

# Pepys' Problem – anders interpretiert und anders gelöst

Gerd Riehl, Barsinghausen

**Zusammenfassung:** Anknüpfend an den Beitrag *Isaac Newton - der moderne statistische Berater* von Glickman 1996 und die darauf bezogenen Ergänzungen von Haller 1997 und Henze 1998 werden verschiedene Interpretationen der von Pepys gestellten Aufgabe diskutiert. Die Version von Haller wird als Markow-Kette behandelt; damit lässt sich Newtons ursprüngliche Auffassung der Aufgabe als Wartezeitproblem ohne die Verwendung von geometrischen Reihen lösen. Interpretiert man Newton etwas anders als Haller, so zeigt sich, daß die Chancen der Spieler – im Gegensatz zu den früher behandelten Versionen – durchaus davon abhängig sind, wer das Spiel beginnt.

## 1 Verschiedene Interpretationen des Problems

Das Problem, das ihm von Pepys gestellt wurde, hat Newton erst nach einer sprachlichen Präzisierung gelöst, wie Glickman ausführlich dargestellt hat.

Haller geht es nun um Newtons ursprüngliche Auffassung der Aufgabe als ein Wartezeitproblem, das dieser so beschreibt, „dass A mit einem Würfel wirft und B mit zweien, der erstere bis er eine Sechs wirft, der letztere genauso oft um zwei Sechsen“. Haller interpretiert Newtons Text folgendermaßen: „A beginnt und wirft so lange ( $n$ -mal), bis die erste Sechs fällt. Damit ist  $n$  bestimmt. Nun darf B genauso oft wie A werfen, muss aber in diesen  $n$  Doppelwürfen mindestens zweimal eine Sechs erzielen.“

Newton konstatiert ohne dies zu begründen, dass A deswegen im Vorteil ist, „weil er als erster wirft“. In Hallers Auffassung, in der die Anzahl  $n$  der Würfe zwar zufällig, aber doch durch A bestimmt wird, kann B natürlich niemals gewinnen. (Auch wenn die Anzahl der Würfe nach oben beschränkt wird – wie in Pepys' ursprünglicher Aufgabe durch  $n=6$  – hat B nur eine minimale Chance zu gewinnen, nämlich wenn A  $n$ -mal keine Sechs und B mindestens zweimal Sechs wirft).

Ein echtes Wettspiel entsteht erst dann, wenn man Newton so interpretiert, dass abwechselnd A einen Einzel- und B einen Doppelwurf ausführen. In dieser Auffassung ist  $n$  die Anzahl der Spielrunden, und diese kann nun auch durch B bestimmt werden, wenn dieser nämlich sein Ziel (die zweite Sechs) erreicht, bevor A eine Sechs wirft; B hat dann gewonnen. Auch ein Unentschieden kann auftreten, und zwar genau dann, wenn beide Spieler ihr Ziel in derselben Runde erreichen.

## 2 Darstellung des Wettspiels als Markow-Kette

Wir stellen das Experiment zunächst allgemein für ein beliebiges Zufallsgerät dar und sprechen statt der „Sechs“ von einem „Treffer“. Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer in einem Einzelwurf sei  $p$ , die für eine Niete ist dann  $1-p$ . Die Pfade im Baumdiagramm der Abbildung 1 zeigen die möglichen Ausgänge einer Spielrunde mit ihren Wahrscheinlichkeiten:

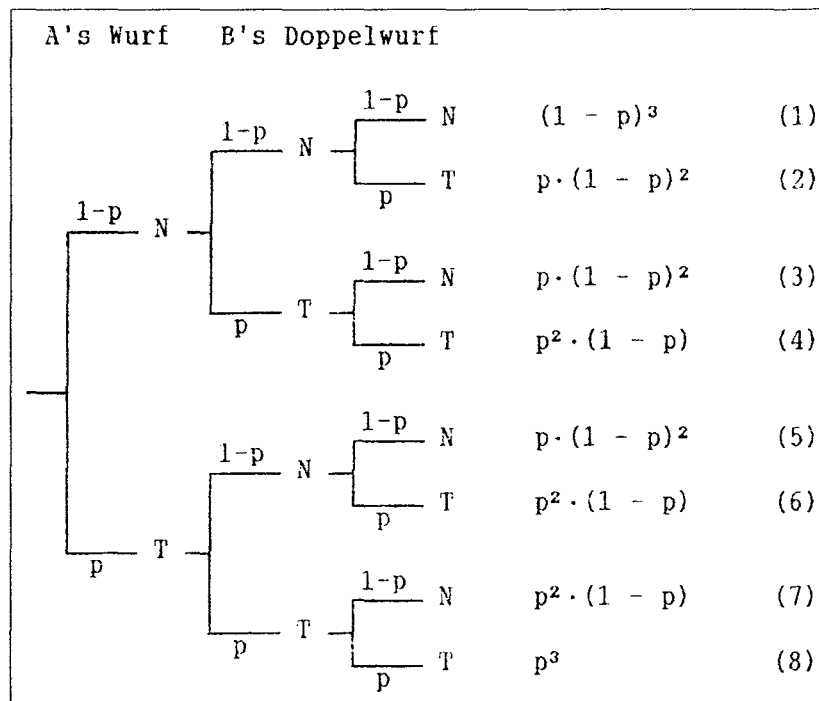


Abb. 1

Die möglichen Spielverläufe sind im Übergangsgraphen der Abbildung 2 veranschaulicht: Solange das Spiel noch nicht beendet ist, sind nach jeder Runde zwei Zustände möglich: B hat noch keinen Treffer (Zustand 0) oder er hat bereits einen Treffer (Zustand 1). Der Zustand 0 ist zugleich der Startzustand. Diese Zustände heißen *innere Zustände*.

Das Spiel endet (nach der Runde, in der mindestens einer der Spieler sein Ziel erreicht hat) in einem der *absorbierenden Zustände* A, B (A bzw. B ist Sieger) oder U (unentschieden). Diese sind in Abbildung 2 doppelt eingerahmt.

Alle zwischen den Zuständen möglichen Übergänge sind in Abbildung 2 durch Pfeile mit den zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten dargestellt: Vom Zustand 0 aus ist ein Verbleiben in 0 möglich [entsprechend Pfad (1) in Abbildung 1], ein Übergang nach 1 [Pfade (2) und (3)], nach B [Pfad (4)], nach A [Pfade (5), (6) und (7)] und nach U [Pfad (8)]. Vom Zustand 1 aus ist ein Verbleiben in 1 möglich [Pfad (1)] oder der *Übergang* in einen der absorbierenden Zustände B [Pfade (2), (3) und (4)], A [Pfad (5)] oder U [Pfade (6), (7) und (8)].

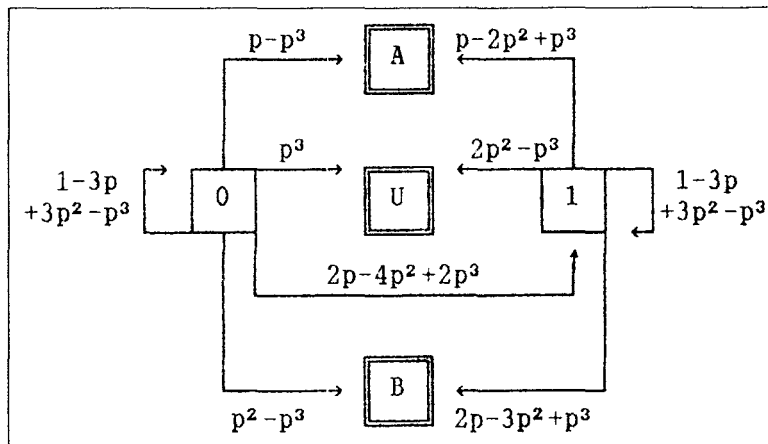


Abb. 2

Die jeweilige Übergangswahrscheinlichkeit erhält man als Summe der zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten, z.B. gilt für den Übergang von 0 nach A

$$p_{0A} = p \cdot (1-p)^2 + p^2 \cdot (1-p) + p^2 \cdot (1-p) = p - p^3.$$

Systematischer als im Graphen kann man die Übergangswahrscheinlichkeiten in Form einer *Übergangsmatrix*  $P$  zusammenfassen; für den Fall eines Laplace-Würfels hat diese folgendes Aussehen:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & 0 & 1 & A & B & U \\
 0 & \left( \begin{array}{ccccc}
 125/216 & 50/216 & 35/216 & 5/216 & 1/216 \\
 0 & 125/216 & 25/216 & 55/216 & 11/216 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) \\
 1 \\
 A \\
 B \\
 U
 \end{array}
 \end{array}$$

Ist der Anfangszustand (hier 0) gegeben, dann beschreibt ein Graph wie Abbildung 2 bzw. die zugehörige Übergangsmatrix den stochastischen Prozess vollständig. Zufallsprozesse wie der hier betrachtete heißen *Markov-Ketten*.

### 3 Wahrscheinlichkeitsverteilung als Vektor

Mit Hilfe der Übergangsmatrix  $P$  lassen sich nun für jeden Zeitpunkt des Spiels die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Zustände berechnen. Dazu fassen wir die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten nach  $n$  Runden als fünfdimensionalen Vektor  $\mathbf{a}_n = (a_{n0} \ a_{n1} \ a_{nA} \ a_{nB} \ a_{nU})$  auf, dessen Koordinaten  $a_{nz}$  angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit man sich nach der  $n$ -ten Runde im Zustand  $z$  befindet.

Offenbar gilt zu Beginn des Spiels  $\mathbf{a}_0 = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ . Wie  $\mathbf{a}_0$  haben alle  $\mathbf{a}_n$  die Eigenschaft, dass die Summe ihrer Koordinaten 1 ist (*stochastischer Vektor*); dasselbe gilt auch für die Zeilen der Matrix  $P$  (*stochastische Matrix*).

Für die Berechnung der Verteilungen gilt die Rekursionsformel  $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n \cdot P$  (vgl. Engel 1976, S.179f). Tabelle 1 zeigt die Verteilungen nach den ersten sechs

Runden. Man kann bereits hier deutlich erkennen, dass Spieler A im Vorteil ist:

Zustand	(0	1	A	B	U)
Anfangsverteilung	(1	0	0	0	0)
nach Runde 1	(0.5787	0.2315	0.1620	0.0231	0.0046)
nach Runde 2	(0.3349	0.2679	0.2826	0.0955	0.0191)
nach Runde 3	(0.1938	0.2326	0.3679	0.1715	0.0343)
nach Runde 4	(0.1122	0.1795	0.4262	0.2352	0.0470)
nach Runde 5	(0.0649	0.1298	0.4651	0.2835	0.0567)
nach Runde 6	(0.0376	0.0901	0.4907	0.3180	0.0636)

Tab. 1

Der Nutzen der Matrix-Vektor-Darstellung zeigt sich nun vor allem darin, dass sie es ermöglicht, mit Hilfe der sog. *Mittelwertsregeln* (Engel 1976, S.22f) sowohl die Gewinnchancen der Spieler als auch die mittlere Spieldauer (d.h. die Wartezeit bis zur Absorption) auf einfache Art zu berechnen.

#### 4 Die Gewinnchancen

Wir berechnen zunächst die Absorptionswahrscheinlichkeiten  $w_i^{(r)}$ , die angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit man von einem bestimmten inneren Zustand  $i$  (hier 0 oder 1) aus in den Randzustand  $r$  (also A, B oder U) gelangt. Betrachten wir als Beispiel  $w_0^{(A)}$ , so zeigt Abbildung 3, dass es einen direkten Weg nach A gibt und zwei Wege über innere Zustände (wenn nämlich am Ende der betrachteten Spielrunde Zustand 0 oder 1 herrscht):

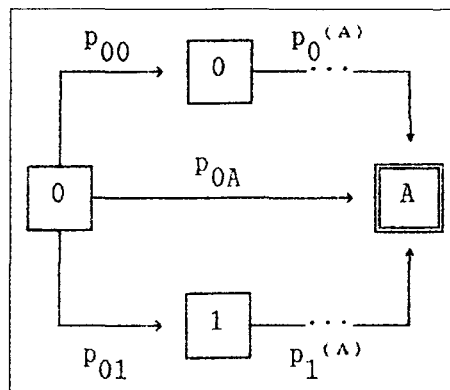


Abb. 3

Nach den Pfadregeln liest man ab:  $w_0^{(A)} = p_{00} \cdot w_0^{(A)} + p_{01} \cdot w_1^{(A)} + p_{0A}$ . Da  $w_1^{(A)}$  ebenfalls unbekannt ist, muss man für  $w_1^{(A)}$  eine entsprechende Gleichung aufstellen (allgemein: Gleichungen für  $w_i^{(A)}$  über alle inneren Zustände  $i$ ). Man hat nun ein lineares Gleichungssystem zu lösen, das in unserem Fall aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten besteht, da es nur zwei innere Zustände gibt:

$$\begin{array}{ll}
 w_0^{(r)} = p_{00} \cdot w_0^{(r)} + p_{01} \cdot w_1^{(r)} + p_{0r} & \text{bzw.} \quad (1 - p_{00}) \cdot w_0^{(r)} - p_{01} \cdot w_1^{(r)} = p_{0r} \\
 w_1^{(r)} = p_{10} \cdot w_0^{(r)} + p_{11} \cdot w_1^{(r)} + p_{1r} & \text{bzw.} \quad -p_{10} \cdot w_0^{(r)} + (1 - p_{11}) \cdot w_1^{(r)} = p_{1r}
 \end{array}$$

Dieses System vereinfacht sich noch dadurch, dass hier  $p_{10} = 0$  ist.

Allgemein gilt, dass die Koeffizientenmatrix vom jeweils betrachteten Randzustand  $r$  unabhängig ist; dieser geht über die Elemente  $p_{ir}$  der Übergangsmatrix  $P$  nur in die rechte Seite des Gleichungssystems ein. Man kann daher bei der Lösung des Systems mit dem Gauß-Algorithmus für jedes  $r$  dieselben Umformungsschritte vornehmen.

Tabelle 2 zeigt die Lösungen für die drei unterschiedlichen Randzustände unseres Problems (Laplace-Würfel,  $p = 1/6$ ):

Randzustand $r$	A	B	U
$w_1^{(r)}$	25/91	55/91	11/91
$w_0^{(r)}$	4435/8281	3205/8281	641/8281

Tab. 2

In der unteren Zeile stehen die schon von Haller und Henze auf anderem Wege gewonnenen Ergebnisse. Diese Wahrscheinlichkeiten, die Chancen des jeweiligen Spielers, vom Zustand 0 aus zu gewinnen, sind die eigentliche Lösung des Problems. Die Werte der oberen Zeile stellen für das Verständnis des stochastischen Prozesses interessante Zwischenergebnisse dar; sie zeigen, dass B deutlich im Vorteil ist, sobald er die erste Sechsz geworfen hat.

## 5 Mittlere Wartezeiten

Henze gibt für die Zufallsvariablen  $X$  (Anzahl der Einzelwürfe bis zur ersten Sechsz) und  $Y$  (Doppelwürfe bis zur zweiten Sechsz) auch die Erwartungswerte an. Nach Engel kann man für diese Erwartungswerte, die sog. *mittleren Wartezeiten*, ebenfalls ein lineares Gleichungssystem aus dem Übergangsgraphen ablesen. Dieser anschauliche Weg ist für die Schule dem von Henze gewählten (mit bedingten Erwartungswerten!) sicher vorzuziehen.

Wir bezeichnen mit  $t_i$  die mittlere Wartezeit aus dem inneren Zustand  $i$  bis zur Absorption. Abbildung 4 zeigt das Wartezeitproblem aus der Sicht von Spieler A (links) und B (rechts):

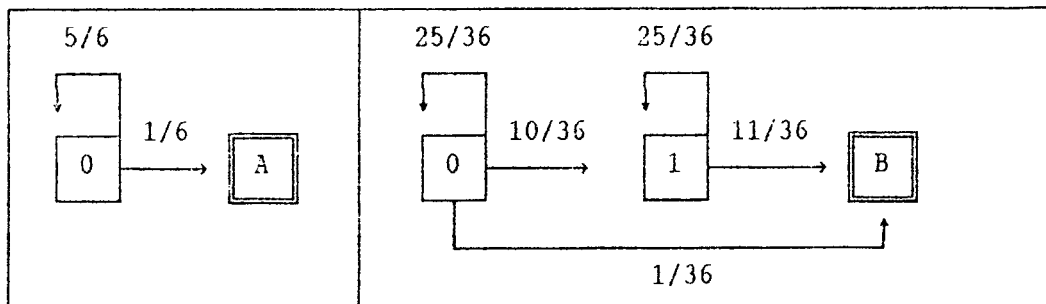


Abb. 4

Befindet sich A im Zustand 0, so muss er mindestens noch einmal werfen; dabei erreicht er mit Wahrscheinlichkeit  $1/6$  den absorbierenden Zustand A, mit  $5/6$  bleibt er im Zustand 0 und muss weiterhin durchschnittlich  $t_0$  Würfe bis zur Absorption warten. Es gilt also:  $t_0 = 1 + 5/6 \cdot t_0$ , woraus als Lösung  $t_0 = 6$  folgt (dies

ist ein intuitiv einleuchtendes Ergebnis, das gewissermaßen die Wahrscheinlichkeit  $1/6$  veranschaulicht).

Für die mittlere Wartezeit des Spielers B liest man (je nach dem im Spielverlauf erreichten Zustand) aus Abbildung 4 entsprechend folgende Gleichungen ab:

$$t_0 = 1 + 25/36 \cdot t_0 + 10/36 \cdot t_1 \quad \text{und} \quad t_1 = 1 + 25/36 \cdot t_1,$$

woraus als Lösung  $t_1 = 36/11 \approx 3,27$ ;  $t_0 = 756/121 \approx 6,25$  folgt (dieser auch schon von Henze angegebene Wert widerspricht der naiven Intuition: Man braucht für zwei Sechsen im Durchschnitt *mehr* als 6 Doppelwürfel!).

Mit demselben Verfahren kann man nun auch berechnen, wie lange das in Abbildung 2 veranschaulichte Wettspiel durchschnittlich dauert (Wartezeiten in Runden bis zur Absorption in einem der Zustände A, B oder U):

$$t_0 = 1 + 125/216 \cdot t_0 + 50/216 \cdot t_1 \quad \text{und} \quad t_1 = 1 + 125/216 \cdot t_1$$

mit der Lösung  $t_1 = 216/91 \approx 2,37$ ;  $t_0 = 30456/8281 \approx 3,68$ . Auch dieses Ergebnis liegt höher als intuitiv erwartet: Da jede Runde aus zwei Versuchen besteht (einem Einzelwurf von A und einem Doppelwurf von B) entsprechen 3,68 Runden einem Erwartungswert von 7,36 Versuchen (genauer:  $60912/8281$ ), also deutlich mehr als die Wartezeiten jedes Einzelspielers.

Es sei in diesem Zusammenhang noch darauf hingewiesen, dass der Vergleich der isoliert betrachteten Wartezeiten nicht unbedingt etwas aussagt, wer die besseren Gewinnchancen hat (vgl. z.B. Engel 1976, S. 36, Aufg.18).

## 6 Eine neue Variante des Spiels

Für das bisher betrachtete Wettspiel hat Henze gezeigt, dass es für die Chancen der Spieler belanglos ist, wer mit dem Würfeln beginnt, dass also Newtons Argument „Denn hier ist A deswegen im Vorteil, weil er als erster wirft“ nicht stichhaltig ist. Ebenso ist auch Hallers Bemerkung „A ist noch stärker im Vorteil, wenn B beginnt“ falsch; offenbar übersieht er an dieser Stelle die Möglichkeit eines unentschiedenen Spielausgangs.

Newtons Bemerkung legt nun nahe, die Spielregel so abzuändern, dass kein Unentschieden möglich ist, indem man das Spiel beendet, sobald ein Spieler sein Ziel erreicht hat. Es zeigt sich, dass in diesem Fall die Gewinnchancen durchaus davon abhängen, ob man als erster wirft oder nicht, denn alle in der bisherigen Betrachtung als Unentschieden gewerteten Spiele enden nun mit dem Sieg des zuerst würfelnden Spielers.

Wenn A beginnt, bleibt die Gewinnchance von B unverändert, während die von A gegenüber dem Wert aus Abschnitt 4 auf  $w_{0A} + w_{0U} = 5076/8281 \approx 0,613$  steigt. Wirft B zuerst, so steigt für ihn die Gewinnwahrscheinlichkeit um  $w_{0U}$  auf  $3846/8281 \approx 0,464$ .

Die mittlere Spieldauer der neuen Variante können wir in ähnlicher Weise aus dem Ergebnis von Abschnitt 5 herleiten. Auch diese hängt nun davon ab, wer

beginnt. Wirft A zuerst, gewinnt er mit Wahrscheinlichkeit  $5076/8281$ , und mit dieser Wahrscheinlichkeit ist die letzte Spielrunde um einen Versuch kürzer als die übrigen. Man erhält dann also  $(60912 - 5076)/8281 \approx 6,74$  Versuche für die mittlere Spieldauer. Beginnt dagegen B, so ist die letzte Runde mit Wahrscheinlichkeit  $3846/8281$  verkürzt, und die mittlere Spieldauer beträgt in diesem Fall  $(60912 - 3846)/8281 \approx 6,89$  Versuche.

Man kann diese eher auf intuitivem Wege gefundenen Ergebnisse natürlich auch ohne Rückgriff auf die Werte aus den Abschnitten 4 und 5 direkt berechnen. Dazu passen wir den Graphen von Abb. 2 den neuen Regeln an und veranschaulichen das Spiel als Markow-Kette mit den beiden Randzustände A und B und den inneren Zustände A0, B0, A1, B1 (gegenüber den Zuständen 0 und 1 in Abb. 2 muss man berücksichtigen, ob gerade A oder B als nächster wirft, Abb. 5).

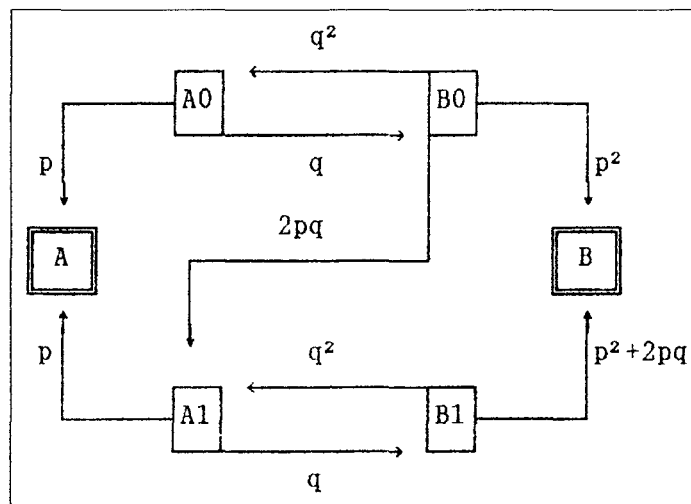


Abb. 5

Die Anfangsverteilung ist gegeben durch  $\mathbf{a}_0 = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ , falls A beginnt, und durch  $\mathbf{a}_0 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$ , falls B den ersten Versuch hat. Wie in Abschnitt 3 beschrieben kann man nun die folgenden Verteilungen berechnen. Die Tabellen 3 und 4 zeigen die Ergebnisse für Laplace-Würfel ( $p = 1/6$ ):

Zustand	A0	B0	A1	B1	A	B
Anfangsverteilung	(1	0	0	0	0	0)
nach Versuch 1	(0	0.8333	0	0	0.1667	0)
nach Versuch 2	(0.5787	0	0.2315	0	0.1667	0.0231)
nach Versuch 3	0	0.4823	0	0.1929	0.3017	0.0231)
nach Versuch 4	(0.3349	0	0.2679	0	0.3017	0.0955)
nach Versuch 5	(0	0.2791	0	0.2233	0.4022	0.0955)
nach Versuch 6	(0.1938	0	0.2326	0	0.4022	0.1715)
nach Versuch 7	(0	0.1615	0	0.1938	0.4732	0.1715)
nach Versuch 8	(0.1122	0	0.1795	0	0.4732	0.2352)
nach Versuch 9	(0	0.0935	0	0.1495	0.5218	0.2352)
nach Versuch 10	(0.0649	0	0.1298	0	0.5218	0.2835)
nach Versuch 11	(0	0.0541	0	0.1082	0.5543	0.2835)
nach Versuch 12	(0.0376	0	0.0901	0	0.5543	0.3180)

Tab. 3

Zustand	A0	B0	A1	B1	A	B
Anfangsverteilung	(0	1	0	0	0	0)
nach Versuch 1	(0.6944	0	0.2778	0	0	0.0278)
nach Versuch 2	(0	0.5787	0	0.2315	0.1620	0.0278)
nach Versuch 3	(0.4019	0	0.3215	0	0.1620	0.1146)
nach Versuch 4	(0	0.3349	0	0.2679	0.2826	0.1146)
nach Versuch 5	(0.2326	0	0.2791	0	0.2826	0.2058)
nach Versuch 6	(0	0.1938	0	0.2326	0.3679	0.2058)
nach Versuch 7	(0.1346	0	0.2153	0	0.3679	0.2822)
nach Versuch 8	(0	0.1122	0	0.1795	0.4262	0.2822)
nach Versuch 9	(0.0779	0	0.1558	0	0.4262	0.3402)
nach Versuch 10	(0	0.0649	0	0.1298	0.4651	0.3401)
nach Versuch 11	(0.0451	0	0.1082	0	0.4651	0.3816)
nach Versuch 12	(0	0.0376	0	0.0901	0.4907	0.3816)

Tab. 4

Um die Gewinnchancen der beiden Spieler zu bestimmen, stellt man ein lineares Gleichungssystem wie in Abschnitt 4 auf; für die Absorption in B liest man aus Abbildung 5 ab:

$$\begin{aligned}
 w_{A0}^{(B)} &= q \cdot w_{B0}^{(B)} \\
 w_{B0}^{(B)} &= p^2 + q^2 \cdot w_{A0}^{(B)} + 2pq \cdot w_{A1}^{(B)} \\
 w_{A1}^{(B)} &= q \cdot w_{B1}^{(B)} \\
 w_{B1}^{(B)} &= p^2 + 2pq + q^2 \cdot w_{A1}^{(B)}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Für  $p = 1/6$  erhält man als Lösung die bereits oben auf anderem Wege gewonnenen Werte  $w_{A0}^{(B)} = 3205/8281 \approx 0,387$  und  $w_{B0}^{(B)} = 3846/8281 \approx 0,464$ .

Für die mittlere Spieldauer hat man folgendes Gleichungssystem zu lösen, das sich auf die in Abschnitt 5 beschriebene Art aus Abbildung 5 ablesen lässt:

$$\begin{aligned}
 t_{A0} &= 1 + q \cdot t_{B0} \\
 t_{B0} &= 1 + q^2 \cdot t_{A0} + 2q(1-q) \cdot t_{A1} \\
 t_{A1} &= 1 + q \cdot t_{B1} \\
 t_{B1} &= 1 + q^2 \cdot t_{A1}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

mit  $t_{A0} = (1+q+2q^2-q^3-3q^4)/(1-q^3)^2$  und  $t_{B0} = (1+2q+q^2-3q^3-q^5)/(1-q^3)^2$  als Lösung. Für den Fall eines Laplace-Würfels sind dies 6,74 bzw. 6,89 Versuche, in Übereinstimmung mit den zu Beginn dieses Abschnitts gewonnenen Werten.

## 7 Wann hat B die größeren Chancen?

Wie das Gleichungssystem (2) der Wartezeiten kann man auch (1) allgemein lösen (dieses besser in Abhängigkeit von  $p$  als von  $q$ ).

Beginnt Spieler B, so ist seine Gewinnchance

$$w_{B0}^{(B)}(p) = (-p^3 + 5p^2 - 7p + 4)/(p^2 - 3p + 3)^2 .$$



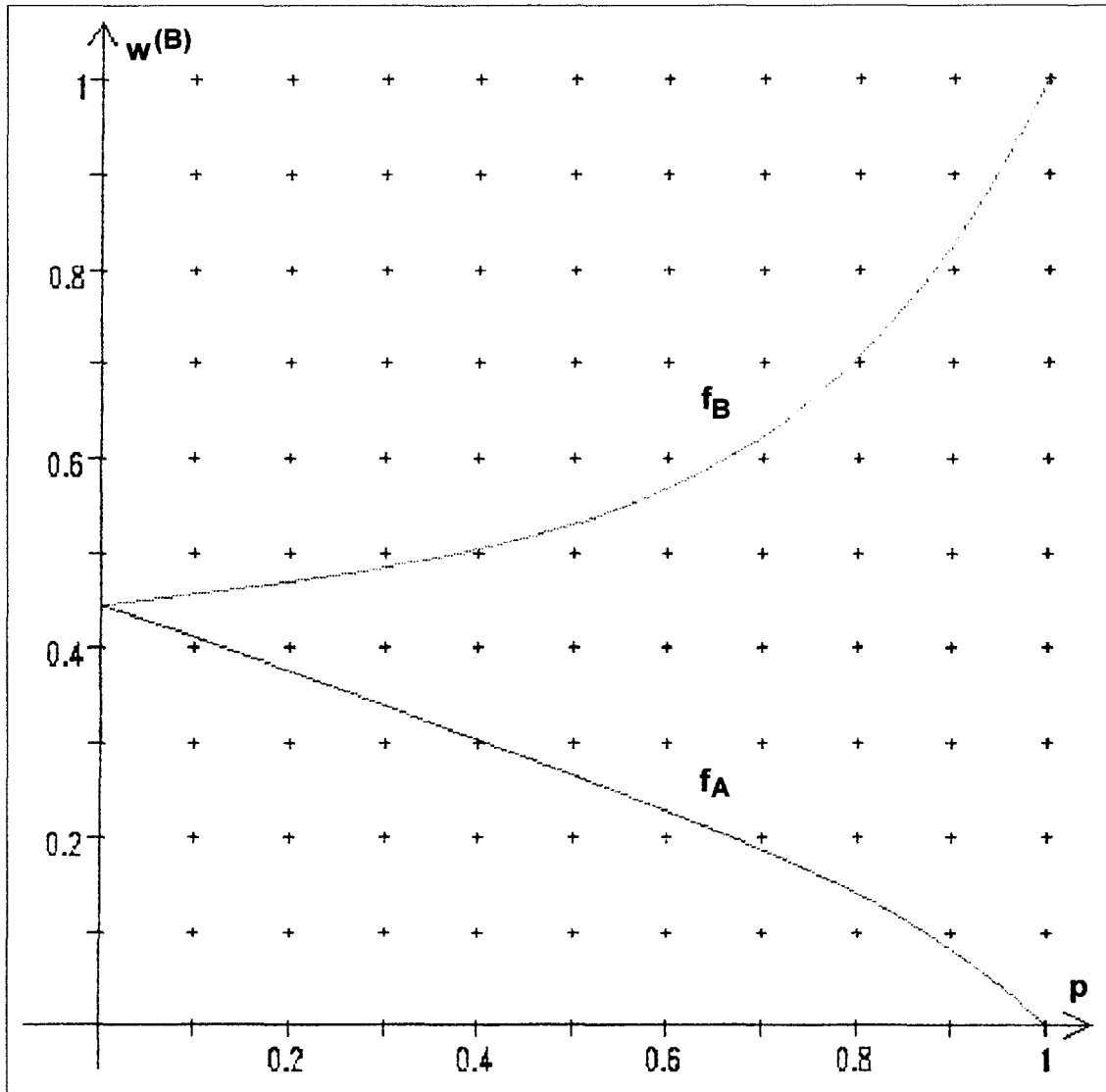


Abb. 6

Abbildung 6 zeigt den Graphen der durch diesen Term definierten Funktion  $f_B$  (mit der Definitionsmenge  $D = \{p \mid 0 < p \leq 1\}$ ,  $p = 0$  ist nicht sinnvoll, da das Spiel dann nie enden würde). Man sieht, dass bei einer Trefferwahrscheinlichkeit knapp unter 0,4 die Chancen der beiden Spieler gleich sind. (Bei einem Oktaeder mit drei roten Flächen als „Treffer“ ( $p = 0,375$ ) ist A noch knapp im Vorteil, bei einem Ikosaeder mit acht roten Flächen ( $p = 0,4$ ) hingegen B.)

Dies alles gilt allerdings nur, wenn B als Erster würfelt. Die Chancen von B, falls A beginnt, zeigt der Graph von  $f_A$  mit  $f_A(p) = (1 - p) \cdot f_B(p)$ . B ist dann nie im Vorteil und umso stärker im Nachteil, je größer  $p$  ist. Für abnehmendes  $p$  erhält man als Grenzwert  $\lim_{p \rightarrow 0} f_A(p) = \lim_{p \rightarrow 0} f_B(p) = 4/9$ .

## 8 Schlussbemerkungen

Die hier benutzte Methode der Markow-Ketten bietet gegenüber den von Haller und Henze vorgeschlagenen, eher abstrakten Wegen für die Schule besondere Vorteile:

- (1) die Möglichkeit einer suggestiven graphischen Veranschaulichung;
- (2) die Möglichkeit, auf unterschiedlichen Formalisierungsebenen zu arbeiten;
- (3) die Vernetzung mit den beiden anderen Hauptgebieten der Oberstufenmathematik (Lineare Algebra, vgl. Abschnitt 4 und 5, und Analysis, Abschnitt 7), worauf gerade in letzter Zeit Wirths 1997 und Lehmann 1998 hingewiesen haben;
- (4) die Allgemeinheit des Verfahrens; es ist auch dort anwendbar, wo die Mittel der Analysis versagen, weil beispielsweise die Auswertung von Reihen nicht gelingt.

Einer der Gutachter hat mich aus unterrichtlicher Erfahrung auf folgendes Problem hingewiesen, das im Unterricht entstehen kann: Newton hatte in seiner sprachlichen Präzisierung von Pepys' Problem gefordert, dass „eine Sechs werfen“ heißen soll, *mindestens* eine Sechs werfen“. Hat nun B bereits eine Sechs und wirft er in der letzten Runde noch zwei Sechsen, so schlagen Schüler vor, dies als Sieg für B und nicht als Unentschieden (wie oben und auch bei Glickman, Haller und Henze) zu werten. Hieraus ergibt sich eine neue Variante, die nach entsprechender Änderung der Übergangswahrscheinlichkeiten in Abbildung 5 mit den hier beschriebenen Methoden bearbeitet werden kann.

## Literatur

- Engel, A. (1976): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 2. – Stuttgart: Klett.
- Glickman, L. (1996): Isaac Newton - der moderne statistische Berater. - In: Stochastik in der Schule **16** (H. 2), S. 3-6).
- Haller, R. (1997): Zog Pepys falsche Schlüsse? Und hat Newton recht? In: Stochastik in der Schule **17** (H. 3), S. 49-54).
- Henze, N. (1998): Die Auflösung eines Wartezeit-Paradoxons - oder - Newton hatte nur teilweise recht! - In: Stochastik in der Schule **18** (H. 1), S. 2-4.
- Lehmann, E. (1998): Anmerkungen zum Beitrag „Markow-Ketten – Brücke zwischen Analysis, linearer Algebra und Stochastik“ – In: Mathematik in der Schule **36** (H. 2), S. 75-79).
- Wirths, H. (1997): Markow-Ketten - Brücke zwischen Analysis, linearer Algebra und Stochastik. – In: Mathematik in der Schule **35** (H. 11), S. 601-613.
- Pascal-Programme für die Erstellung der Tabellen 1, 3 und 4 sind beim Autor erhältlich (bitte formatierte Diskette und Freiumschlag zusenden).

Anschrift:

Gerd Riehl  
 Obere Mark 6  
 30890 Barsinghausen