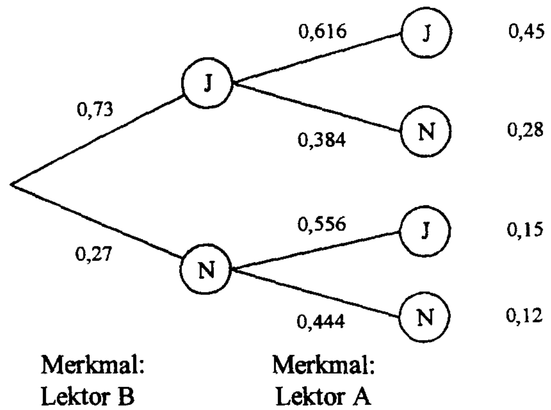
	Merkmal: Lektor B ja	Merkmal: Lektor B nein	Summe
Merkmal Lektor A ja	45%	15%	60%
Merkmal Lektor A nein	28%	12%	40%
Summe	73%	27%	100%

Umgekehrtes Baumdiagramm:

73% der Fehler werden von Lektor B entdeckt, von diesen Fehlern werden 61,6% auch von Lektor A gefunden. Von den Fehlern, die B nicht entdeckt, werden 55,6% von A gefunden.



(3) Bernoulli-Versuch mit $n = 250$; $p = 0{,}6$, also $\mu = 150$; $\sigma = 7{,}75$; $1{,}96\sigma = 15{,}2$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% wird die Anzahl der Fehler, die Lektor A findet, zwischen 135 und 165 einschl. liegen. Falls die Anzahl außerhalb dieses Intervalls liegt, wird man behaupten können, dass sich die Fähigkeit von Lektor A verändert hat.

Fehler 1. Art: Die Fähigkeit von Lektor A hat sich nicht verändert; das Ergebnis der Stichprobe liegt zufällig außerhalb des o.a. Intervalls: Man geht von einer Veränderung aus, die gar nicht stattgefunden hat.

Fehler 2. Art: Die Fähigkeit von Lektor A hat sich verändert; das Stichprobenergebnis liegt zufällig innerhalb des o.a. Intervalls. Die Veränderung wird nicht bemerkt.

Eine Leistungskurs-Abituraufgabe zum Fächerbelegungsmodell

Heinz Althoff, Bielefeld

Zusammenfassung: Vorgestellt werden für die genannte Aufgabe die unterrichtlichen Voraussetzungen, die Aufgabenstellung, eine mögliche Lösung der Aufgabe sowie die Schwierigkeiten bei der Bewertung der Schülerarbeiten.

Unterrichtliche Voraussetzungen

Im Stochastikunterricht dieses Leistungskurses (Umfang etwa 120 Unterrichtsstunden) habe ich erstmals das Thema „Entwicklung und Anwendungen des Fächerbelegungsmodells" behandelt. Ich habe die zugehörige Unterrichtsreihe in (Althoff 1999) ausführlich dargestellt.

Die folgende Aufgabe bildete zusammen mit einer „normalen" Stochastikaufgabe und einer Analysisaufgabe die Abiturklausur 1998 in meinem Leistungskurs am Helmholtz-Gymnasium Bielefeld. Die Arbeitszeit betrug $4\frac{1}{4}$ Zeitstunden, davon waren etwa 30% für diese Aufgabe vorgesehen.

Aufgabenstellung

a) Beschreiben Sie das Fächerbelegungsmodell und verdeutlichen Sie, was das Modell zur Beschreibung bzw. zur Lösung stochastischer Probleme leisten kann.

b) Formulieren Sie eine zum Ansatz $P(E) = 1 - \dfrac{\frac{32!}{(32-10)!}}{32^{10}}$ passende Einkleidung für das Ziehen von Skatkarten. (Hinweis: Ein Skatspiel besteht aus 32 verschiedenen Karten.)

c) Aus einem vollständigen Skatspiel wird n mal mit Zurücklegen (und Durchmischen der Karten) eine Karte gezogen.

Wie groß muß n mindestens sein, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,9% mindestens einmal der Kreuz-Bube unter den n gezogenen Karten vorkommen soll?

d) Formulieren Sie (wenigstens) eine weitere Aufgabe zum Verteilen von Skatkarten, die sich von den Aufgabenstellungen in b) und c) wesentlich unterscheidet. Um welches der im Unterricht behandelten Probleme (Geburtstagsproblem, ...) handelt es sich bei der Aufgabenstellung?

Erwartete Schülerleistungen

Wenn man in Nordrhein-Westfalen die beiden Abiturvorschläge bei der Schulaufsicht einreicht (Mitte Januar), muß man neben den Lösungen auch einen „Erwartungshorizont“ hinzufügen (eine Hilfspunktewertung für die einzelnen Aufgabenteile wird seit einigen Jahren nicht mehr verlangt). Für obige Aufgabe habe ich geschrieben:

Das im Stochastikunterricht bisher noch wenig verwendete Fächerbelegungsmodell habe ich erstmals in diesem Kurs (mit gutem Erfolg) eingesetzt. Da in der Gruppenarbeit von den einzelnen Gruppen unterschiedliche Schwerpunkte behandelt wurden, habe ich die Teilaufgaben a) und d) relativ offen formuliert, um allen Prüflingen gleiche Chancen zu bieten. Damit besteht zugleich für die Prüflinge die Möglichkeit zu besonders selbständigen Leistungen (Anforderungsbereich III).

Lösung der Aufgabe

a) Zur Beschreibung des Fächerbelegungsmodells werden (mindestens) Antworten auf die folgenden (im Unterricht behandelten) Fragen erwartet:

- Was habe ich?
- Welchen Zufallsversuch führe ich durch?
- Was interessiert mich? (verschiedene Fälle unterscheiden!)
- Wie kann ich die Versuchsergebnisse formal beschreiben?

Die Beschreibung eines stochastischen Problems im (abstrakten) Modell hat den Vorteil, daß jetzt unwesentliche Aspekte wegfallen und damit die wesentlichen Aspekte (Problemtypen, Parameter(werte) etc.) deutlicher sichtbar werden.

Selbstverständlich kann man bei solchen Aufgabenstellungen wie in dieser Teilaufgabe keine (quantitativ und qualitativ) idealen Lösungen erwarten. Trotzdem hoffe ich, die „Leistungen“ der Prüflinge absolut und relativ angemessen bewerten zu können.

b) Eine brauchbare Einkleidung:

Aus einem vollständigen Skatspiel wird 10mal nacheinander eine Karte gezogen, das Ergebnis notiert, die gezogene Karte zurückgelegt und das Kartenspiel vor einer Ziehung immer gründlich durchgemischt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dabei (mindestens) eine der 32 Skatkarten mehr als einmal gezogen?

Man erkennt aus dem Ansatz, daß es sich um das Geburtstagsproblem handelt, und muß dies nur entsprechend „einkleiden“.

c) Aus „mindestens einmal der Kreuz-Bube“ erkennt man, daß es sich um das Rosinenproblem handelt. Für das Ereignis $E \triangleq$ Kreuz-Bube ist unter den n gezogenen Karten gilt damit

$$P(E) = 1 - \frac{\left|Per_n^{31}(mW)\right|}{\left|Per_n^{32}(mW)\right|} = 1 - \frac{31^n}{32^n} =$$

$$1 - \left(\frac{31}{32}\right)^n \geq 0{,}999 \Leftrightarrow \left(\frac{31}{32}\right)^n \leq 0{,}001 \Leftrightarrow$$

$$n \geq \frac{\lg 0{,}001}{\lg \frac{31}{32}} \approx 217{,}6$$

Es muß also mindestens 218mal eine Karte gezogen werden.

Das Problem kann übrigens auch „klassisch“ gelöst werden unter Verwendung der binomialverteilten Zufallsgröße $X \triangleq$ Anzahl der Ziehungen von Kreuz-Bube.

d) Da es in b) und c) um das Geburtstagsproblem bzw. um das Rosinenproblem ging, ist es angebracht, hier Aufgaben zum Sammelbilderproblem oder zum Rencontreproblem zu formulieren, z. B. folgende:

(1) Aus einem Skatspiel wird 100mal mit Zurücklegen eine Karte gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind dann alle 32 Karten des Skatspiels wenigstens einmal gezogen worden?

(2) Aus zwei getrennten Skatspielen wird 32mal ohne Zurücklegen gleichzeitig je eine Karte gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind wenigstens einmal

zwei gleichzeitig gezogene Karten gleichartig?

Denkbar wäre aber auch eine andere Aufgabenstellung zum Rosinenproblem wie etwa:

(3) Aus einem Skatspiel wird 100mal mit Zurücklegen eine Karte gezogen. Wie groß ist der Anteil der dabei gar nicht gezogenen Skatkarten?

Zu den erreichten Ergebnissen

Die hier vorgestellte Aufgabe zum Fächerbelegungsmodell ist im Durchschnitt etwas schlechter bearbeitet worden als die beiden anderen Aufgaben (64% der erreichbaren Punkte gegenüber 71% bei der anderen Stochastikaufgabe und 72% bei der Analysisaufgabe). Ich sehe hierfür zwei Gründe:

- es gab bei dieser Aufgabe mehr krasse Ausfälle als bei den beiden anderen Aufgaben, die Aufgabe hatte also eine überdurchschnittlich starke Trennschärfe;
- bei der Teilaufgabe a) war durch die (offenbar zu) offene Aufgabenstellung zu vielen (auch guten) Schülern nicht hinreichend klar, was von ihnen erwartet wurde.

Insbesondere bei den Teilaufgaben a) und d) erwies sich die Korrektur der Schülerarbeiten als überdurchschnittlich zeitaufwendig, eine nicht zu stark subjektiv geprägte Bewertung der Prüfungsleistungen als relativ schwierig. Ich habe deshalb nach einer ersten Durchsicht der Schülerarbeiten zu meiner eigenen Hilfe und vor allem für meine Kollegin, die das Korreferat übernommen hatte, folgende Gesichtspunkte für die Bewertung der Schülerleistungen bei den Teilaufgaben dieser Aufgabe zusammengestellt:

Für eine volle Punktzahl bei den einzelnen Teilaufgaben sollten vorhanden sein:

a) – vollständige und korrekte Beschreibung des Fächerbelegungsmodells
(Was habe ich? Was tue ich? ...).
– Verdeutlichung des Nutzens, allgemein oder an einem stochastischen Problem(-typ) erläutert, in (gut) verständlicher Darstellung.

Weitere vernünftige Erläuterungen können Lücken ersetzen, in Ausnahmefällen auch zusätzlich berücksichtigt werden.

b) – Vollständig und korrekt formulierte Aufgabenstellung.
– Begründung (Erläuterung) am konkreten Beispiel oder durch Zuordnung zu bestimmtem Problemtyp.

c) – Ansatz (mit Erläuterung).
– Rechnung (Auflösung nach *n*).
– Korrekte Antwort.

d) – Eine *sinnvolle* Aufgabenstellung (Punktabzug, wenn sie mit den angegebenen Problemtypen nichts zu tun hat).
– „Einordnung" des Aufgabentyps oder Lösungsansatz.

Mängel können „ausgebügelt" werden durch weitere Aufgabe(n).

Bei den Teilaufgaben a) und d) kann keine Vollständigkeit angestrebt werden; neben der Quantität zählt hier vor allem die Qualität der Darstellung.

Für die Teilaufgaben habe ich folgende Punktzahlen angesetzt:

a) 10
b) 8 (Beispiel 5, Begründung 3)
c) 10 (Ansatz 3, Rechnung 6, Antwort 1)
d) 8

Literatur:

Althoff, H. (1999): Das Lösen stochastischer Probleme mit Hilfe eines Fächerbelegungsmodells – ein Bericht über eine Unterrichtsreihe in einem Leistungskurs 13. – (Erscheint voraussichtlich in: Berichte aus dem Seminar für Didaktik der Mathematik WS 97/98 und SS 98, Universität Bielefeld).

Heinz Althoff
Ruschfeldweg 17
33619 Bielefeld