrunde.

Wahrscheinlichkeitsverteilung von F

Es kann intessant sein, Schüler aufzufordern, die Wahrscheinlichkeitsverteilung von F zu finden. Die meisten Schüler tendieren dazu die Wahrscheinlichkeiten durch Abzählen der Elemente im Ergebnisraum zu bestimmen. Es gibt jedoch $6^6=46656$ Elemente im Ergebnisraum von F und es ist sehr schwer, sie alle aufzulisten.

Wir möchten die Schüler auf einem anderen Weg an die Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung heranführen - über die sog. *wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion* - statt Antworten zu geben, die das Abzählen enthalten. Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion g einer Verteilung X auf den nicht-negativen Zahlen ist definiert durch:

$$g_X(t) = E(t^X) = P(X=0) + t \cdot P(X=1) + t^2 \cdot P(X=2) + \ldots$$

Und es ist leicht zu zeigen, daß gilt: $P(X=k) = g_X^{(k)}(0) / k!$,
wobei $g_X^{(k)}(t)$ die k-te Ableitung von $g_X(t)$ bezüglich t ist. Überdies gilt, wenn eine wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion k-mal diffenziert wird und t=1 eingesetzt wird, [d.h. $g_X^{(k)}(1)$], so gibt sie das k-te faktorielle Moment von X an.

Nun sei $F = D_1 + D_2 + \ldots + D_6$, wobei die D_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) unabhängige Zufallsvariable sind, die den Wert an der Oberseite des i-ten Mang Kung-Würfels darstellen. Deshalb gilt:

$$g_F(t) = E(t^F) = E(t^{(D_1+D_2+\ldots+D_6)}) = E(t^{D_1}) \cdot E(t^{D_2}) \cdot \ldots \cdot E(t^{D_6})$$

Unterstellt man vollkommene Symmetrie bei den Mang Kung-Würfeln, so ist $P(D_i=i) = 1/6$ und $P(D_i=0) = 5/6$. Hieraus folgt:

$$g_F(t) = \prod_{i=1}^{6} \left[\frac{5}{6} + \frac{1}{6} t^i \right]$$

Die Schüler sollten in der Lage sein, die Wahrscheinlichkeitsverteilung von F aus der obigen wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion zu erhalten. Die Ergebnisse stehen in Tabelle 2

Tab. 2: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von F .

F	Wahrscheinlichkeit	F	Wahrscheinlichkeit
0	15625/46656	11	1025/46656
1	3125/46656	12	425/46656
2	3125/46656	13	300/46656
3	3750/46656	14	200/46656
4	3750/46656	15	180/46656
5	4375/46656	16	55/46656
6	4500/46656	17	30/46656
7	2000/46656	18	30/46656
8	1500/46656	19	5/46656
9	1625/46656	20	5/46656
10	1025/46656	21	1/46656

Simulation

Es mag von Interesse sein, Schüler zu bitten, eine Simulationsstudie des Mang Kung-Würfelspiels durchzuführen. Drei Fragen zum Spiel mögen es dabei Wert sein, untersucht zu werden:

1. Ist das Spiel ein faires Spiel ?
2. Hat die Person, die das Spiel beginnt, irgendeinen scheinbaren Vorteil ?
3. Was ist die erwartete Dauer (in Abhängigkeit von der Zahl der Würfe) pro Spiel ?

Es wäre ganz schön, den Schülern einige Hinweise zu geben, wie man das Problem, die Fairness des Spiels zu zeigen, in Angriff nimmt. Bei einer 3-Spieler-Konfiguration sollte die aus der Simulation ermittelte Wahrscheinlichkeit dafür das Spiel zu gewinnen, für jeden Spieler um 1/3 herum liegen. Wird das ganze eingezahlte Geld in Form von Preisen wieder ausgezahlt, so ist das Spiel ein Nullsummenspiel. Deshalb mögen Schüler auch den Wunsch haben, zu kontrollieren, ob die durchschnittliche Auszahlung pro Spiel für irgendeinen beliebigen Spieler nahe bei Null liegt.

Eine Simulationsstudie dazu wurde von einem meiner Schüler durchgeführt. Er schrieb ein einfaches Computerprogramm, um m aufeinanderfolgende 3-Spieler (A, B und C) Spiele zu erzeugen. Das Experiment wurde 10000 Mal wiederholt. Die geschätzte Wahrscheinlichkeit, das Spiel zu gewinnen und die durchschnittliche Auszahlung pro Spiel sind in Tabelle 3 wiedergegeben.

Tab. 3: Simulationsergebnisse beim 3-Spieler Mang Kung-Würfelspiel.
(Der Spieler, der das erste Spiel beginnt, wird durch Zufall ausgewählt.)

Zahl der aufeinanderfolg. gespielten Spiele (m)	Geschätzte Gewinnwahrsch.			Durchschnittl. Auszahlung pro Spie		
	A	B	C	A	B	C
1	0,3199	0,3388	0,3413	-0,28084	0,06941	0,21143
100	0,3332	0,3334	0,3334	-0,01375	0,00483	0,00892
1000	0,3333	0,3334	0,3333	0,00519	-0,00343	-0,00176
10000	0,3334	0,3333	0,3333	-0,00032	0,00058	-0,00026

Der Schüler schloß aufgrund seines Protokolls, daß "auf lange Sicht bzw. bei einer Vielzahl von Durchläufen und im Mittel, das Mang Kung-Würfelspiel ein faires Spiel ist."

Die Regeln des Spiels erfordern es, daß die Person, die das erste Spiel beginnt zufällig ausgewählt wird. Um zu kontrollieren, ob die Person, die das Spiel beginnt irgendeinen Vorteil haben wird, haben wir das Simulationsexperiment zu Tabelle 3 wiederholt, nur daß jetzt Spieler A immer dazu bestimmt ist, das erste Spiel zu beginnen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4 wiedergegeben.

Tab. 4: Simulationsergebnisse beim 3-Spieler Mang Kung-Würfelspiel.
(Als Person, die das erste Spiel beginnt, ist Spieler A fixiert.)

Zahl der aufeinander-folg. gespielten Spiele (m)	Geschätzte Gewinnwahrsch.			Durchschnittl. Auszahlung pro Spie		
	A	B	C	A	B	C
1	0,3319	0,3373	0,3308	1,1709	0,00701	-1,17791
100	0,3339	0,3331	0,333	0,02294	-0,01532	-0,00762
1000	0,3334	0,3333	0,3333	0,00387	-0,00499	0,00112
10000	0,3333	0,3333	0,3334	-0,00008	0,00028	0,00036

Wir erhalten aus Tabelle 4 die Aussage, daß der Starter (A) keine höhere Chance hat, gegen seine Mitstreiter zu gewinnen. Jedoch hat er eine bessere als die erwartete Auszahlung, wenn das Spiel nur einmal (d.h. m = 1) gespielt wird. Eine der Spielregeln legt fest, daß der Gewinner der Starter des nächsten neuen Spiels sein soll. Erringt nun schon der Spieler A keine höhere Chance, das Spiel zu gewinnen, so verschwindet der Auszahlungsvorteil von A für wachsendes m (fortlaufende Spielnummer).

Schließlich können wir leicht die durchschnittliche Spiellänge beim Simulationsexperiment berechnen. Die Antwort liegt bei näherungsweise 20 Würfen.

Überprüfung der Grundannahme

Die Grundannahme für die obigen Untersuchungen ist, daß die Mang Kung-Würfel ungetürkte Würfel, m.a.W. Laplace-Würfel, sind. Wir beobachten jedoch, daß nur eine der sechs Seitenflächen eines jeden Würfels gekennzeichnet ist, sodaß man glauben könnte, daß die Würfel nicht vollständig symmetrische Kuben wären. Um diesen Verdacht zu untersuchen, können wir Schüler in einer Klasse auffordern, einen der Würfel 20 - 30 Mal zu werfen und die Ergebnisse der Klasse zusammenzufassen. Es mag von Interesse sein, die Schüler zu bitten, einen statistischen Test auszuführen, um die "Ordnungsmäßigkeit" der Würfel zu kontrollieren und dabei die von der Klasse gesammelten Daten zu benutzen.

Es gibt zwei verschiedene Lesarten von Antworten über die die Schüler berichten. Die erste Auffassungsweise enthält sechs unabhängige statistische Tests des Verhältnisses:

$$H_0: p_i = 1/6 \qquad H_1: p_i \neq 1/6$$

wobei p_i die Wahrscheinlichkeit ist, einen von Null verschiedenen Wert auf dem i-ten Mang Kung-Würfel zu haben. Die übliche Testgröße ist

$$z_i = \frac{h_i - p_i}{\sqrt{\frac{p_i(1-p_i)}{n}}}$$

ohne daß die Stetigkeitskorrektur hier angewendet ist. Tabelle 5 gibt die Ergebnisse wieder, die ein Schüler berichtete, der das 5% Signifikanzniveau benutzte.

Tab. 5: Gegenüberstellung der Ergebnisse für die Hypothese H_0 und H_1 .

Würfel	n	hi	Zi	Ablehnung von Ho
1	1200	0,139	-2,556	Ja
2	1200	0,184	1,627	Nein
3	1200	0,157	-0,93	Nein
4	1200	0,16	-0,62	Nein
5	1200	0,188	1,936	Nein
6	1200	0,173	0,542	Nein

Tab. 6: E_i und O_i Werte für den Chi-Quadrat Test

F	0	1	2	3
Ei	401,88	80,38	80,38	96,45
Oi	398	74	82	99
F	4	5	6	7
Ei	96,45	112,53	115,74	51,44
Oi	101	108	116	63
F	8	9	10	11
Ei	38,58	41,8	26,36	26,36
Oi	43	35	28	31
F	12	13	14	>=15
Ei	10,93	7,72	5,14	7,87
Oi	9	6	4	3

Die andere Denkweise benutzt einen Chi-Quadrat-Anpassungstest, um die beobachteten Daten des aktuellen Experiments den erwarteten Häufigkeiten der theoretischen Verteilung aus Tabelle 2 gegenüberzustellen. Die Testgröße ist

$$\text{Chi-Quadrat} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(E_i - O_i)^2}{E_i}$$

Tabelle 6 liefert die Ergebnisse, über die ein anderer Schüler berichtet hat. Der berechnete Chi-Quadrat-Wert ist 14,906 und Chi-Quadrat $_{0,05;16} = 26{,}296$. Wir lehnen die Nullhypothese auf dem 5%-Niveau nicht ab.

Die scheinbar widersprüchlichen Schlußfolgerungen dieser zwei Konzepte geben uns eine Gelegenheit, den Begriff des Fehlers 1.Art beim Testen von Hypothesen für die Schüler zu klären. Chi-Quadrat testet, ob alle sechs Würfel im Durchschnitt ordnungsgemäß sind; es ist weniger mächtig als die sechs einzelnen Tests. Bei den sechs einzelnen Tests auf dem 5%-Niveau gibt es jedoch eine Wahrscheinlichkeit von $1-0{,}95^6 = 0{,}265$, daß sich schließlich ein Test als signifikant erweisen wird, auch wenn alle Würfel unverfälscht sind.

Anmerkung des Verfassers

Mang Kung-Würfel sind in Hong Kong käuflich erhältlich. Ein Satz aus sechs Würfeln kostet etwa 75p (ohne Porto). Der Verfasser ist bereit, jede Einzelperson oder Institution darin zu unterstützen, die Würfel zu bekommen. Interessierte wenden sich an den Verfasser über E-Mail: ecscws@nus.sg oder über Fax: (65) 775-2646

Literatur

ROUNCEFIELD, M. and GREEN, D.R. (1989)
Condorcet's Paradox. *Teaching Statistics*, **11**(2), 46-49 .
WANG, A.L. (1989)
The Game of Tai Sai. *Teaching Statistics*, **11**(1), 2-3 .
WANG, A.L. (1993)
The Game of Luk Kow. *Teaching Statistics*, **15**(1), 6-7 .