Zog PEPYS falsche Schlüsse? Und hat NEWTON recht?

von **Rudolf Haller**, München

Zusammenfassung: Es handelt sich um Ergänzungen zu *Isaac Newton – Der moderne statistische Berater* (Stochastik in der Schule 16(1996)2). Das im Artikel von LESLIE GLICKMAN behandelte Problem von PEPYS wird in einen allgemeineren Rahmen gestellt und dabei untersucht, ob die von NEWTON gefundene Monotonie noch zutrifft, wenn man

1. statt der Würfel andere Zufallsgeräte jeweils gleicher Art zuläßt,
2. diese Zufallsgeräte mischt, oder
3. die ursprüngliche Anzahl der Würfel beständig erhöht.

Und schließlich ist der Autor überzeugt, daß NEWTON das Wartezeitexperiment nicht richtig gelöst hat.

I. Verallgemeinerungen

NEWTON hat festgestellt: Chance von A > Chance von B > Chance von C, d. h.,

P(»Mit 6 Würfeln mindestens 1 Sechs«) >

P(»Mit 2·6 Würfeln mindestens 2 Sechsen«) >

P(»Mit 3·6 Würfeln mindestens 3 Sechsen«),

oder anders ausgedrückt:

Die Werte $1 - F(6n; \frac{1}{6}; n-1)$ der kumulativen Binomialverteilungen $F(6n; \frac{1}{6})$ fallen für $n = 1, 2$ und 3 echt monoton.

Die systematische Art und Weise, in der NEWTON seine Berechnungen ausführte, brachte HERBERT WESTREN TURNBULL (1885–1961) auf die Idee, T. W. CHAUNDY und J. E. BULLARD anzuregen, das Problem allgemein zu untersuchen. Statt der von ihnen verwendeten s-flächigen Laplace-Würfel sollte man der Anschaulichkeit halber von Glücksrädern mit s gleich großen Sektoren sprechen, von denen genau einer ROT ist. Treffer ist das Auftreten von ROT. Die Zufallsgröße X = »Anzahl der Treffer« ist binomialverteilt nach $B(ns; \frac{1}{s})$, wenn ns Glücksräder gedreht werden. (Für $s = 6$ erhält man für $n = 1$ die Chance von A, für $n = 2$ die von B und für $n = 3$ die von C.)

Bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, mit ns Glücksrädern mindestens n Treffer zu erzielen, mit $P(ns; \frac{1}{s}; X \geq n)$, dann gilt

Stochastik in der Schule 17(1997) Nr. 3, S. 49-54

$$P(ns; \frac{1}{s}; X \geq n) = 1 - F(ns; \frac{1}{s}; n-1).$$

Unter Verwendung des zentralen Grenzwertsatzes zeigten T. W. CHAUNDY und J. E. BULLARD:

1) $P(ns; \frac{1}{s}; X \geq n)$ fällt *entweder* bei festem s *oder* bei festem n echt monoton.

1. Fall: s fest, d. h., die Art des Zufallsgeräts ist festgelegt, die Anzahl der Geräte und die der Treffer wird ver-n-facht.

Beispiel:

n	$s = 2$: Glücksrad ≙ Münze	$s = 4$: Glücksrad ≙ Tetraeder
1	P(»2 Münzen mind. 1 Wappen«) = 0,75	P(»4 Tetraeder mind. 1 ROT«) = 0,68
2	P(»4 Münzen mind. 2 Wappen«) = 0,69	P(»8 Tetraeder mind. 2 ROT«) = 0,63
3	P(»6 Münzen mind. 3 Wappen«) = 0,66	P(»12 Tetraeder mind. 3 ROT«) = 0,61

2. Fall: n fest, d. h., das Zufallsgerät wird in Art und Anzahl verändert, aber die Anzahl der Treffer bleibt konstant.

Beispiel:

s	$n = 1$	$n = 2$
2	P(»2 Münzen mind. 1 Wappen«) = 0,75	P(»4 Münzen mind. 2 Wappen«) = 0,69
3	P(»3 Glücksräder mind. 1 ROT«) = 0,70	P(»6 Glücksräder mind. 2 ROT«) = 0,65
4	P(»4 Tetraeder mind. 1 ROT«) = 0,68	P(»8 Tetraeder mind. 2 ROT«) = 0,63
6	P(»6 Würfel mind. 1 Sechs«) = 0,67	P(»12 Würfel mind. 2 Sechsen«) = 0,62
10	P(»10 Ikosaeder* mind. 1 ROT«) = 0,65	P(»20 Ikosaeder* mind. 2 ROT«) = 0,61

* Jedes Ikosaeder hat genau 2 rote Flächen.

2) Für alle n und s gilt: $P(ns; \frac{1}{s}; X \geq n) > \frac{1}{2}$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} P(ns; \frac{1}{s}; X \geq n) = \frac{1}{2}$.

Für festes s lassen sich 2 und 3 plausibel machen. Bekanntlich ist

$$F(n; p; k) \approx \Phi\left(\frac{k - \mu + \frac{1}{2}}{\sigma}\right),$$

also gilt

$$F\left(ns; \frac{1}{s}; n-1\right) \approx \Phi\left(\frac{n - 1 - n + \frac{1}{2}}{\sqrt{ns \cdot \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1}{s}\right)}}\right) = \Phi\left(\frac{-\frac{1}{2}s}{\sqrt{ns(s-1)}}\right) < \frac{1}{2}.$$

II. Zog PEPYS falsche Schlüsse?

SAMUEL PEPYS (gesprochen pi:ps, 1633–1703) hatte immerhin 10 £ darauf gewettet, daß A und B gleiche Chancen hätten, wie aus seinem Brief vom 14.2.1694 an GEORGE TOLLET (†1719) hervorgeht. Sowohl NEWTON als auch TOLLET bewiesen ihm, daß $P(6; \frac{1}{6}; X \geq 1) > P(12; \frac{1}{6}; X \geq 2)$ gilt, was er schließlich glaubte, ohne es aber zu verstehen. FRANKLIN B. EVANS hofft nun, daß weder PEPYS noch sonst jemand in Verallgemeinerung dieser Ungleichung weitere Wetten der Art eingegangen ist, dem A immer einen Würfel mehr zu geben und dem B das entsprechende Vielfache davon, wie

(1) A muß mit 7 Würfeln mindestens 1 Sechs und B mit 14 Würfeln mindestens 2 Sechsen werfen.

(2) A muß mit 8 Würfeln mindestens 1 Sechs und B mit 16 Würfeln mindestens 2 Sechsen werfen.

EVANS zeigt, daß in (1) A noch die bessere Chance hat, in (2) hingegen B. Die Ungleichung kippt!

EVANS' Feststellungen ließen mich seine Art der Würfelzuteilung auf PEPYS' ursprüngliches Problem anwenden, und siehe da: In der Ungleichungskette ist das Kippen noch verwickelter:

$$P(6; \frac{1}{6}; X \geq 1) > P(12; \frac{1}{6}; X \geq 2) > P(18; \frac{1}{6}; X \geq 3),$$

nämlich 0,6651 > 0,6186 > 0,5974, d. h., die Chance des A ist größer als die des B, und diese ist größer als die des C.

$$P(7; \frac{1}{6}; X \geq 1) > P(14; \frac{1}{6}; X \geq 2) < P(21; \frac{1}{6}; X \geq 3),$$

nämlich 0,7209 > 0,7040 < 0,7044, d. h., die Chance des A ist immer noch die größte, aber die des C ist größer als die des B.

$$P(8; \frac{1}{6}; X \geq 1) < P(16; \frac{1}{6}; X \geq 2) < P(24; \frac{1}{6}; X \geq 3),$$

nämlich 0,7674 < 0,7728 < 0,7882, d. h., die Chance des C ist größer als die des B, und diese ist größer als die des A.

Allgemein läßt sich damit mit den Wahrscheinlichkeiten $P(n(s+i); \frac{1}{s}; X \geq n)$ spielen. Bei festem s wählt man i und läßt dann n laufen.

Beispiel: Für $s = 6$ ergibt $i = 0$ die 1. Zeile, $i = 1$ die 2. Zeile und $i = 2$ die 3. Zeile.

III. Binomialtheorem – Binomialverteilung

Wenn MANFRED BOROVCNIK, der Übersetzer, meint, den Terminus »Binomialtheorem« durch »Binomialverteilung« ersetzen zu dürfen, so gebe ich zu bedenken, daß »Verteilung« ein Begriff erst dieses Jahrhunderts zu sein scheint. Ich fand ihn erstmals bei RICHARD VON MISES (1883–1953). Hingegen ist der von GLICKMAN benützte Terminus »Binomialtheorem« richtig. Darunter versteht man die Formel $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Ganz klar verwendet sie 1711 ABRAHAM DE MOIVRE (1667–1754): Bei einem Versuch sei a die Anzahl der Fälle, in denen ein Ereignis eintreten kann, b die Anzahl der Fälle seines Nicht-Eintretens. Wenn nun A darauf setzt, daß dieses Ereignis bei n [unabhängigen] Versuchen mindestens einmal eintrifft, und B auf das Gegenteil, dann verhalten sich die Chancen von A zu denen von B wie $(a+b)^n - b^n$ zu b^n. Und wenn A auf mindestens zweimaliges Eintreffen setzt, dann Verhalten sich die Chancen wie $(a+b)^n - b^n - nab^{n-1}$ zu $b^n + nab^{n-1}$, usw. für die übrigen Fälle. Diese Erkenntnis ist ein Kernsatz seiner Überlegungen. PIERRE RÉMOND DE MONTMORT (1678–1719) benützt das Binomialtheorem 1708 noch nicht, aber in der wesentlich erweiterten 2. Auflage von 1713 findet man es, wenn er z. B. sagt, daß der Koeffizient von $a^k b^{n-k}$ in der Entwicklung von $(a+b)^n$ die Anzahl der Fälle angibt, in denen genau k-mal die Seite a und $(n-k)$-mal die Seite b einer Münze fallen. Mit Hilfe des Binomialtheorems werden also die Mächtigkeiten von Ereignissen bestimmt.

IV. Hat NEWTON recht?

NEWTON schreibt am 26.11.1693 an PEPYS: »Ich nahm an, daß A mit einem Würfel und B mit zweien wirft, der erstere, bis er eine Sechs wirft, der letztere genausooft um zwei Sechsen, und ich fand, daß A im Vorteil ist. [...] Denn hier ist A deswegen im Vorteil, weil er als erster wirft.«

Ich fand nirgends einen Nachweis für NEWTONs Behauptung. DAVID (1957) z. B. schreibt lediglich »which is true«.

Ich interpretiere NEWTONs Text so: A beginnt und wirft so lange (n-mal), bis die erste Sechs fällt; damit ist n bestimmt. Nun darf B genausooft wie A werfen, muß aber bei diesen n »Doppelwürfen« mindestens zweimal eine Sechs erzielen. A ist im Vorteil bedeutet für mich: Die Wahrscheinlichkeit, daß B bei diesen durch A festgelegten n »Doppelwürfen« keine zweite Sechs wirft, muß größer als 50% sein. Wegen der Unabhängigkeit des Werfens von A und B gilt für diese Wahrscheinlichkeit

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\,(\text{»A wirft die erste Sechs beim } n\text{-ten Wurf und B wirft keine zweite Sechs«})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right] \cdot \left[\left(\frac{25}{36}\right)^{n} + \binom{n}{1}\frac{10}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{125}{216}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{2}{5}n\right) = \frac{4435}{8281} = 53{,}6\%.$$

A ist tatsächlich im Vorteil. – Lassen wir aber nun B mit dem Werfen beginnen. Dann ist NEWTON zufolge zu erwarten, daß A nicht mehr im Vorteil ist, da er ja nicht beginnt und B die Wurfzahl n durch seinen Erfolg festlegt. Die Wahrscheinlichkeit, daß B genau beim n-ten Doppelwurf die zweite Sechs wirft, ist aber etwas schwieriger zu bestimmen:

P(»B wirft genau beim n-ten Wurf die zweite Sechs«)

= P(»B wirft genau beim n-ten Wurf eine Doppelsechs und vorher höchstens *eine* Sechs« oder »B wirft bei den ersten $n-1$ Doppelwürfen genau eine Sechs und beim n-ten Doppelwurf die zweite Sechs«).

Wegen der Unvereinbarkeit der beiden Ereignisse erhält man dafür den Wert

$$\frac{1}{36}\left[\left(\frac{25}{36}\right)^{n-1} + \binom{n-1}{1}\frac{10}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-2}\right] + \left[\binom{n-1}{1}\frac{10}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-2} \cdot \frac{10}{36}\right]$$

$$= \frac{1}{125}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}(22n-17).$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß B gewinnt, wenn er beginnen darf, ist dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\text{»B hat genau beim } n\text{-ten Wurf die zweite Sechs und A hat bei } n \text{ Würfen keine Sechs«})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{125}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}(22n-17)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n} = \frac{3205}{8281} = 38{,}7\%.$$

A ist noch stärker im Vorteil, wenn B beginnt! Hat sich NEWTON geirrt, als er meinte, A sei im Vorteil, weil er beginnen dürfe? Oder habe ich die Aufgabe nicht richtig angepackt?

Übrigens: Die fehlenden 7,7% = $\frac{641}{8281}$ sind die Wahrscheinlichkeit für ein Unentschieden, d. h. für den Fall, daß A und B genau beim n-ten Wurf Erfolg haben, nämlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{125}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}(22n-17)\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{625}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{3n}(22n-17).$$

Für den Nachweis, daß sich NEWTON nicht geirrt hat, daß also A gewinnt, wenn er beginnt, aber nicht, wenn B beginnt, dankt schon jetzt der Autor.

Literatur

Zusätzlich zu den im Artikel von GLICKMAN angegebenen Werken

EVANS, FRANKLIN B.: Pepys, Newton and Bernoulli Trials. In: The American Statistician **15** (1961), 29

MISES, RICHARD VON: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: Mathematische Zeitschrift **5** (1919), 52–99

DE MOIVRE, ABRAHAM: De Mensura Sortis. In: Philosophical Transactions Nr. 329 (1711), erschienen 1712

MONTMORT, PIERRE RÉMOND DE: Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard, Paris 1708 und ^{2}1713

Adresse des Autors:

Rudolf Haller
Nederlinger Straße 32a

80638 München