Ein Harmonietest - Die ersten Stunden in Stochastik

von Helmut Wirths, Oldenburg

Zusammenfassung

Es wird eine Unterrichtseinheit beschrieben, in der der begriffliche Unterschied zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit deutlich gemacht werden soll. In Niedersachsen ist dies Thema in der 7. Klasse. Die Schülerinnen und Schüler benötigen keine stochastischen Vorkenntnisse. Sie sollen mit Bruchzahlen, Dezimalzahlen, evtl. auch bereits mit Prozenten sicher umgehen können. Es wird eine erprobte Unterrichtseinheit vorgestellt, in der Schülerinnen und Schüler in einem lebendigen Lernprozeß Wesentliches untereinander aushandeln können.

1. Eine erste Problemstellung

Die Unterrichtseinheit kann beginnen mit der folgenden **Problemstellung** :

Die Klasse 7b möchte auf dem Budenfest der Schule mit einem Stand vertreten sein. Dort sollen verschiedene Aktivitäten durchgeführt sowie Waffeln und Getränke angeboten werden. Als besondere Attraktion möchte die Klasse einen Test durchführen, in dem mehrere Personen darauf geprüft werden sollen, wie weit sie miteinander harmonieren. Anke, die besonders gut zeichnen kann, soll originelle Urkunden für die Teilnehmer entwerfen.

1.1 Eine Modellierung

Aus der Lerngruppe heraus sollen in der Aufgabenstellung nicht explizit angegebene Probleme formuliert werden. Es könnten u. a. folgende Fragen gestellt werden :
- Wie soll solch ein Test - er soll Harmonietest heißen - durchgeführt werden ? Insbesondere :
  - Wie viele Personen sollen gemeinsam getestet werden ?
  - Wie soll getestet werden ?
- Wie viele Test sind während des Budenfests realistisch ?
- Wie hoch soll die Teilnehmergebühr sein ?
- Soll der Test an einem Stand durchgeführt oder in eine Show mit Publikum eingebaut werden ?
- Wie sollen die Urkunden gestaltet werden ? Welche witzigen Sprüche sollen darauf stehen ?

Noch ganz andere Fragen sind möglich und denkbar. Es lohnt sich, Schülervorschläge zu sammeln und zu diskutieren.

Ziel im folgenden Unterrichtsgespräch ist es, daß die Lernenden untereinander Bedingungen aushandeln, die den Harmonietest klar beschreiben. Am Ende einer solchen Gesprächsrunde wird eine erste Bedingung vereinbart : Es sollen immer 3 Personen gemeinsam getestet werden. Es wird vor allem an Dreier-Freundschaftsgruppen, an Eltern mit einem Kind oder an Vater bzw. Mutter mit zwei Kindern gedacht. Der Test von drei Personen sei gegenüber dem Test von zwei Personen interessanter. Als mögliche Ergebnisse werden „stimmen überein", „zwei Personen stimmen überein" oder „keine Übereinstimmung" als Möglichkeiten genannt. Bei „zwei Personen stimmen überein" könne man außerdem noch unterscheiden zwischen der Übereinstimmung von „Vater und Mutter", „Mutter und Tochter", „Vater und Tochter", „Mutter und Sohn" oder „Mutter und Sohn", wenn z. B. Vater, Mutter und ein Kind sich dem Test unterziehen. Mehr als drei Personen sollen nicht getestet werden. Das ist einhellige Meinung in der Klasse.

Nach intensiver Diskussion, die hier nicht im einzelnen wiedergegeben werden soll, wird in der Klasse eine Einigung über erste Bedingungen zur Durchführung des Harmonietests erzielt:
- Es werden immer drei Personen getestet.
- Jeder Dreiergruppe wird ein Bild, ein Spruch, ein Geräusch oder ein Ausschnitt aus einem Musikstück vorgestellt.
- Alle drei Testpersonen sollen spontan ihre Gefühle, Gedanken oder Erwartungen ausdrücken. Dies soll möglichst lustig geschehen, vor allem aber sollen keine Absprachen möglich sein.
- Jeder Teilnehmer zahlt einen Kostenbeitrag.
- Jede Dreiergruppe soll eine Urkunde erhalten, in der möglichst witzig der Grad an Übereinstimmung dargestellt wird.

Am Ende dieser ersten Gesprächsrunde bleiben noch folgende Probleme, über die weiter nachgedacht werden muß:
- Wie kann garantiert werden, daß keine Absprachen vorkommen ?
- Wie kann man zweifelsfrei feststellen, ob eine Übereinstimmung in den Antworten besteht ?
- Welche Bilder, Sprüche, Zitate, Geräusche oder Ausschnitte aus Musikstücken sollen vorgeführt werden ?
- Welche lustigen Fragen kann man stellen, auf die die Testpersonen originelle Antworten geben können ?
- Wie viele verschiedene Sorten an Urkunden soll es geben ?
- Wie viele Urkunden von jeder Sorte sollen vorbereitet werden ?

Die von den Schülerinnen und Schülern erhobene Forderung, daß keine Absprachen vorkommen sollen, wird intensiv diskutiert, scheint aber zunächst ein großes Hindernis darzustellen. Erst als die Lernenden den Zufall ins Spiel bringen, ändert sich die Situation: Nicht die Testpersonen sollen ihre Antworten spontan selber formulieren, sondern sie sollen Antworten geben, die die Schülerinnen und Schüler vorher ausgesucht haben. Diese auf die Fragen abgestimmten Antworten werden auf Zetteln notiert, auf jedem Zettel eine Antwort. Die Zettel werden in ein Gefäß gelegt und dort gut gemischt. Damit auch übereinstimmende Antworten möglich sind, soll jeder der drei Personen eine eigene Urne vorgesetzt werden, aus der jede einen Zettel zieht. Gerade im Einbeziehen des Zufalls sehen die Lernenden eine Belebung für ihre Form des Harmonietests und belegen dies mit Beispielen aus ihrer Spielpraxis. Die Lernenden reden im Zusammenhang mit dem Ziehen aus der Urne in ihrer Sprache über den Zufall. Die von den Schülerinnen und Schülern erhobene Forderung, daß keine Absprachen vorkommen sollen, stellt eine gute Veranschaulichung des abstrakten Begriffs der stochastischen Unabhängigkeit dar. Die Lehrkraft läßt die Begriffe „Zufallsexperiment", „Ergebnis eines Zufallsexperiments" und eine Formulierung wie z. B. „Die drei Personen sollen unabhängig voneinander antworten." einfließen, die Lernenden übernehmen diese Begriffe und die Redeweise langsam.

Mit dieser Form des Harmonietests sind schließlich alle zufrieden. Nun kann eindeutig und zweifelsfrei entschieden werden, ob die Antworten übereinstimmen. „Wir können vorher bestimmen, ob die Antworten lustig sind", meinen die Schülerinnen und Schüler. Einer Suche nach geeigneten Bildern, Sprüchen, Redensarten, mathematischen Formeln, Geräuschen oder Ausschnitten aus Musikstücken, der Auswahl lustiger Fragen dazu und

dem Entwickeln von originellen Antworten steht nun nichts mehr im Weg, um danach den Harmonietest auch tatsächlich in der Praxis durchführen zu können.

Auch Anke kann sich an die Entwicklung von Urkunden machen, die soweit vorbereitet werden sollen, daß nur noch die Namen der drei Teilnehmer eingesetzt werden müssen. Auf folgende weitere Bedingungen einigt sich die Klasse:
- Es soll drei Typen von Urkunden geben : Einen ersten Typ für absolut keine Übereinstimmung, einen zweiten Typ für Übereinstimmung von 2 Personen sowie einen dritten Typ für vollständige Harmonie in der Dreiergruppe.
- Jeder Dreiergruppe soll nur eine einzige Frage vorgelegt werden.
- Für jede Person steht eine Urne bereit.
- In der Urne liegen 6 Zettel. Auf jedem Zettel steht eine einzige Antwort.
- Jede der drei Personen zieht einen einzigen Zettel aus ihrer Urne.

Aber es gibt noch ein ganz wichtiges Problem, das gelöst werden muß. Wie viele Urkunden von jeder der drei Sorten sollen hergestellt werden ? Wenn 60 Harmonietest durchgeführt werden sollen - das war eine erste vorsichtige Schätzung der Lerngruppe -, dann müssen insgesamt 60 Urkunden vorhanden sein. Man könnte für jeden Typ 60 Urkunden drucken, insgesamt also 180 Stück. Aber dann sind 120 Urkunden überflüssig. Leider kennen wir jedoch nicht die Verteilung der erforderlichen Anzahlen auf die drei Typen. Um dies zu klären, werden folgende Arbeitsaufträge in das Unterrichtsgespräch eingebaut:

1.2 Die Schülerinnen und Schüler sollen vorhersagen, wie viele Urkunden von jeder der drei Sorten hergestellt werden müssen.

Falls sie bereits sicher mit Prozenten umgehen können, sollen sie ihre Erwartungen auch in Prozenten ausdrücken. Statt Erwartung oder Vermutung wird der Begriff „Hypothese" langsam in das Unterrichtsgespräch eingeführt. In meinem Stochastikunterricht soll von Anfang an mit Hypothesen gearbeitet werden, so daß der Bogen zum späteren Testen von Hypothesen bereits in den ersten Stunden aufgebaut wird. Die aus der Lerngruppe heraus formulierten Hypothesen können sich sehr stark voneinander unterscheiden. Die hieraus erwachsende Spannung führt zur folgenden Frage:

1.3 Können wir die Hypothesen überprüfen ?

Nun muß das Ziehen von jeweils einem Zettel aus jeder der drei Urnen durchgeführt werden. Die Lerngruppe erwartet dies schon längst. Jeder erhält den Arbeitsauftrag das Ziehen der Antwortzettel aus drei Urnen, die immer mit 6 Zetteln gefüllt sind, durchzuführen, und diesen Teil des Harmonietests 25 mal zu wiederholen. Insgesamt müssen also 75 Ziehungen durchgeführt werden, von denen jeweils 3 aufeinander folgende die drei Antworten eines Harmonietests darstellen. In einer **Urliste** werden alle Ergebnisse eingetragen. Ein Beispiel für solch eine Urliste, in der jedoch nur 3 Zeilen eingetragen sind, ist:

Harmonietest Nummer	Antworten (Ergebnisse)
1	1 6 4
2	2 3 2
...	...
25	3 5 1

In dieser Urliste ist bereits eine Besonderheit enthalten. Eine Schülerin hat die 6 Zettel numeriert und anstelle der vollständigen Antworten nur die Nummer des gezogenen Zettels notiert. Sie wolle damit Zeit und auch Platz sparen. Dieser Impuls wird von der Klasse aufgegriffen. Dann könne man auf Urne und Zettel verzichten und die Nummer der ausgelosten Antwort direkt mit einem Würfel ermitteln, und dadurch noch mehr Zeit einsparen und schneller zu Ergebnissen kommen. Diese Idee wird für weitere Simulationen sofort ausgenutzt. Sie soll auch bei der zum Abschluß geplanten Computersimulation wieder aufgegriffen werden.

Folgende **Simulation** für das Ziehen der Antworten aus drei Urnen wurde vereinbart : Es wird mit einem Würfel dreimal gewürfelt. Aus dem Ergebnis des Experiments „dreimal würfeln" lesen wir ab, welche Zettel gezogen worden sind und ermitteln dann, wieviele verschiedene Antworten es tatsächlich sind. Beispiele :

- Die Wurfergebnisse 1, 6, 4 interpretieren wir wie folgt : Die Zettel mit den Nummern 1, 6 und 4 sind gezogen. Es werden also 3 verschiedene Antworten gegeben. Es liegt gar keine Übereinstimmung vor.
- Die Wurfergebnisse 2, 3, 2 verstehen wir so : Die Zettel mit den Nummern 2, 3 und 2, insgesamt also 2 verschiedene Zettel, sind gezogen. Zwei Personen harmonieren miteinander.
- Die Wurfergebnisse 5, 5, 5 bedeuten für uns : Der Zettel mit der Nummer 5 wird dreimal gezogen, in diesem Fall liegt also totale Übereinstimmung vor.

Es lohnt sich, die Schülerinnen und Schüler zunächst einmal Urnen mit 6 Antwortzetteln herstellen und die Ziehung ganz konkret durchführen zu lassen. Sie sollen die Möglichkeit haben, selber die Vereinfachung durch die Simulation mit einem Würfel zu entdecken.

Aus der Urliste erstellen wir eine **Strichliste**. Ein Schüler erhält dabei eine Strichliste, mit der wir in der folgenden Darstellung weiter arbeiten wollen. In dieser Strichliste kommt eine Besonderheit vor, die für die weitere Arbeit wesentlich ist :

Anzahl der Antworten	1	2	3
absolute Häufigkeit		HHH HHH IIII	HHH HHH I

Aus der obigen Strichliste erhalten wir schließlich folgende Tabelle :

Anzahl der Antworten	1	2	3
absolute Häufigkeit	0	14	11

Es kommt nicht selten vor, daß einzelne Schülerinnen oder Schüler mehr als 25 Simulationen durchführen. Diese Situation sollte man ausnutzen, um den Begriff „relative Häufigkeit" einzuführen, um also Ergebnisse von Versuchen mit unterschiedlichen Anzahlen an Versuchen miteinander vergleichbar zu machen.

Jeder berechnet die relativen Häufigkeiten seiner Simulation. Für die Ergebnisse der letzten Tabelle erhalten wir :

Anzahl der Antworten	1	2	3
relative Häufigkeit	0	0,56	0,44

1.4 Wir wollen die einzelnen Ergebnisse in der ganzen Klasse vorhersagen.

Wir stellen fest, daß die Tabellen in der Klasse große Unterschiede aufweisen. Wenn Anke z. B. 60 Urkunden bereitstellen soll, kann jeder 60 neue Simulationen machen. Daraus können wir experimentell je eine voraussichtliche Mindest- und eine Höchstzahl für die Anzahl der Urkunden der drei Typen schätzen. Auch wenn wir uns immer an der Höchstzahl orientieren, und Anke folglich mehr als 60 Urkunden anfertigen muß, ist damit bereits eine erhebliche Verbesserung gegenüber der ersten ganz groben Schätzung mit 180 Urkunden verbunden.

Eigentlich könnte an dieser Stelle Schluß sein. Wir schätzen großzügig die Anzahl der Urkunden für die drei Sorten nach oben hin ab. Damit ist das letzte Problem gelöst, das einer praktischen Vorbereitung und Durchführung des Harmonietests noch im Weg steht. Aber einzelne Schülerinnen und Schüler äußern nun eine neue Idee. Nach und nach schwenkt der Rest der Klasse auf diese Linie ein. Bisher sind einzelne Ergebnisse und ihre Unterschiede diskutiert worden. Nun vermuten die Schülerinnen und Schüler, daß ihre Ergebnisse um ganz bestimmte Zahlen, die ihnen allerdings noch verborgen sind, herum schwanken. Sie wollen versuchen, diese Zahlen näher zu bestimmen. Sie reden von der Chance, daß die drei Personen die gleiche Antwort bekommen. Damit haben sie eine gute anschauliche Vorstellung vom abstrakten mathematischen Begriff der „Wahrscheinlichkeit" und argumentieren bereits voll im stochastischen Spannungsfeld : Einerseits versuchen wir Vorhersagen zu machen und stellen dazu Modelle auf, andererseits müssen wir damit rechnen, daß die realen Ergebnisse um die Modell-Vorhersagen schwanken.

Aber welches ist die bestmögliche Vorhersage für die Anzahl der Urkunden, die Anke herstellen soll ? Wenn wir die bisher gewonnene Erfahrung für Vorhersagen benutzen wollen, dann orientieren wir uns an der Tabelle mit den relativen Häufigkeiten und stellen ein **Wahrscheinlichkeitsmodell** auf. Der Schüler, dessen Resultate wir hier verfolgen, hat das Ergebnis „1 Antwort" nicht in seiner Simulation erhalten. Er stuft es als möglich, aber selten ein („Erhält man vielleicht einmal bei 100 Versuchen"). Eine typische Formulierung der Bruchrechnung, aus der sich langsam die Formulierung „Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{1}{100}$ bzw. 0,01" ausschärft. Das Wahrscheinlichkeitsmodell dieses Schülers sieht so aus :

Anzahl der Antworten	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	0,01	0,55	0,44

Die Schülerinnen und Schüler sind in der Regel nicht bereit, die relativen Häufigkeiten exakt zu übernehmen, sondern geben oft benachbarte, einfachere Dezimalzahlen an.

Der Klasse ist anschaulich klar, daß wir sehr viel Erfahrung haben müssen, um einigermaßen verläßliche Vorhersagen zu machen. 25 oder 60 Simulationen erscheinen ihnen viel zu wenig. Daher einigen wir uns darauf, zunächst einmal alle Simulationsergebnisse der Klasse zusammenzufassen, insgesamt 600 Simulationen. Wir wollen feststellen, ob unser Wahrscheinlichkeitsmodell für Vorhersagen geeignet ist, und schätzen, welche absoluten Häufigkeiten wir nach 600 Simulationen erwarten müssen. Nach dem obigen Wahrscheinlichkeitsmodell muß dieser Schüler für die einzelnen Ergebnisse nach z. B. 600 Harmonietests die folgenden absoluten Häufigkeiten erwarten :

Anzahl der Antworten	1	2	3
absolute Häufigkeit	6	330	264

Wir könnten 600 neue Harmonietests simulieren. Wir fassen aber die Ergebnisse aller Experimente der Klasse zusammen und erhalten z. B. :

Anzahl der Antworten	1	2	3
absolute Häufigkeit	18	258	324
relative Häufigkeit	0,03	0,43	0,54

1.5 Wir nutzen unseren Zuwachs an Erfahrung.

Schülerinnen und Schüler akzeptieren Abweichungen von ihren Vorhersagen in gewissen Grenzen. Aber überall dort, wo wir bis auf uns tragbar erscheinende Abweichungen die Ergebnisse gut vorhergesagt haben, brauchen wir das Wahrscheinlichkeitsmodell nicht zu verändern. Im vorgestellten Fall erscheinen uns bei allen Ergebnissen die Abweichungen zu groß. Wir schätzen daher neue Wahrscheinlichkeiten, wobei das neue Wahrscheinlichkeitsmodell z. B. so aussehen kann :

Anzahl der Antworten	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	0,03	0,43	0,54

1.6 Was lernen wir aus Zwischenergebnissen ?

Ich habe vier typische Wahrscheinlichkeitsmodelle der Lernenden nach je 25 Versuchen ausgewählt :

Anzahl der Antworten	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	0,03	0,48	0,49
Wahrscheinlichkeit	0,04	0,39	0,57
Wahrscheinlichkeit	0,01	0,55	0,44
Wahrscheinlichkeit	0,04	0,48	0,48

Man faßt die Ergebnisse von jeweils 6 Lernenden zusammen, läßt auf der Basis von jeweils 150 Experimenten neue Wahrscheinlichkeitsmodelle erstellen und erhält z. B. :

Anzahl der Antworten	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	0,03	0,50	0,47
Wahrscheinlichkeit	0,03	0,35	0,62
Wahrscheinlichkeit	0,04	0,39	0,57
Wahrscheinlichkeit	0,03	0,48	0,49

Vergleicht man diese neuen Schätzungen mit denen der einzelnen Schüler, dann ist deutlich zu sehen, daß sich die unterschiedlichen Hypothesen angenähert haben. Die Schwankungsbreite zwischen den Hypothesen ist geringer geworden.

1.7 Wollen wir Mittelwerte bilden ?

Es soll nun eine andere Möglichkeit, Zwischenergebnisse auszuwerten, vorgeführt werden. Aufgrund ihrer Erfahrung mit jeweils 25 Versuchen haben 12 Schülergruppen folgende Wahrscheinlichkeitsmodelle gebildet :

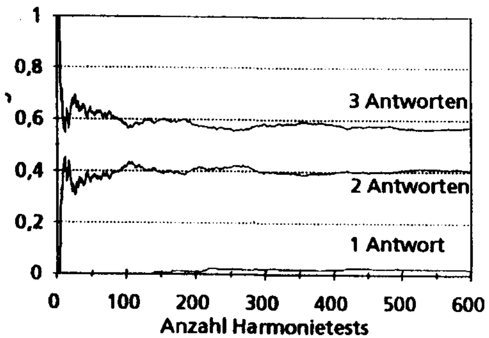
Anzahl der Antworten	1	2	3
Gruppe 1 : Wahrscheinlichkeit	0,01	0,32	0,58
Gruppe 2 : Wahrscheinlichkeit	0,00	0,52	0,48
Gruppe 3 : Wahrscheinlichkeit	0,10	0,32	0,58
Gruppe 4 : Wahrscheinlichkeit	0,02	0,48	0,50
Gruppe 5 : Wahrscheinlichkeit	0,08	0,44	0,48
Gruppe 6 : Wahrscheinlichkeit	0,02	0,43	0,55
Gruppe 7 : Wahrscheinlichkeit	0,04	0,36	0,60
Gruppe 8 : Wahrscheinlichkeit	0,06	0,47	0,47
Gruppe 9 : Wahrscheinlichkeit	0,04	0,40	0,56
Gruppe 10 : Wahrscheinlichkeit	0,04	0,36	0,60
Gruppe 11 : Wahrscheinlichkeit	0,04	0,56	0,40
Gruppe 12 : Wahrscheinlichkeit	0,04	0,44	0,52
Mittelwerte	$\approx$ 0,05	$\approx$ 0,42	$\approx$ 0,53

In dieser Tabelle ist viel Material für Diskussionen innerhalb der Lerngruppe enthalten :
- Sollen wir die Mittelwerte wie in der Tabelle dargestellt von den geschätzen Wahrscheinlichkeiten oder von den experimentell ermittelten relativen Häufigkeiten bilden ? Werden die mit den Mittelwerten berechneten Prognosen besser als die Prognosen auf der Basis der aus 25 Versuchen geschätzten Wahrscheinlichkeiten ?
- Unstrittig ist, daß das Ergebnis „1 Antwort" eintreten wird, jedoch sehr selten. Wie häufig oder wie selten, das muß noch zwischen den einzelnen Schülergruppen ausgehandelt werden.
- Die Diskussion über den Vorschlag von Gruppe 2 mit 0 % für „1 Antwort" muß unbedingt erfolgen. Diese Gruppe sagt voraus, daß das Ergebnis „1 Antwort" nie eintreten

wird. Wenn Wahrscheinlichkeiten zur Prognose taugen sollen, muß diese Schätzung auf jeden Fall geändert werden.

- Strittig wird aber in der Lerngruppe bleiben, ob das Ergebnis „2 Antworten" oder das Ergebnis „3 Antworten" häufiger eintreten wird. Ich habe die merkwürdige Beobachtung gemacht, daß trotz des Hinweises aus der Mittelwertbildung zugunsten von „3 Antworten ist am häufigsten zu erwarten" sich die Waage häufig erst endgültig zugunsten dieser Hypothese neigt, wenn die in 1.6 beschriebene Methode durchgeführt wird und neue Versuche gemacht oder alle bisherigen Ergebnisse zusammengefaßt werden. Die Ergebnisse von konkreten Versuchen überzeugen häufig eher als Diskussionen mit Hilfe von (für diese Altersstufe noch sehr theoretischen) Mittelwerten.
- Wenn die aus 25 Versuchen errechneten relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten übernommen werden, muß die aus den beiden Nachkommaziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar sein. In allen anderen Fällen sollten die Arbeitsgruppen erklären, was sie sich bei ihrer Schätzung gedacht haben, und warum sie eine andere Wahrscheinlichkeit schätzen als die errechnete relative Häufigkeit. Als ein solches Beispiel sei die Schätzung von Gruppe 4 mit 0,02 genannt. Auch hier bietet sich eine fruchtbare Gelegenheit auszuloten, wieviel stochastisches Denken in der Lerngruppe bereits angelegt ist, und was im Unterricht noch verstärkt werden muß.

1.8 Eine Computersimulation



Die Abbildung zeigt eine Computersimulation für 600 Harmonietests. Auf der x-Achse wird die Anzahl der Harmonietests, auf der y-Achse werden die relativen Häufigkeiten der 3 Ergebnisse (1 Antwort, 2 bzw. 3 Antworten) aufgetragen. Läßt man den Computer nacheinander einige Graphen erstellen, dann sind zwei Beobachtungen bemerkenswert : Zum einen ähnelt im Bereich der ersten 100 bis 200 Versuche kein Graph dem anderen, zum anderen scheinen sich die relativen Häufigkeiten bei größer werdender Zahl an Simulationen immer mehr Werten zu nähern, die für alle Simulationen gleich bleiben. Dies sind die drei gesuchten Wahrscheinlichkeiten. Mit ihnen können wir die bestmögliche Prognose für die Anzahl der anzufertigenden Urkunden erstellen. Bei einer konkreten Durchführung des Harmonietests müssen wir jedoch berücksichtigen, daß die realisierten Anzahlen in der Nähe dieser Prognosewerte liegen werden.

2. Methodisch-didaktische Bemerkungen

Ich habe einen möglichst umfangreichen Überblick über die in diesem Beispiel enthaltenen Möglichkeiten dargestellt. Im realen Unterricht muß in der Regel eine Auswahl getroffen werden. Zwei Kürzungsmöglichkeiten sehe ich vor allem : Ich kann auf 1.6 und 1.7 oder aber auf 1.5 und 1.6 verzichten. Die Computersimulation sollte zum Abschluß aber in jedem Fall durchgeführt werden.

Die Simulation von Zufallsprozessen ist für Schülerinnen und Schüler interessant. Die Begriffe „absolute Häufigkeit" und „relative Häufigkeit" sind leicht zu motivieren und zu benutzen. Für den Lehrenden stellt sich in einer Unterrichtseinheit zum Zusammenhang und Zusammenspiel von relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit als zentrale Frage : „Wie mache ich der Lerngruppe klar, daß ich außer dem Begriff der relativen Häufigkeit einen weiteren Begriff, nämlich den der Wahrscheinlichkeit, unbedingt benötige ?" Den Begriff einfach nur vorzugeben, dürfte sich verbieten. Also muß das den Schülern zugängliche Material so gestaltet sein, daß sie die Notwendigkeit selber erkennen können und den neuen Begriff zunächst einmal mit ihren eigenen Worten umschreiben. Beim hier gewählten Beispiel erhalten viele Schüler - zum Glück aber nicht alle ! - nach 20 bis 25 Simulationen keinmal das Ergebnis „Die drei Personen harmonieren vollkommen, sie haben alle die gleiche Antwort gegeben". Es ist für alle offensichtlich, daß es so etwas wie eine Chance gibt, dieses Ergebnis zu erzielen. Diese Chance ist zwar sehr klein, aber eben nicht 0. Daher werden die Schüler nicht die relative Häufigkeit 0 für dieses Ergebnis als Chance schätzen, sondern vielleicht zunächst z. B. 0,01. Damit haben die Schüler selber entdeckt, daß ein neuer Begriff eingeführt werden muß, den wir als Chance verstehen wollen und Wahrscheinlichkeit nennen werden.

Wer in seinem Unterricht mit der hier vorgestellten Methode arbeiten möchte, aber aus welchen Gründen auch immer das hier vorgestellte Beispiel nicht einsetzen kann, dem

- bieten sich Versuche mit gezinkten Würfeln, Riemer-Würfel, gezinkten Münzen oder mit als Würfeln benutzten Legosteinen an. Unterrichtsbeispiele kann man nach dem hier vorgestellten Beispiel selber zusammenstellen oder man orientiert sich bei Riemer (1985), Riemer (1988) oder Riemer (1991).
- Eine Aufgabe aus den Anfängen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist immer noch attraktiv in der alten Form als Problem der abgebrochenen Partien, aber auch in neuer Einkleidung : In einem Tennisturnier muß das Endspiel beim Stand von 2:0 abgebrochen werden. Zum Turniersieg sind aber drei Gewinnsätze erforderlich. Nach dem Abbruch soll die Gewinnprämie gerecht auf beide Teilnehmer des Endspiels verteilt werden. Man denke sich den weiteren Turnierverlauf simuliert. Eine Unterrichtseinheit hierzu wird in Wirths (1997a) vorgestellt, eine mögliche Fortsetzung im Zusammenhang mit Baumdiagrammen und Pfadregeln findet man in Wirths (1997b).
- Man kann auch mit anderen attraktiven Einkleidungen für mehrstufige Zufallsversuche arbeiten. Ein Beispiel findet man z. B. bei Wirths (1993).
- Schließlich kann solch ein Harmonietest auch anders als hier modelliert werden.

Wer sich ernsthaft für andere Möglichkeiten interessiert, dem sei die Auseinandersetzung mit der erwähnten Literatur empfohlen. Ich würde mich sehr freuen, wenn diese Beispiele Lehrende in die Lage versetzen, eigenständig Lernprozesse zu gestalten, diese mit den Lernenden kreativ auszuformen, so daß alle lebendigen Unterricht erleben.

Für die Planung des Unterrichts ist es wichtig, auch Risiken zu kennen. Meine Klasse hat sich auf das Testen von drei Personen festgelegt. Sie hat mir dadurch, wenn auch unbewußt, die Arbeit erleichtert. Ich konnte mit dem dreimaligen Würfeln in einem für meine Intentionen günstigen didaktischen Modell arbeiten; denn beim Test von 2 Personen können die Chancen für die beiden Möglichkeiten ganz einfach abgeschätzt werden. Falls dies der Lerngruppe gelingt, dann benötigen wir den ganzen Aufwand von Ausdenken einer Simulation, Durchführen von Experimenten bis hin zur Computersimulation überhaupt nicht. Wenn jede der beiden Personen wie in diesem Beitrag beschrieben aus 6 Antworten zu wählen hat, dann gilt P(„beide Personen harmonieren") = $\frac{1}{6}$ und P(„beide

Personen harmonieren nicht") = $\frac{5}{6}$. Das können Lernende auch ohne Vorwissen in Stochastik erkennen und mit eigenen Worten anschaulich begründen. Wenn die Wahrscheinlichkeiten aber schon klar sind, dann ist es überhaupt nicht mehr spannend, an diesem Beispiel den Zusammenhang und das Zusammenspiel von relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit klären zu wollen. Wenn sich eine Lerngruppe aber dafür entscheidet, Paare zu testen, sollte man eine andere Modellierung für den Harmonietest wählen. Man könnte dann den beiden Personen z. B. 3 Fragen vorlegen und erhält entsprechend der Anzahl übereinstimmender Antworten (also 0, 1, 2 oder 3) vier verschieden zu benennende Stufen an Harmonie bzw. Disharmonie. Bei dem von mir vorgestellten Beispiel mit drei Möglichkeiten habe ich eine solch schnelle Vorhersage noch nicht beobachten können, es scheint für 7. Klassen in der Regel genügend komplex zu sein. Aber ich muß immer damit rechnen, daß Lernende meine Konzeption stören, denn sie könnten auch hier durchaus erkennen, daß P(„die drei Personen harmonieren") = $\frac{1}{36}$ sowie P(„die drei Personen harmonieren überhaupt nicht") = $\frac{20}{36}$ beträgt, um daraus P(„zwei der drei Personen stimmen in ihrer Antwort überein") = $\frac{15}{36}$ zu erschließen. Man sollte seine Lerngruppe schon genauer kennen, wenn man mit ihr eine Modellierung aushandelt. Das soeben beschriebene Risiko besteht bei allen Aufgaben, bei denen mit Hilfe des Baumdiagramms und der Pfadregeln Wahrscheinlichkeiten berechnet werden können. Auf der anderen Seite bieten viele dieser klassischen Aufgaben ebenfalls lohnende Einstiege mit der hier beschriebenen Methode.

Damit klar wird, daß die hier vorgestellte Konzeption auch mit unseren anschaulichen Vorstellungen übereinstimmt, muß das „Stabilwerden der relativen Häufigkeiten bei wachsender Anzahl an Versuchen" deutlich gemacht werden. Eine Computersimulation bietet hier gute Anschauung. In Ruprecht/Schupp (1994) wird eine Computersimulation des Zufallsversuchs „3 Kinder werfen auf 6 Dosen" aus Wirths (1993) nachvollziehbar beschrieben. Nach der Lektüre sollte das zugehörige Rechenblatt leicht erstellt werden können. Nach diesem Vorbild können auch andere Simulationen mühelos programmiert werden, auch mit anderen Tabellenkalkulationsprogrammen. Die am Ende von Abschnitt 1.8 abgedruckte graphische Darstellung wurde mit Quattro Pro erzeugt. Wichtige Gründe für den Einsatz eines Rechenblattes sind für mich :

- Ich brauche nur den mathematischen Kern in den einzelnen Zellen zu programmieren. Die Simulation, deren Auswertung im Rechenblatt und vor allem die graphische Darstellung kann dem Rechner überlassen werden.
- In jeder Zeile werden neben den drei Simulationsergebnissen, die Auswertung (1, 2, 3 verschiedene Antworten), die absoluten Anzahlen und die relativen Häufigkeiten für jedes der drei Ergebnisse sowie die Anzahl der bereits durchgeführten Simulationen vom Computer automatisch angegeben.
- Die Programmierung dieser Informationen in den einzelnen Zellen kann von den Schülerinnen und Schülern auch einer 7. Klasse leicht verfolgt und verstanden werden. In höheren Klassenstufen kann solch eine Programmierung auch von Lernenden selbst durchgeführt werden.
- Die erste Zeile des Rechenblatts kann so oft in die folgenden Zeilen kopiert werden, wie Simulationen benötigt werden. Wenn 600 Simulationen aus dem Beispiel in 1.6 nicht ausreichen, dann lassen sich problemlos weitere Zeilen anfügen, in die Auswertung und in die graphische Darstellung einbeziehen.

- Es kann zwischen der Graphik und dem Rechenblatt problemlos umgeschaltet werden, so daß der Zusammenhang zwischen der graphischen Darstellung und der Darstellung im Rechenblatt verfolgt werden kann.
- Lernende können per Knopfdruck in Sekundenschnelle eine neue Simulation mit der zugehörigen Graphik erzeugen.
- Alle relevanten Informationen werden im Rechenblatt offengelegt, die Lernenden müssen nichts unverstanden hinnehmen. Sie können sich ganz auf die Formulierung und die Interpretation ihrer Beobachtungen konzentrieren.

Eine zusätzliche Untermauerung für das Stabilwerden der relativen Häufigkeiten kann die in Abschnitt 1.6 beschriebene Beobachtung liefern : Vergleicht man die relativen Häufigkeiten nach 25 Versuchen mit denen nach 150 Versuchen und danach mit denen nach 600 Versuchen, sieht man, daß die Unterschiede zwischen den (beobachteten) relativen Häufigkeiten mit wachsender Zahl an Versuchen geringer werden, damit folgerichtig auch die zwischen den (geschätzten) Wahrscheinlichkeiten.

Am Ende einer Unterrichtsreihe, in die dieser Harmonietest eingebettet ist, sollten die Schülerinnen und Schüler ein gewisses erstes Fingerspitzengefühl in der Auswahl und im Begründen von Hypothesen gewonnen haben, den Zusammenhang zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit erlebt haben, aber auch z. B. zu folgenden Problemen sinnvoll Stellung nehmen können :

1. Beim Mensch-Ärger-Dich-nicht Spiel fiel dreimal hintereinander eine „6". Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim nächsten Wurf wieder eine „6" kommt ?
2. G. E. Lessing schrieb am 15.12.1770 an Madame König, daß er bei der Hamburger Lotterie auf Los Nummer 19 gewonnen habe und wieder Lose genommen habe, „nur nicht Nummer 19, wofür ich 7 gewählt habe : denn 19 wird doch nicht des Henkers sein und sich wieder ziehen lassen".
3. In einem großen Krankenhaus werden täglich im Mittel 60 Kinder geboren, in einem kleinen 10. In beiden Hospitälern wird die Zahl derjenigen Tage registriert, in denen mehr als 60 % der Kinder Jungen waren. Ist diese Zahl im großen Krankenhaus größer als, kleiner als oder genau so groß wie im kleinen ?

Grundlegend sind in dieser Unterrichtseinheit die beiden Begriffe „relative Häufigkeit" und „Wahrscheinlichkeit" :

Die „relative Häufigkeit eines Ergebnisses r" wird beim Auswerten von Experimenten benutzt : $r = \frac{\text{absolute Häufigkeit des Ergebnisses}}{\text{Gesamtzahl aller Experimente}}$.

Die „Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses p" ist ein Modellbegriff und wird zum Vorhersagen der Häufigkeiten von Ergebnissen benutzt :
erwartete absolute Häufigkeit des Ergebnisses = p · Gesamtzahl aller Versuche

Die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse z. B. für Laplace-Würfel, Laplace-Münze, bei Ziehungen aus einer Urne oder bei Drehung eines Glücksrades können sofort angegeben werden. Dies darf im Unterricht nicht „zerredet" werden. Interessant ist die Unterscheidung, die Schülerinnen und Schüler machen zwischen Wahrscheinlichkeiten, die wir exakt angeben können z. B. von Geräten mit Laplace-Eigenschaft, und den Wahrscheinlichkeiten, die wir nur näherungsweise bestimmen können wie z. B. bei gezinkten (Riemer-)Würfeln, gezinkten Münzen oder Legosteinen. Der Umgang mit Brüchen und Dezimalzahlen kann wiederholt und geübt werden. Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung werden von Anfang an gemeinsam aufgebaut. Mit Hypothesen, der Fachbegriff sollte langsam in den Unterricht eingebracht werden, wird bei mir von der ersten Stunde an gearbeitet.

Nach den niedersächsischen Rahmenrichtlinien geht es in Klasse 7 vor allem um den Zusammenhang und das Zusammenspiel zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit, d. h. um den Regelkreis von Modellbildung und der Überprüfung der im Modell gültigen Hypothesen mit Hilfe realer Experimente. Dieser früher mehr stiefmütterlich behandelte Problemkreis ist es wert, daß man ihm eine Unterrichtseinheit von ca. 10-15 Stunden widmet. In diesem Beitrag werden Ideen für eine mögliche Realisierung in Klasse 7 vorgestellt. In Klasse 8 wird der Stochastikunterricht in Niedersachsen mit der Behandlung von mehrstufigen Zufallsexperimenten, deren Darstellung in Baumdiagrammen sowie der Berechnung von Ereigniswahrscheinlichkeiten mit Hilfe der beiden Pfadregeln fortgesetzt. In dieser Klassenstufe können dann die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse des diesem Beitrag zugrunde liegenden dreifachen Würfelwurfs theoretisch ermittelt und so die hier erarbeiteten Wahrscheinlichkeitsmodelle optimiert werden. Wichtig ist, daß die Lernenden erfahren, daß diese Vorhersagen auf einer Modellebene entwickelt werden. Die Spannung, die aus dem Unterschied zwischen den im Modell errechneten Vorhersagen und den im realen Experiment ermittelten Ergebnissen entsteht, sollte weiterhin den Stochastikunterricht beleben.

Zu Beginn des Stochastikunterrichts wird mit dem Begriff „Abweichung" noch sehr intuitiv umgegangen. Gewisse Abweichungen erscheinen als zu groß, andere wiederum als noch tolerierbar. Hier wird bereits der Bogen gespannt zu den Stunden, in denen Abweichungen thematisiert werden, die Standardabweichung σ definiert wird und z. B. im Modell der Binomialverteilung σ-Regeln oder die Strategie, $t\cdot\sigma$-Umgebungen um den Erwartungswert μ zu bilden und die zugehörige Bereichswahrscheinlichkeit zu betrachten, als Hilfen für die Bewertung oder Beurteilung von Abweichungen erarbeitet werden.

Insgesamt werden Fähigkeiten im Auswerten und Interpretieren statistischer Daten entwickelt, die in anderen Fächern, aber auch von jedem mündigen Bürger zum Orientieren in der „Datenflut" benötigt werden. Die hier vorgestellte Einführung kann auch als Beschreibung eines mathematischen Kerns für ein Projekt oder für projektartigen Unterricht angesehen werden. Eine Realisierung eines Harmonietests im Rahmen einer besonderen Präsentation ist sehr reizvoll und macht den Unterschied zwischen Modellergebnissen - auch Prognosen oder Vorhersagen genannt - und Realisierungen für die gesamte Lerngruppe besonders deutlich erlebbar.

3. Literatur

1. Riemer, W. : Neue Ideen zur Stochastik. Mannheim : BI 1985
2. Riemer, W. : Riemer-Würfel. Stuttgart : Klett 1988
3. Riemer, W. : Stochastische Probleme aus elementarer Sicht. Mannheim : BI 1991
4. Ruprecht, G./ Schupp, H. : Empfehlungen zum Computereinsatz im Stochastikunterricht. Mathematik in der Schule 1994/Heft 12, S. 688 - 703
5. Wirths, H. : An der Wurfbude. Mathematik in der Schule 1993/Heft 10, S. 539 - 551
6. Wirths, H. : Das abgebrochene Tennis-Endspiel. - Erste Erfahrungen in Stochastik. Mathematik in der Schule 1997/Heft 3, S. 143 - 158
7. Wirths, H. : Das abgebrochene Tennis-Endspiel. - Erste Erfahrungen mit Baumdiagrammen. Mathematik in der Schule 1997/Heft 7/8, S. 395 - 406