

## Experimenteller und anschaulicher Stochastikunterricht rund um das „Problem der abgebrochenen Partien“

von Günter Schmidt, Stromberg

### Zusammenfassung

Die Frage nach der gerechten Aufteilung des gesamten Einsatzes bei vorzeitigem Abbruch eines Glücksspiels (problème des parties<sup>1)</sup>) steht nicht nur am Anfang der relativ kurzen Entwicklungsgeschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das Problem eignet sich auch in hervorragender Weise zu einer adäquaten Begriffsbildung bei Schülerinnen und Schülern im Stochastikunterricht. Dies kann zu einem genetischen Zugang unter Einsatz vielfältiger, selbständiger Schüleraktivitäten mit geeigneten Real- und Computereperimenten und durch eindrucksvolle Visualisierung (u.a. am Galton-Brett und sogar am Sierpinski-Dreieck) geschehen.

Der Stochastikunterricht erfährt seinen besonderen Reiz durch Probleme, die eigenständiges Handeln und Experimentieren zulassen, die offen sind für vielfältige und gegebenenfalls konkurrierende Lösungswege, deren Verständnis durch möglichst eindrucksvolle Visualisierungen gestützt wird.

Ein solches Problem bzw. Problemfeld liegt mit dem „Problem der abgebrochenen Partien“ („problème des parties“, „problem of points“, „force majeure“) vor. Es geht hierbei um die Aufgabe, den bei einem Spiel vereinbarten Gewinn bei vorzeitigem Spielabbruch so auf die beteiligten Spieler aufzuteilen, dass dies dem erreichten Spielstand entsprechend „gerecht“ ist. Das Problem taucht in italienischen mathematischen Manuskripten bereits im frühen Mittelalter (1380) auf und ist vermutlich arabischen Ursprungs (Barth/Haller 1983). Von bekannten Mathematikern wie Luca Pacioli (1494), Geronimo Cardano (1539) oder Niccola Tartaglia (1556) sind unterschiedliche Lösungsvorschläge hierzu überliefert. Im Sommer des Jahres 1654 kommt es zu einem ausgedehnten Briefwechsel zwischen Blaise Pascal und Pierre de Fermat, in dem beide auf verschiedenen Wegen zu gleichen Lösungen dieses Problems gelangen. Pascal veranlasste dies zu der schönen Bemerkung: „Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris“.

Die in diesen Briefen dargestellten theoretischen Überlegungen und Begründungen veranlassen die Historiker, das Jahr 1654 als „Geburtsjahr“ der Wahrscheinlichkeitstheorie anzusehen.

In der Folgezeit beschäftigten sich viele herausragende Vertreter der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit zunehmenden Verallgemeinerungen des Problems (Christian Huygens 1629-1695, Jacob Bernoulli 1654-1705, Abraham de Moivre 1667-1754, Thomas Simpson 1710-1761, Pierre Simon de Laplace 1749-1827).

In all diesen Abhandlungen kommt es zum Einsatz unterschiedlicher stochastischer Begriffe und Methoden, die ein reiches Potential für die Lernenden im Stochastikunterricht darstellen können. Im folgenden werden solche unterrichtlichen Ideen und Erfahrungen konkret dargestellt.

## 1. Von der offenen Präsentation des Problems zur stochastischen Modellierung

Ein geeigneter Einstieg zu Beginn eines Stochastikkurses lehnt sich an die historische Entwicklung an (Andelfinger 1982):

**Chevalier de Méré, ein Philosoph und Spieler am Hofe Ludwigs des XIV, wandte sich 1654 mit folgendem Problem an den Mathematiker Blaise Pascal :**

Zwei Spieler A und B setzen je 32 Pistolen (Geldstücke) und vereinbaren, ein Glücksspiel (etwa Münzwurf) mehrmals durchzuführen. Der Sieger erhält jeweils einen Punkt. Wer zuerst drei Punkte erreicht, erhält den Gesamteinsatz von 64 Pistolen. Aus irgendwelchen Gründen muß das Spiel beim Stand von 2:1 für den Spieler A jedoch abgebrochen werden. Wie ist der Einsatz gerecht aufzuteilen?

**Versuchen Sie, einen Lösungsansatz zu finden und diesen zu begründen!**

Wenn die Aufgabe in dieser offenen Form ohne direkten Bezug zu einem stochastischen Themengebiet präsentiert wird, und wenn den Schülerinnen und Schülern hinreichend Zeit zur eigenständigen Bearbeitung und Diskussion eingeräumt wird (z.B. in Gruppenarbeit), so erhält man viele interessante und unterschiedliche Lösungsansätze, in denen sich manche der historischen Lösungen der Zeit vor Pascal/Fermat wiederfinden, so z.B.:

- Teilung des Einsatzes im Verhältnis der gewonnenen Partien (Pacioli). In diesem Falle also im Verhältnis 2:1, d.h. Spieler A bekommt 42,66 Pistolen und Spieler B 21,33. Dieser Vorschlag spiegelt das auch heute noch bevorzugte „Proportionaldenken“ wider.
- Teilung des Einsatzes unter Berücksichtigung der noch zum Sieg benötigten Gewinnpartien. Im vorgegebenen Fall erhält man wiederum eine Aufteilung im Verhältnis 2:1. Bei anderen Spielabbrüchen unterscheidet sich diese Lösung von der vorhergehenden.

In den historischen Ansätzen finden sich auch Spiele, bei denen die Spieler unterschiedliche Geschicklichkeit (Gewinnchancen) aufweisen, so z.B. Bogenschießen, auch solche werden von den Schülern vorgeschlagen.

In vielen Gruppen entwickelt sich spontan eine Experimentierphase (i.a. mit dem Münzwurf, bei entsprechenden Vorerfahrungen auch mit dem Galton-Brett). Diese Simulation öffnet den Weg zu dem von Pascal/Fermat vertretenen und in der Folgezeit allgemein anerkannten Lösungsansatz:

- Teilung des Einsatzes nach der Gewinnwahrscheinlichkeit

Dieser Ansatz kann auch durch Vorlage und Analyse eines Auszugs aus einem Brief von Pascal an Fermat vom 29. Juli 1654 eingebracht werden, z.B. in der sinngemäßen Übersetzung (Andelfinger 1982) oder auch im französischen Text (Oeuvres complètes de Blaise Pascal 1889):

...“Nehmen wir an, der erste Spieler (A) hat 2 Punkte und der zweite Spieler (B) hat 1 Punkt. Sie müssen nun um einen Punkt spielen unter der Bedingung, dass A alle Pistolen bekommt, falls er gewinnt. Falls B gewinnt, hat er 2 Punkte, so daß sie gleichstehen. Im Falle des Abbruchs bekommt dann jeder 32 Pistolen. Also, falls A gewinnt, gehören ihm 64 Pistolen, falls er verliert, 32 Pistolen. Wenn die Spieler beim Stand von 2:1 nicht weiterspielen können und den Einsatz aufteilen wollen, könnte A zu B sagen: Ich habe sicher 32 Pistolen, falls ich das nächste Spiel verliere. Die anderen 32 Pistolen bekomme ich vielleicht oder nicht, die Chancen sind gleich. Laß uns diese 32 Pistolen gleich aufteilen, und ich bekomme noch die 32 Pistolen, die mir sicher gehören. So bekommt A 48 Pistolen, B 16 Pistolen!“

Die offene Präsentation des Problems und die daraus resultierenden unterschiedlichen Lösungsvorschläge bringen einen weiteren wichtigen Diskussionsaspekt:

Was bedeutet bei dem vorgelegten Problem eigentlich „gerecht“?

Es ist ja keinesfalls klar, daß die Aufteilung nach den Gewinnwahrscheinlichkeiten die einzig „gerechte“ ist. Gerecht könnte ja auch sein, daß man den notwendigen Abbruch als „höhere Gewalt“ anerkennt und den Einsatz zu gleichen Teilen wieder an die Spieler zurückgibt. Oder man einigt sich nach beiderseits anerkannten Regeln, ggf. unter Hinzuziehung einer neutralen dritten Person. Selbst die Anerkennung der Aufteilung nach den Gewinnwahrscheinlichkeiten bedeutet ja keinesfalls, daß die von Pascal begründete Aufteilung gerecht ist. Vielleicht ist Spieler A ja geschickter im Spiel und die Chancen stehen im einzelnen Spiel nicht gleich. Dann muß dies entsprechend berücksichtigt werden.

Damit wird deutlich, daß es sich bei den vorgeschlagenen Lösungen um mathematische Modellierungen einer realen Situation handelt. Eignen sich hierfür nicht besser juristische Entscheidungen? Diese könnten allerdings mathematische Modellierungen in die Entscheidungsfindung mit einbeziehen, wie dies ja häufig geschieht. Dafür spricht auch die hohe Akzeptanz, die dem Wahrscheinlichkeitsmodell heute zuteil wird. Für die allgemeinbildenden Ziele des Mathematikunterrichts ist es jedenfalls von Bedeutung, daß diese Aspekte der Modellierung mit einbezogen werden. Dies wird ausführlich erläutert und diskutiert in Borovcnik 1986 und Schupp 1986.

## 2. Von verschiedenen Lösungsansätzen zu stochastischen Strategien

### 2.1 Simulation

Bei Anerkennung des Wahrscheinlichkeitsmodells für die gerechte Verteilung ist Simulation die naheliegende Lösungsstrategie. Umgekehrt führt die Simulationsidee zum Wahrscheinlichkeitsmodell. Beim selbsttätigen Ausführen der Simulation werden erste wichtige stochastische Erkenntnisse gewonnen und Strategien entworfen.

Zunächst bedarf es einer exakten Festlegung des Vorgehens bei der Simulation:

Beim Stand von 2:1 wird das Spiel fortgesetzt, bis einer der Spieler gewonnen hat, d.h. drei Punkte erreicht hat. Dies wird  $n$ -mal wiederholt,  $n$  sollte hinreichend groß sein. In einer Strichliste werden die Anzahl der Siege von A ( $n_A$ ) und von B ( $n_B$ ) festgehalten. Der Einsatz wird schließlich im Verhältnis  $n_A : n_B$  verteilt.

Das Simulationsgerät wird gemäß der vermuteten Spielstärke  $p$  des Spielers A gewählt, im ersten Ansatz in der Regel  $p=0.5$ . Geeignet und leicht verfügbar sind Münze, Würfel (gerade Augenzahl/ungerade Augenzahl), Glücksrad u.ä. Diese Zufallsgeräte sind den Schülerinnen und Schülern aus verschiedenen Erfahrungsbereichen vertraut und werden als faires Entscheidungskriterium akzeptiert. In Klassen mit 20-30 Schülerinnen kommt man über Partnerarbeit schnell zu hinreichend großen Versuchsanzahlen. In der Partnergruppe werden dabei verschiedene Spiellängen (1 und 2) erlebt, ebenso die Einsicht, dass die maximale Spiellänge 2 beträgt. Beim Sammeln der Ergebnisse der einzelnen Partnergruppen empfiehlt sich eine kumulative Übersicht, ggf. mit geeigneter graphischer Darstellung. (Tabelle 1 und Abb.1) Dabei wird die Stabilisierung des Verhältnisses erlebt und als wichtige stochastische Erfahrung bewusst.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
←	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util
DATA	$n_A$	$n_B$	sumnA	sumnB	$c3/c4$	
	c1	c2	c3	c4	c5	
4	6.	4.	30.	10.	3.	
5	8.	2.	38.	12.	3.1667	
6	9.	1.	47.	13.	3.6154	
7	6.	4.	53.	17.	3.1176	
8	8.	2.	61.	19.	3.2105	
9	6.	4.	67.	23.	2.913	
10	7.	5.	74.	28.	2.6429	
<b>r10c2=5.</b>						
MAIN		RAD APPROX			FUNC	

Tabelle 1

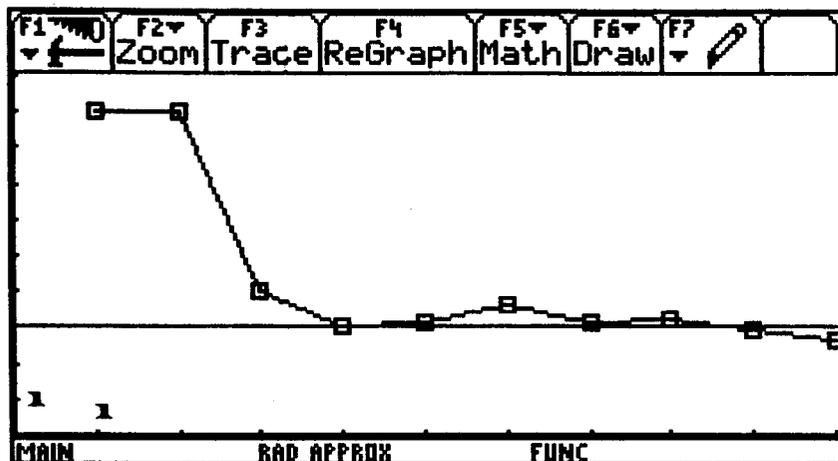


Abb.1

Der Übergang von der Realsimulation zu zeitsparenden (theoretischen) Simulationen ergibt sich fast von selbst, z.B. in der Stufung

Telefonbuch -> Nachkommaziffern von Pi -> Zufallszifferntabellen -> Zufallszahlen auf dem Taschenrechner/Computer.

Wenn die Zufallsziffern mit dem Computer erzeugt werden, dann bietet sich auch die schnelle und effektive Auswertung mit dem Computer an. Ein gutes Programm hierzu sollte einmal den Simulationsprozess widerspiegeln und günstig veranschaulichen, zum anderen muss es sowohl einzelne Stufen der Simulation durchführen (mit Notierung der einzelnen Spielfolgen) und auswerten als auch die schnelle Auswertung umfangreicher Simulationen gestatten. Ein solches Programm (mit passenden Erweiterungen) wurde im Rahmen der diesem Artikel zugrundeliegenden Unterrichtserfahrungen entwickelt und eingesetzt (T. Schmidt 1995), die Abbildungen 2a,b vermitteln einen (leider nur statischen) Eindruck einiger Simulationen.

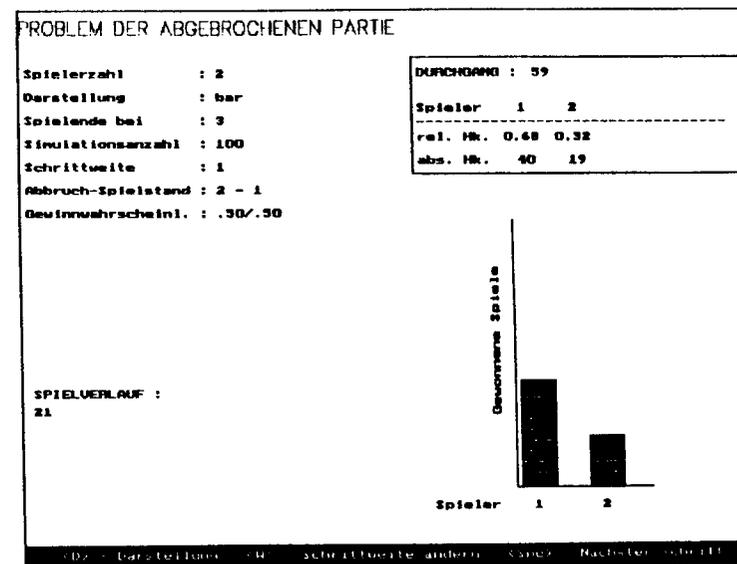


Abb.2a

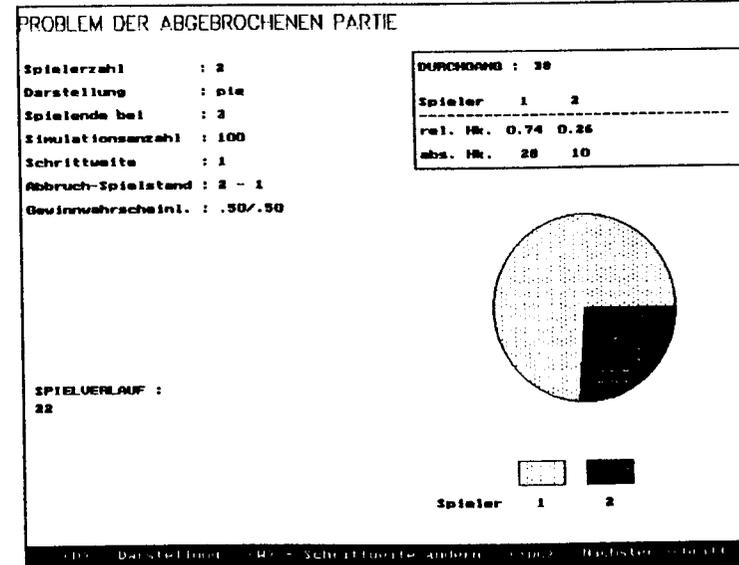


Abb.2b

## 2.2 Visualisierungen und Lösungsstrategien über Baumdarstellungen

Die Simulationserfahrungen werden mit Hilfe eines Baumdiagramms übersichtlich und strukturiert dargestellt.

(Abb.3)

Aus dieser Baumdarstellung können nun verschiedene Strategien zur Lösung des Problems entwickelt werden:

Ganz nahe an der Simulation ist das „Durchpumpen“ der Gesamtmasse durch den Baum, die Masse verteilt sich dann auf die Gewinnzustände von A und B. Hier findet

man in strukturierter Darstellung auch nochmals die oben im Briefwechsel dargestellte Argumentation von Pascal. (Abb.4)

Ebenso direkt ergibt sich das Aufteilungsverhältnis aus den Wahrscheinlichkeiten, die man mit Hilfe der beiden Pfadregeln (A.Engel 1987) berechnet. (Abb.5)

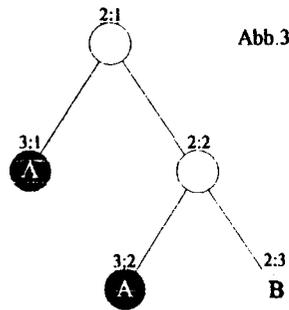
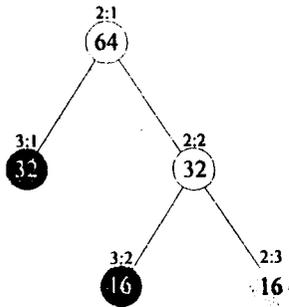


Abb.3

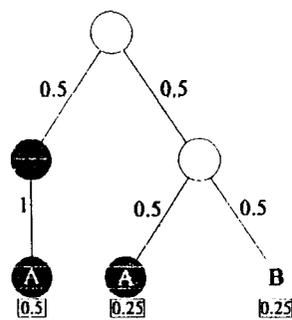
Simulation am Baum  
"Durchpumpen" der Gesamtmasse



A: 32+16=48 B:16

Abb.4

Pfadregeln



$P(A) = 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.75$

Abb.5

In anderer Form findet man den Baum wieder im Galton-Brett. Hier liegt ein reales Simulationsgerät vor, mit dem man das Aufteilungsverhältnis bestimmen kann. Die maximale Spielanzahl in einer Partie ist 2, man benötigt also ein Galton-Brett mit 2 Zapfenreihen (Schmidt 1984). Alle Kugeln in dem linken und mittleren Auffangkasten stellen Partiegewinne für Spieler A dar, die Kugeln in dem rechten Kästchen für Spieler B. (Abb.6)

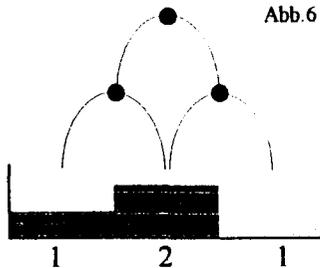
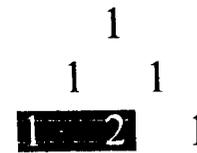


Abb.6

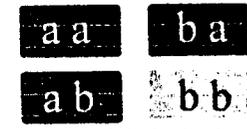
Aus diesen anschaulichen Strategien ergibt sich ein zwangloser Zugang zu den weiteren Lösungsvorschlägen von Pascal und Fermat, die in dem Briefwechsel ausgeführt werden, nämlich mit Hilfe des „triangle arithmetique“ (Pascal) (Abb. 7) und dem kombinatorischen Ansatz durch Abzählen der Möglichkeiten (Fermat) (Abb 8). Dass man beim kombinatorischen Abzählen alle Spielfolgen der Länge 2 berücksichtigen muss, wird aus den obigen Strategien deutlich (Gleichverteilung).

Aufteilung gemäß Pascalschem Dreieck      Aufteilung durch kombinatorisches Abzählen



$a:b = (1+2):1 = 3:1$

Abb.7



$A \rightarrow \{aa, ab, ba\}$      $B \rightarrow \{bb\}$   
 $a:b = 3:1$

Abb.8

Aufteilung mit Hilfe der Binomialverteilung

Von den zuletzt benutzten Strategien ist es nur ein kurzer Schritt zum Einsatz der Binomialverteilung. In unserem Fall handelt es sich ja um eine Bernoullikette mit  $n=2$  und  $p=0.5$ . Die Gewinnwahrscheinlichkeit für A berechnet sich dann zu

$$P(A) = P(X \geq 1) = \binom{2}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{2}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Auch auf diese Weise kommt man dann zur Aufteilung im Verhältnis 3:1.

## 2.3 Visualisierungen und Lösungsstrategien über stochastische Prozesse

Ein Graph für den stochastischen Prozess lässt sich leicht aus dem obigen Baumdiagramm ableiten. Bei den „Knoten“ werden der Startpunkt S und die beiden absorbierenden Zustände A und B ausgezeichnet (Abb.9). Wegen der Übersichtlichkeit und Verallgemeinerbarkeit empfiehlt sich auch eine Darstellung im Koordinatengitter (Abb. 10).

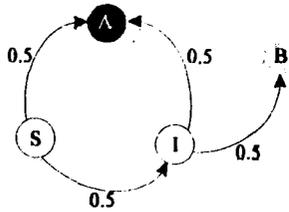


Abb. 9

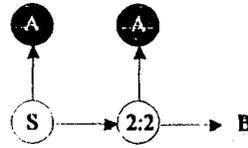


Abb. 10

Als Methoden zur Lösung des Problems können hier wiederum

- die Simulation mit „Durchpumpen“ der Gesamtmasse oder den Pfadregeln entsprechend
- die Mittelwertsregeln (A. Engel 1987, Seite 65 ff) angewandt werden.

Die Mittelwertregel besagt:

„Die Wahrscheinlichkeit eines inneren Zustands ist gleich dem gewichteten Mittel seiner Vorwärtsnachbarn“

Die Gewinnwahrscheinlichkeit für A im Zustand A ist 1, im Zustand B ist sie 0. Im Zustand I ist gemäß der Mittelwertregel

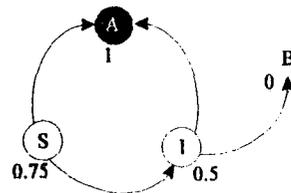
$$0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0 = 0.5$$

Damit können wir nun die Gewinnwahrscheinlichkeit im Zustand S berechnen:

$$0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 1 = 0.75$$

Es ergibt sich eine Aufteilung des Gewinns im Verhältnis  $0.75 : 0.25 = 3 : 1$ .

Abb. 11



### Lösung mit Hilfe von Markovketten

Hierzu fassen wir das künftige Geschehen nach dem Spielabbruch wiederum als stochastischen Prozess auf, der verschiedene Zustände  $z_i$  annehmen kann.

Zum Zeitpunkt  $t=0$  benötigt Spieler A noch  $m=1$  und Spieler B noch  $n=2$  Spiele zum Sieg.  $(m/n)=(1/2)$  ist der Anfangszustand eines stochastischen Prozesses, der verschiedene Zustände  $(u/v)$  durchlaufen kann und spätestens zum Zeitpunkt  $t=m+n-1$  ( $1+2-1=2$ ) zu einem Gewinn für

A oder B führt. Als mögliche Zustände kommen in unserem Fall also  $(1/2)$ ,  $(1/1)$ , A, B in Frage. (Allgemein gibt es  $m \cdot n + 2$  Zustände).

In einer stochastischen Matrix U können wir nun die Übergangswahrscheinlichkeiten eintragen. Diese geben die Wahrscheinlichkeit an, mit der sich der Prozess zum Zeitpunkt  $t+1$  im Zustand  $z_k$  befindet, wenn er sich zur Zeit  $t$  im Zustand  $z_i$  befand. Der Graph des Prozesses erleichtert die Aufstellung der Matrix.

	$z_1$ (1/2)	$z_2$ (1/1)	$z_3$ A	$z_4$ B
$z_1$ (1/2)	0	0.5	0.5	0
$z_2$ (1/1)	0	0	0.5	0.5
$z_3$ A	0	0	1	0
$z_4$ B	0	0	0	1

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tabelle 2

Die quadratische Matrix U der Ordnung 4 ist eine stochastische Matrix, d.h. die Zeilensumme ist jeweils 1.

Wir definieren nun einen Zustandsvektor  $w(t)=(w_1(t), w_2(t), w_3(t), w_4(t))$ , in dem die Wahrscheinlichkeiten  $w_i(t)$  angegeben sind, mit dem sich der Prozess zur Zeit  $t$  im Zustand  $z_i$  befindet.

Es gilt dann speziell  $w(0)=(1,0,0,0)$ , denn zur Zeit  $t=0$  befindet sich der Prozess mit Wahrscheinlichkeit 1 im Zustand  $z_1$ .

Mit Hilfe dieses Anfangsvektors  $w(0)$  können wir nun alle anderen Zustandsvektoren  $w(t)$  rekursiv berechnen mit

$$w(t+1) = w(t) \cdot U$$

In unserem Fall ist der Prozess zum Zeitpunkt 2 im

Endzustand, d.h.  $w(2) = w(1) \cdot U = (w(0) \cdot U) \cdot U$

$$= w(0) \cdot U^2 = (0,0,0.75,0.25)$$

Mit  $0.75 : 0.25 = 3 : 1$  erhalten wir so das bekannte Aufteilungsverhältnis.

$$u := \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[1, 0, 0, 0] \cdot u^2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abb. 12

## Zwischenbilanz

Nach einer Diskussion der verschiedenen Modellierungsmöglichkeiten für „gerechte Aufteilung“ haben wir vielfältige Lösungsstrategien für das Modell der Aufteilung nach den Gewinnwahrscheinlichkeiten aufgezeigt:

### SIMULATIONEN mit

- Zufallsgeräten
- Zufallsziffern
- Computer

### VISUALISIERUNG AM BAUMDIAGRAMM und daraus

- Durchpumpen der Gesamtmasse
- Anwenden der Pfadregeln
- Simulation am Galton-Brett
- Pascalsches Dreieck
- kombinatorisches Abzählen(Gleichverteilung)
- Binomialverteilung

### VISUALISIERUNG ALS STOCHASTISCHER PROZESS und daraus

- Durchpumpen der Gesamtmasse
- Anwenden der Mittelwertregel
- Markovkette und stochastische Matrizen und Zustandsvektoren

Dabei wurden vielfältige stochastische Strategien eingeführt, die auch in vielen anderen Situationen eingesetzt werden können. Zusätzlich wurden wichtige stochastische Grunderfahrungen gewonnen bzw. Vorerfahrungen bewußt gemacht.

In einem letzten Abschnitt soll nun untersucht werden, wie sich die einzelnen Strategien bei Verallgemeinerungen des Problems der abgebrochenen Partien bewähren und in welcher Weise sie modifiziert werden können.

## 3. Verallgemeinerungen

Das Problem lässt sich in verschiedenen Richtungen verallgemeinern, die sämtlich bereits in den historischen Lösungsversuchen behandelt werden:

- Variation der Anzahl der zum Sieg notwendigen Punkte und Variation des Spielstandes beim Abbruch
  - Erhöhung der Anzahl der Spieler auf 3 oder mehr
  - Variation der Wahrscheinlichkeit für den Gewinn eines Punktes von  $p = 0.5$  auf beliebiges  $p$
- Die Verallgemeinerungen können alleine oder in Kombination miteinander auftreten.

An unterschiedlichen Beispielen sollen nun die oben angewandten Strategien auf ihre „Macht“ bei Verallgemeinerungen untersucht werden.

### 3.1 Simulation

Die Simulationen erweisen sich als ausgesprochen flexibel und mächtig bei allen Verallgemeinerungen. Bei den Realsimulationen (Münze/Würfel/Glücksrad) wächst allerdings der Zeitaufwand bis zur hinreichenden Stabilisierung der Verhältnisse erheblich.

Bei zwei Spielern A und B, einer Gewinnpunktzahl  $g$  und dem Abbruchstand  $a:b$  ( $a \geq b$ ) benötigt man Spielerien mit maximaler Spiellänge  $l_{\max} = (g-a)+(g-b)-1$  und minimaler Länge  $l_{\min} = (g-a)$ . Wenn man die Anzahl der noch zum Sieg notwendigen Spiele mit  $(m,n)$  notiert ( $m \leq n$ ), so liegen die Spiellängen zwischen  $m$  und  $m+n-1$ . Bei  $g=7$  und  $a:b=5:4$ , d.h.  $(m,n)=(2,3)$  z.B. erhält man Spiellängen zwischen 2 und 4. Bei  $(m,n)=(3,4)$  wachsen diese bereits auf 6 usw. Da wird dann schon der Vorteil der Verwendung zugriffsgünstiger Zufallsziffern deutlich, noch überzeugender empfiehlt sich der Computer als Simulationswerkzeug mit programmierter Auswertung und Veranschaulichung.

Für die Erweiterung auf drei oder mehr Spieler gelten die gleichen Aussagen.

Interessant wird bei den Realsituationen die Variation von p, hier kann man einige Wertschätzung über die Standardgeräte Würfel (Dodekaeder, Ikosaeder) und vor allem Urnen (Ziehen mit Zurücklegen) bzw. Glücksräder gewinnen. Überzeugend ist auch hier der Computer mit gut strukturierten und erweiterbaren Programmen. In Bild 13 zeigen wir hierfür nochmals ein Beispiel aus dem schon erwähnten Programm von T.Schmidt (1995).

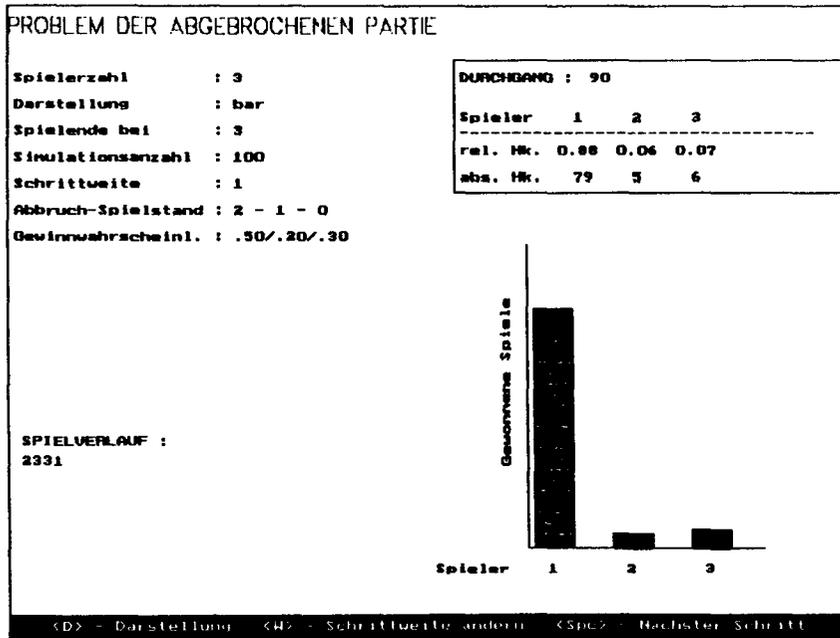


Abbildung 13

### 3.2 Baumdiagramme und daraus abgeleitete Strategien

Diese Lösungsstrategien bestätigen weitgehend ihre universelle Verwendbarkeit. Sowohl das „Durchpumpen“ als auch die Pfadregeln greifen bei jeder der 3 Verallgemeinerungen. Zusätzlich lernt man jetzt den Wert der übersichtlichen Konstruktion von Baumdiagrammen schätzen, insbesondere bei der Vergrößerung der Spielerzahl.

Beispiel: 3 Spieler A, B und C, Gewinnpunktzahl g=3, Abbruch bei 2:1:0

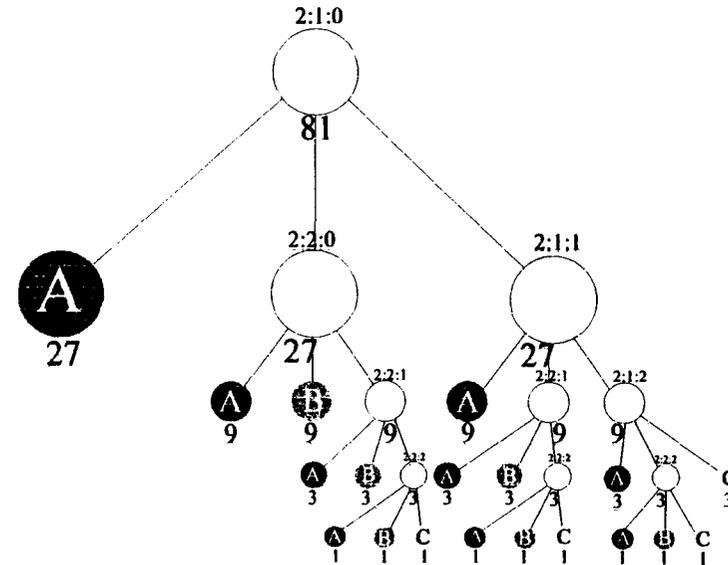


Abb. 14

Beim Durchpumpen erhalten wir für die Spieler die folgenden Werte:

A:  $27+2*9+3*3+3*1 = 57$     B:  $9+2*3+3*1 = 18$     C:  $3 + 3*1 = 6$

Die Pfadregeln liefern mit  $p=1/3$  an jedem Ast:

$$A \quad \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{57}{81} \qquad B \quad \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{18}{81}$$

$$C \quad \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{6}{81}$$

Bei manchen Strategien werden die begrenzte Anwendbarkeit und damit auch die jeweils speziellen Voraussetzungen deutlich.

Beim kombinatorischen Abzählen läßt die notwendige Gleichverteilung keine Variation von  $p=0.5$  zu, gleichzeitig wächst auch der Aufwand bei mehr Spielern beträchtlich.

Beispiel: 3 Spieler A, B und C, Gewinnpunktzahl  $g=3$ , Abbruch bei 2:2:1

Die maximale Spiellänge ist zwar nur 2, wir erhalten aber immerhin schon 9 Kombinationen. Die Aufteilung erfolgt im Verhältnis 4:4:1

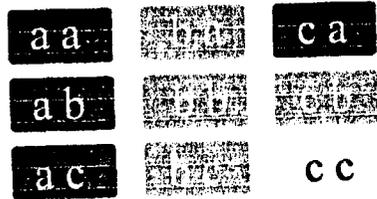


Abb. 15

Das reale Galtonbrett läßt nur Verallgemeinerungen der Gewinnpunktzahl  $g$  und des Abbruchstandes  $a:b$  bzw.  $(m,n)$  zu, hier erweist es sich allerdings als besonders elegant und anschaulich. Das gleiche gilt für das Pascalsche Dreieck.

Beispiel für das Galton-Brett:  $g=5$ ,  $a:b=3:2$ ,  $(m,n)=(2,3)$

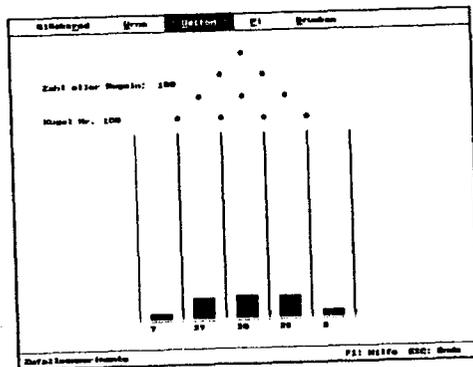
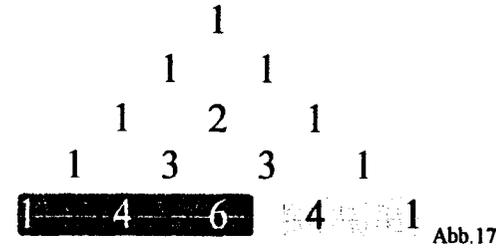


Abb. 16

Das gleiche Beispiel mit der Lösung über das Pascalsche Dreieck. Danach wird der Gewinn im Verhältnis 11:5 aufgeteilt.



Mit dem „schiefgestellten“ Galton-Brett bekommt man (allerdings nur für zwei Spieler) auch die Variation von  $p$  in den Griff. Man muß nun aber vom realen Galton-Brett zum computersimulierten Galton-Brett übergehen. Abbildung 18 zeigt eine solche Simulation mit dem Programm „Zufall“ (Strauch/Grabinger 1995) für  $g=7$ ,  $a:b=3:2$  und  $p=0.63$ .

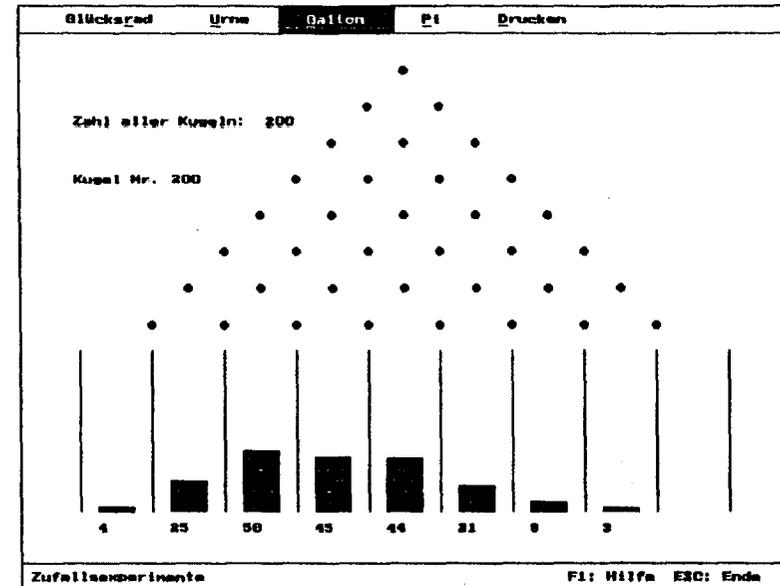


Abb. 18

Den theoretischen Wert zu dieser Simulation erhält man mit der passenden Binomialverteilung:

$$P(X \geq 4) = \sum_{k=4}^7 \binom{7}{k} \cdot 0.63^k \cdot 0.37^{7-k} = 0.869$$

### Vom „Galton-Turm“ zum Sierpinski-Dreieck

Eine interessante und kreative Verallgemeinerung wurde in einer spannenden Unterrichtssequenz von den Schülerinnen und Schülern eines Leistungskurses für das Problem mit drei Spielern entwickelt. Die Simulation mit dem Galton-Brett bei dem Problem mit zwei Spielern hatte die Schüler sehr überzeugt. So versuchten sie spontan, das Galton-Brett für das Problem mit drei Spielern passend zu verallgemeinern. Nach vielen Ansätzen und Diskussionen landeten sie schließlich bei einer dreidimensionalen Variante des Galton-Bretts: Mit Hilfe von Tetraedern konstruierten sie einen „Galton-Turm“ (Abbildung 19). Die Kugeln treffen auf die Spitzen von Tetraedern und laufen auf den Kanten der Tetraeder zur nächsten Ebene von Tetraedern. Die Wahrscheinlichkeit für die Wahl einer bestimmten Kante beträgt jeweils  $1/3$ . Für drei Spieler A, B, C mit Gewinnpunktzahl  $g=3$  und Abbruchstand  $a:b:c=2:1:0$  ist die maximale Spiellänge  $(1+2+3)-2=4$ , man benötigt also vier Ebenen im Tetraederturm mit  $1+3+6+10=20$  Tetraedern.

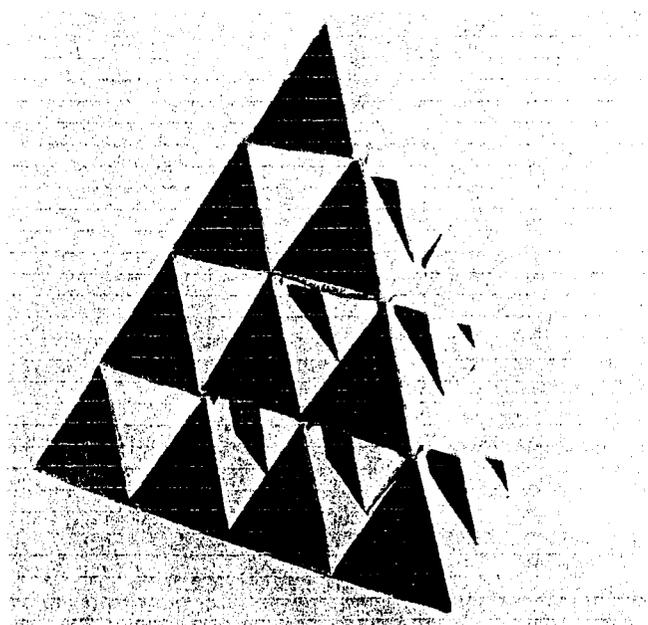


Abbildung 19

Vorstellungsschwierigkeiten bereitete dann die „Konstruktion“ der Auffangkästen. Hier setzten Überlegungen über die Pfade ein. Die Auffangkästen wurden zunächst adressiert in der Form des durchlaufenden Pfades. Jeder Pfad läßt sich als Wort der Länge 4 mit drei Buchstaben kennzeichnen, z.B. bcca (Gewinn von A) oder bbaa (Gewinn von B) oder cbcc (Gewinn von C). Eine solche Adressierung war den Schülern aber bereits bekannt von der Behandlung des Sierpinski-Dreiecks. Nun war es noch ein kleiner Schritt zur Darstellung des Problems am Sierpinski-Dreieck.

Im vorliegenden Beispiel muß man bis zur 4. Iterationsstufe in das Sierpinski-Dreieck „eintauchen“. Als Endadressen dienen die 81 kleinen Dreiecke dieser 4. Stufe. Bei der Iteration bedeutet a oben, b links und c rechts. Alle Adressen mit einem a an der 1. oder 2. Stelle führen zu einem Gewinn von A. Falls vor dem ersten a zwei b auftauchen, liegt eine Gewinnadresse von B vor und nur wenn drei c vor dem ersten a liegen, handelt es sich um eine Gewinnadresse von C.

Diese etwas komplexe Beschreibung läßt sich sehr schön am Sierpinski-Dreieck veranschaulichen, indem man die zu den Gewinnadressen gehörigen Enddreiecke (4. Iterationsstufe) farbig einzeichnet. Thomas Schmidt hat dies in dem oben schon erwähnten Programm (1995) als Zusatz eingebaut, das nächste Bild 20 vermittelt einen Eindruck.

PROBLEM DER ABGEBROCHENEN PARTIE

Spieleranzahl : 3  
 Abbruchstand : 2 - 1 - 0  
 Darstellung : Gesamt

<D> - Daten ändern  
 <S> - Simulation starten  
 <E> - Programm Beenden

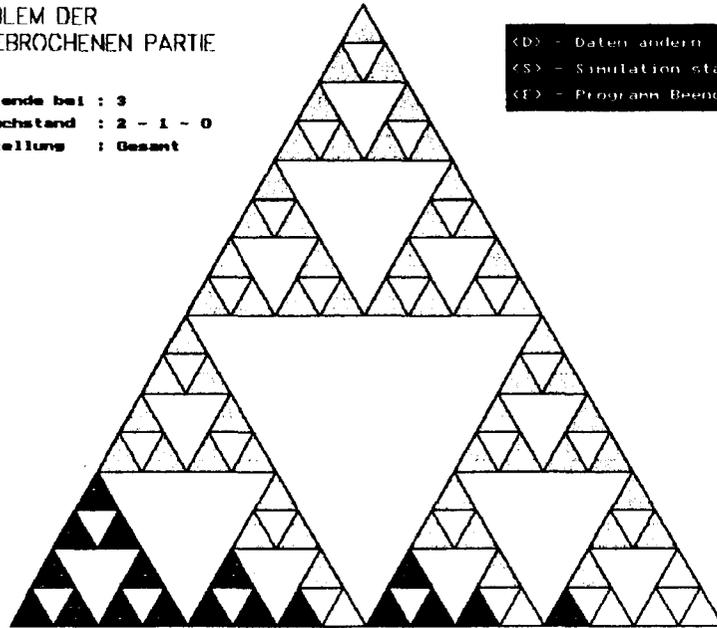


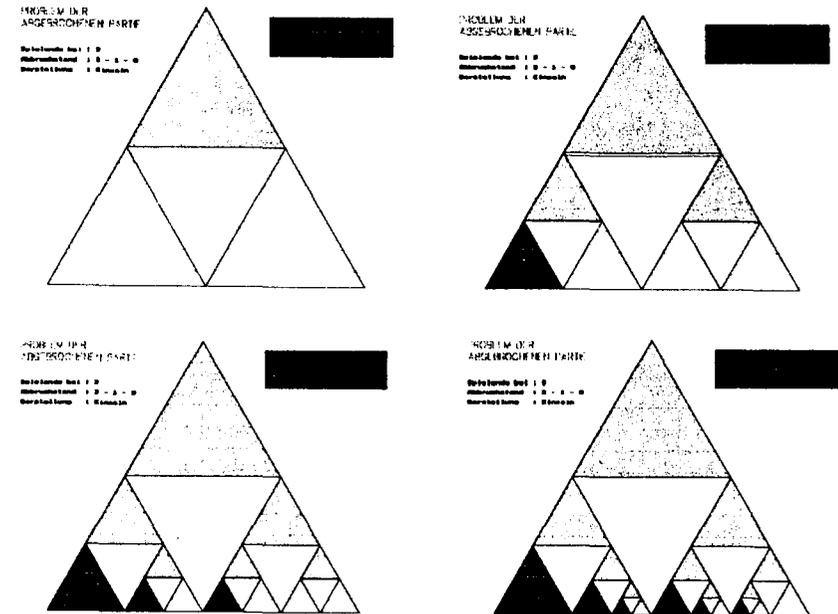
Abbildung 20

Durch Abzählen der Dreiecke in den einzelnen Farben erhält man die Aufteilung a:b:c=57:18:6.

Sehr schön erkennt man hierin die je nach Abbruchstand vorhandenen Symmetrien oder Asymmetrien. Bei den Schülern entwickelte sich hieraus eine spannende Variante von „Kopfgeometrie“, indem sie bestimmt gefärbte Bilder des Sierpinski-Dreiecks über Variation der Parameter g (Gewinnpunktzahl) und des Abbruchstandes a:b:c „erzeugten“. Mit Hilfe des Computerprogramms konnten die Vorhersagen experimentell verifiziert oder falsifiziert werden.

Das Programm ermöglicht noch eine andere Darstellung, die noch mehr die einzelnen Stufen des Prozesses verdeutlicht. Hier werden nicht die Dreiecke der Endstufe (hier 4. Iterationsstufe) eingefärbt, sondern in jeder Iterationsstufe die Dreiecke, die bereits zu einem Gewinn des entsprechenden Spielers führen. So führt zum Beispiel a in der 1. Stufe bereits zum Spielgewinn für den Spieler A, das obere Dreieck der 1. Iterationsstufe wird also

bereits in der Farbe des Spielers A eingefärbt. In der 2. Iterationsstufe führt z.B. bb zum Gewinn für B, das ganz links liegende Dreieck der 2. Iterationsstufe wird also in der Farbe des Spielers B eingefärbt usw. Die folgende Bildsequenz 21abcd vermittelt einen Eindruck dieses Prozesses.



Abbildungen 21a,b,c,d

3.3 Markov-Ketten und daraus abgeleitete Strategien

Die Verallgemeinerungsfähigkeit dieser Strategien zeigt sich nun besonders eindrucksvoll, insbesondere die Berechnung stochastischer Prozesse mit Hilfe von Matrizen.

Die Anwendung aller Strategien wird durch die möglichst übersichtliche graphische Darstellung des Prozesses wesentlich erleichtert und eigentlich erst ermöglicht. Dies ist eine wichtige Erfahrung beim Bearbeiten stochastischer Probleme. Zur Illustration beschränken wir uns hier auf die bereits mehrfach behandelte Verallgemeinerung auf 3 Spieler mit Gewinnpunktzahl 3 und Abbruchstand 2:1:0. Der stochastische Prozess besteht dann aus

insgesamt 9 Zustände  $Z_1, Z_2, \dots, Z_9$ , wobei  $Z_1$  der Startknoten des Prozesses und  $Z_7=A$ ,  $Z_8=B$  und  $Z_9=C$  die absorbierenden Knoten sind.

Ein übersichtlicher Graph ergibt sich im dreidimensionalen Gitter:

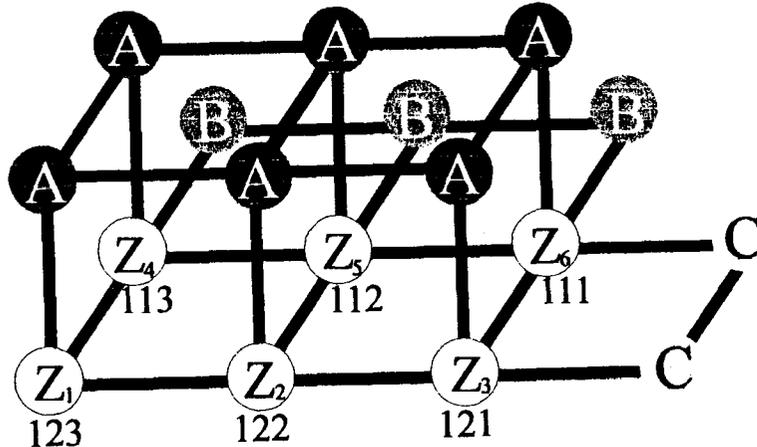


Abb.22

An diesem Graph können wir nun die verschiedenen Strategien orientieren:

### Durchpumpen

Wir pumpen die Masse 81 durch den Graphen. Hierfür benötigen wir 4 Schritte. Die Belegung der Zustände nach den einzelnen Schritten stellen wir in Spaltenvektoren dar:

Zustand	am Anfang	1.Schritt	2.Schritt	3.Schritt	4.Schritt
Z1	81	0	0	0	0
Z2	0	27	0	0	0
Z3	0	0	9	0	0
Z4	0	27	0	0	0
Z5	0	0	18	0	0
Z6	0	0	0	9	0
A	0	27	45	54	57
B	0	0	9	15	18
C	0	0	0	3	6

Tabelle 3

Das Aufteilungsverhältnis entnehmen wir der letzten Spalte:  $a:b:c = 57:18:6$ .

### Mittelwertsregeln

Auch hier gehen wir rekursiv vor: Wir berechnen jeweils die Wahrscheinlichkeiten  $P_A(Z_i)$ , mit denen wir vom Zustand  $Z_i$  den absorbierenden Zustand A erreichen.

Es ist klar, dass diese Wahrscheinlichkeiten 1 für  $Z_7=A$  und jeweils 0 für  $Z_8=B$  und  $Z_9=C$  sind. Dies sind die Vorwärtsnachbarn von  $Z_6$ . Nun gilt nach der Mittelwertsregel

$$P_A(Z_6) = \frac{1}{3} \cdot (1 + 0 + 0) = \frac{1}{3}$$

Damit können wir nun die Wahrscheinlichkeiten

$$P_A(Z_5) = P_A(Z_3) = \frac{1}{3} \cdot (1 + \frac{1}{3} + 0) = \frac{4}{9}$$

berechnen.

Im nächsten Schritt berechnen wir

$$P_A(Z_2) = \frac{1}{3} \cdot (1 + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}) = \frac{17}{27} \text{ und dann } P_A(Z_4) = \frac{1}{3} \cdot (1 + \frac{4}{9} + 0) = \frac{13}{27}$$

und damit schließlich

$$P_A(Z_1) = \frac{1}{3} \cdot (1 + \frac{17}{27} + \frac{13}{27}) = \frac{57}{81}$$

Auf die gleiche Weise können wir  $P_B(Z_1)$  bzw.  $P_C(Z_1)$  berechnen und erhalten damit wieder das gleiche Aufteilungsverhältnis.

### Markovketten

Aus dem Graph gewinnen wir die stochastische (9-9)-Matrix T mit den Übergangswahrscheinlichkeiten:

	123	122	121	113	112	111	A	B	C
	z1	z2	z3	z4	z5	z6	z7	z8	z9
123 z1	0	1/3	0	1/3	0	0	1/3	0	0
122 z2	0	0	1/3	0	1/3	0	1/3	0	0
121 z3	0	0	0	0	0	1/3	1/3	0	1/3
113 z4	0	0	0	0	1/3	0	1/3	1/3	0
112 z5	0	0	0	0	0	1/3	1/3	1/3	1/3
111 z6	0	0	0	0	0	0	1/3	1/3	1/3
A z7	0	0	0	0	0	0	1	0	0
B z8	0	0	0	0	0	0	0	1	0
C z9	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tabelle 4

Mit dem Anfangszustand  $w(0)=(1,0,0,0,0,0,0,0)$  können wir nun den gesuchten Endzustand  $w(4)$  direkt ermitteln durch  $w(4) = w(0) \cdot T^4$

Man erhält so das Ergebnis mit einem Rechenschritt. Ebenso kann man sich die einzelnen Stationen der Rekursion, d.h. die Zustandsfolge  $w(1) \rightarrow w(2) \rightarrow w(3) \rightarrow w(4)$  berechnen lassen. Allerdings sollte man hier auf einen geeigneten Matrizenrechner zurückgreifen können.

Abbildung 23 zeigt eine Berechnung mit Hilfe von DERIVE.

$$w_0 := [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 19 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$w_0 \cdot u = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{5}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{27} & \frac{1}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{27} & \frac{1}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{27} & \frac{2}{9} & \frac{2}{27} \end{bmatrix} \cdot u$$

Abb.23

**Schlußbilanz**

Das Problemfeld der abgebrochenen Partie hat sich als ertragreiche Quelle für stochastische Erfahrungen, für die Entwicklung unterschiedlicher und mächtiger Strategien und vor allem als Experimentierfeld für eigenständige Entdeckungen und Überlegungen erwiesen. Dabei zeigt sich nachdrücklich, welcher Wert der übersichtlichen Veranschaulichung in Graphen und geometrischen Mustern bei der Problemlösung zukommt. Diese werden nicht statisch bereitgestellt, sondern über eigenes Handeln bei Real- und Modellsimulationen prozeßhaft entwickelt. Insbesondere die Verallgemeinerungsmöglichkeiten der an einfachen Beispielen

gewonnenen Strategien motivieren zur Entwicklung von Theorie und zeigen Zusammenhänge auf. Der Computer wird als wertvolles Werkzeug zum Ausführen von Strategien und zur Unterstützung von Erkenntnissen eingesetzt und erlebt.

Selbstverständlich sollten die hier dargestellten Aspekte des Themas weder vom Umfang her noch bzgl. der gewählten Systematik Inhalt einer geschlossenen Unterrichtssequenz sein. Vielmehr können sie in Teilen in den verschiedenen Klassenstufen angesprochen werden und dabei lebendige und anschauliche Zugänge zu stochastischen Ideen vermitteln. (Eine interessante Unterrichtseinheit für Klasse 7/8 ist in Wirths 1997 dargestellt). Nicht zuletzt eignen sich die geschichtlichen Bezüge auch zum Erwerb eines Stückes unserer geistigen Kultur.

Literatur

Zur geschichtlichen Darstellung des Problems

Andelfinger B. (Hrsg.), Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung G, Freiburg 1982  
 Barth/Haller, Stochastik Leistungskurs, München 1983  
 Oeuvres complètes de BLAISE PASCAL, Tome premier, Paris 1889  
 Schneider I. (Hrsg.), Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933, Darmstadt 1988  
 Todhunter I., A history of the mathematical theory of probability, From the time of Pascal to that of Laplace, New York 1965

Zum Modellierungsaspekt

Borovcnik M., Zum Teilungsproblem, in: Journal für Mathematik-Didaktik, Jg 7, Heft 1 1986  
 Schupp H., Zur didaktischen Analyse des Teilungsproblems, in: Journal für Mathematik-Didaktik, Jg 7, Heft 2/3 1986  
 Struve H., Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, in: Mathematik erfahren und lernen, Festschrift für Hans-Joachim Vollrath, Stuttgart 1994  
 Zu den verschiedenen Strategien  
 Engel A., Stochastik, Stuttgart 1987  
 Loeffel H., Glücksspiel und Markov-Ketten - Zum 350. Geburtstag von Blaise Pascal, in Elementarmathematik und Didaktik Jg. 1974

Wirths H., Das abgebrochene Tennis-Endspiel - Erste Erfahrungen in Stochastik, in: *Mathematik in der Schule* 35 Heft 3 1997

Schmidt G., Eigenbau und Simulation von Galton-Brettern, in: *mathematik lehren*, Heft 12, Oktober 1985

### Benutzte Software

DERIVE von Softwarehouse, Inc., Honolulu/Hawaii 1996

TI-92 von Texas Instruments, München 1996

Grabinger/Strauch, ZUFALL-Interaktives Werkzeug für den Stochastik-Unterricht, Dümmler-Verlag Bonn 1995

Schmidt T., Problem der abgebrochenen Partie, Programme zur Simulation und zur Veranschaulichung am Sierpinski-Dreieck, Selbstverlag Bingen 1995

Softwarenachweis für Abbildungen und Tabellen:

Abb. 12 und Abb. 23 <- DERIVE

Tabelle 1 und Abb. 1 <- TI-92 von Texas Instruments

Abb. 2a,b, Abb.13, Abb.20, Abb. 21a,b,c,d <- Schmidt T., 1995

Abb.16, Abb.18 <- Grabinger/Strauch 1995