Markieren – Einfangen – Schätzen: Wie viele wilde Tiere?

JOACHIM ENGEL, LUDWIGSBURG

Zusammenfassung: *Die Modellierung eines ökologischen Problems - die Bestimmung der Anzahl in Wildnis lebender Tiere - bietet Gelegenheit zur Einführung in statistisches Denken. Dazu wird eine handlungsorientierte Übung vorgestellt, die auf dem (Wieder-) Einfangen vorher markierter Tiere beruht. Die Qualität der Methode kann per Computersimulation oder durch mathematische Analyse bewertet werden. Der konkrete Problemkontext eignet sich als motivierende Einführung oder als zusammenfassende Gesamtschau verschiedener wichtiger Konzepte der Stochastik: Modellierungsprozess, Simulation, hypergeometrische Verteilung, Maximum-Likelihood-Schätzer, negative Binomialverteilung, Konfidenzintervalle, Testen von Hypothesen und Versuchsaufbau. Eine abschließende Modellkritik zeigt praktische Grenzen der Methode auf.*

1. Wie lässt sich die Größe des Tierbestandes bestimmen?

Naturschützer weisen beharrlich darauf hin, dass viele Tierarten vom Aussterben bedroht sind. Die Artenschutzkonvention war ein wichtiges Resultat der UN-Umweltkonferenz (UNCED) von 1992 in Rio. Viele Faktoren wie Umweltverschmutzung, Vordringen der menschlichen Zivilisation und kommerzielle Interessen (z.B. Überfischung der Meere, Jagd nach Elfenbein, Pelzen und Krokodilleder) tragen zu dieser Entwicklung bei. Um die Wale vor dem Aussterben zu bewahren, wurde 1946 von der UNO die internationale Walfangkommission eingerichtet, die den Fang bestimmter Wale (Blau- und Pottwale) verbietet und für andere Wale (Grönlandwale) enge Fangquoten festschreibt.

Grundlage aller Diskussionen ist die Feststellung eines Schwundes der Anzahl spezieller Tierarten. Wie aber lässt sich die Anzahl wild lebender Tiere feststellen? Da es in den Ozeanen und der Wildnis keine „Einwohnermeldeämter“ für Tiere gibt, ist man auf Schätzungen angewiesen. Damit ist die Statistik gefragt, zuverlässige Verfahren bereit zu stellen, mit denen sich Populationsgrößen schätzen lassen. Einige dieser Methoden lassen sich auch zur Schätzung von menschlichen Populationen (z. B. Teilnehmer an Massenveranstaltungen wie Volksfesten, Demonstrationen, oder der Zahl obdachloser Menschen) einsetzen. Nach einem kurzen Überblick stellen wir in Abschnitt 2 eine Methode vor, die auf dem Einfangen vorher markierter Lebewesen beruht (englisch: *Capture-Recapture*). Dazu schlagen wir eine handlungsorientierte Übung vor, gefolgt von einer Computersimulation (Abschnitt 3) und einer mathematischen Analyse (Abschnitt 4). Abschnitt 5 schließt sich mit kritischen Überlegungen über praktische Grenzen dieser Methode an.

1. Flächenstichproben mit Luftaufnahmen:
   Manche Tiere lassen sich in ihrer natürlichen Lebensumwelt aus der Entfernung erkennen, z.B. erscheinen Pinguine in der Antarktis vom Flugzeug aus als schwarze Punkte auf hellem Eis. Will man den Tierbestand feststellen, so kann man dann eine Zufallsstichprobe von Gebietsstücken auswählen. Anschließend werden diese Gebiete von der Luft aus als Flächenaufnahme fotografiert und ausgezählt. Eine konkrete Übung für Schüler zu dieser Methode wird von Perry und Kader (1998) vorgeschlagen.
2. Tägliche oder jährliche Fangzahlen:
   Tägliche Fangquoten bei Fischen hängen direkt von der Bevölkerungsdichte der Tiere ab. Wenn alle anderen Faktoren (z.B. keine verbesserten Fangtechniken oder intelligente Tiere, die lernen, den Fangnetzen aus dem Weg zu gehen) annähernd konstant bleiben, so erscheint eine proportionale Beziehung zwischen Fangzahlen und Gesamtzahl der Fische plausibel. Somit lassen sich relative Änderungen in der Zahl der Tiere konstatieren (siehe etwa Tanur et al. 1989). Sieht man von der natürlichen Änderungsrate (Sterberate minus Geburtenrate) der Tiere ab, so lässt sich über Veränderungen in den Fangzahlen auch die Gesamtzahl schätzen: Wenn nach einem Fang von z.B. 2500 Fischen in einem See in einem Jahr im Folgejahr nur 2000 Fische gefangen werden (20 % weniger), dann lässt sich der Bevölkerungsbestand zu Beginn auf 2500 / 20% = 12 500 Fische schätzen.
3. Altersanalyse:
   Ähnlich wie Bäume jedes Jahr einen Ring um ihren Stamm legen, so lässt sich auch das Alter von bestimmten Tieren an biologischen Merkmalen ermitteln, bei Walen sind es z.B. Ringe am Ohr. Damit kann man jährliche Prozentsätze für gefangene Altersgruppen be-

rechnen. Die Gesamtzahl der Tiere lässt sich dann schätzen, indem z. B. Fangquoten der heute fünfjährigen Tiere mit den Quoten der vierjährigen Tiere vom letzten Jahr mit Methoden wie unter 2.) verglichen werden.

4. Wiedereinfangen markierter Tiere (*Capture-Recapture*-Methode):
   Bei dieser Methode werden zunächst einige Tiere eingefangen, mit einer Markierung versehen und wieder freigelassen (*Capture*). Nach einiger Zeit (bis die Tiere sich durchmischt haben) wird eine zweite Stichprobe von derselben Tierpopulation eingefangen. Dann zählt man die Anzahl der markierten Lebewesen in der zweiten (*Recapture*-) Stichprobe. Mit Hilfe dieser Zahl wird eine Schätzung für die Gesamtzahl der Tiere errechnet. Werden zunächst M Tiere markiert und dann n Tiere eingefangen, unter denen man X Tiere mit Markierung findet, so führt eine einfache Proportionalitätsüberlegung zu $X / n \approx M / N$. Daher ist eine natürliche Schätzgröße für die Gesamtzahl der Tiere gegeben durch

$$\hat{N} = \frac{M \cdot n}{X} \qquad (1).$$

Man beachte hierbei, dass bei dieser Vorgehensweise der Umfang der beiden Stichproben M und n vom Experiment vorgegeben sind, während die Zahl X von markierten Tieren der zweiten Stichprobe von Zufallseinflüssen abhängt.

Eine Variante dieser Methode sieht vor, den Umfang der zweiten Stichprobe so groß zu wählen, dass sie eine fest vorgegebene Zahl $X = k$ von markierten Tieren umfasst. Das zweite Einfangen wird jetzt also so lange fortgeführt, bis k markierte Tiere gefangen sind. Die Berechnungsformel bleibt genau dieselbe, nur ist jetzt $X = k$ fest vorgegeben und der Umfang n der zweiten Stichprobe hängt vom Zufall ab.

2. Übung zum Capture-Recapture-Verfahren

Die *Capture-Recapture*-Methode wurde schon von P. S. Laplace 1783 zur Schätzung der Bevölkerung Frankreichs angewandt (Seber 1973). Ein Melderegister aller Neugeborenen Frankreichs stellte die M markierten Individuen dar. Die zweite Stichprobe vom Umfang n bestand aus den Mitgliedern einiger Kirchengemeinden, und X war die Anzahl der amtlich gemeldeten Geburten dieser Gemeinden.

Zur Illustration dieser Methode schlagen wir ein Experiment vor, das am besten in Gruppen von 3 bis 4 Schülerinnen und Schülern durchgeführt wird. Wir brauchen dazu pro Gruppe eine Tüte fischförmigen Knabbergebäcks, z.B. "gold fischli", Lebensmittel-Farbe (als Ersatz geht auch ein Filzstift) sowie eine Schüssel, die als Teich dient. Die Schüssel sollte groß genug sein, damit sich die Fische beim Schütteln auch gut durchmischen. Die folgende Vierfelder-Tafel stellt eine Gruppierung der Fische dar, je nach dem ob sie im ersten oder zweiten Fang gefangen wurden oder nicht.

		Im ersten Fang Ja (Markiert)	Im ersten Fang Nein (Nicht markiert)	Gesamt
Im zweiten Fang	Ja	X	$n-X$	n
Im zweiten Fang	Nein	$M-X$	$N-M-n+X$	$N-n$
Gesamt		M	$N-M$	N

Zweck der Übung ist es, in statistische Modelle einzuführen und auch zu lernen, wie verschiedene Annahmen die statistische Analyse beeinflussen. Abbildung 1 (Siehe folgende Seite!) zeigt Arbeitsanweisungen für diese Aktivität.

3. Wiederholung durch Computer-Simulation

Die vorangegangene Übung lässt sich beliebig oft wiederholen. Die resultierenden Schätzwerte für die Gesamtpopulation können dann in einem Boxplot oder Stamm-und-Blatt-Diagramm dargestellt werden. Besonders interessant sind wiederholte Versuchsreihen für unterschiedliche Werte der beiden Stichprobenumfänge M und n. Welchen Einfluss hat es, wenn mehr Fische markiert werden? Welche Auswirkungen hat eine vergrößerte Stichprobe beim zweiten Einfangen? In der Praxis ist jedes Markieren bzw. Wiedereinfangen von Tieren mit Arbeit und Kosten verbunden. Sollte man eher die Zahl der Markierungen oder den Umfang des zweiten Fangs erhöhen? Sollten beide Stichproben ungefähr gleich groß sein?

Markieren – Wiedereinfangen – Schätzen: Wie viele wilde Tiere?

Wie lässt sich die Anzahl von in der Wildnis lebenden Tieren schätzen? Die folgende Übung demonstriert eine Methode, die auf dem Wiedereinfangen markierter Tiere basiert. Wir gehen von einem See aus, dessen Fischbestand zu schätzen ist. Dazu hast Du eine Tüte mit Goldfisch-Knabbergebäck und eine Schüssel, die den See darstellt.

1. Öffne die Tüte mit Goldfisch-Knabbergebäck und schütte sie in die Schüssel (den „See“).
2. Jetzt nimm eine Stichprobe vom Umfang $M \approx 15-20$ von Fischen aus dem See heraus und markiere sie, indem Du mit Lebensmittelfarbe einen kleinen, aber gut sichtbaren Punkt auf jeden der eingefangenen Fische machst. Lege dann die markierten Fische zurück in den See (*Markieren*).
3. Schüttele die Schüssel, damit sich die Fische im See gut durchmischen. Nimm dann eine zweite Stichprobe (*Wiedereinfangen*) vom Umfang $n \approx 15-20$ von Tieren aus dem See. Zähle die Anzahl der markierten Fische des zweiten Fangs. Wir bezeichnen diese Anzahl mit X, d.h. bei dieser Stichprobe hast Du X markierte und $n - X$ nicht markierte Stichprobe eingefangen.
4. Jetzt betrachte den Anteil der markierten Fische innerhalb der zweiten Stichprobe. Wenn der See gut gemischt wurde, ist die Annahme plausibel, dass der Anteil der markierten Fische in der Stichprobe ungefähr so groß ist wie der Anteil der markierten Fische im gesamten See, d.h. $X / n \approx M / N$. Daher lässt sich die Anzahl der Fische im See schätzen mittels
$$\hat{N} = \frac{M \cdot n}{X}.$$
5. Wiederhole dieses Experiment (Schritte 2 bis 4) mehrere Male (z.B. zehn Mal) und stell die erhaltenen Schätzwerte für N in einem Boxplot dar.

Zusatz:

6. Welchen Einfluss haben die beiden Stichprobenumfänge M und n auf die Qualität des Schätzers von N? Erstelle einen Versuchsplan für eine Experimentenreihe. Wie sollen dabei M und n variieren?
7. Eine Variante der Schätzmethode besteht darin, im zweiten Durchgang so lange zu fischen, bis eine vorgegebene Anzahl markierter Fische (z.B. $X = 6$) erreicht wurde. Was sind mögliche Vorteile dieser Vorgehensweise? Was ihre Nachteile?

Abbildung 1: Arbeitsblatt zum *Capture-Recapture*-Verfahren

Da ein häufiges Durchspielen des Experiments in Abschnitt 2 sehr zeitaufwendig ist, bietet sich hier eine Computersimulation an. Dabei lassen sich Fragen der Versuchsplanung und experimentellen Designs diskutieren. Zu vorgegebenem Wert N (Gesamtzahl der Fische im See) werden dann am Computer Experimente durchgeführt mit unterschiedlichen Werten für die Anzahl der Markierungen (erster Fang) M und den Stichprobenumfang n des zweiten Fangs.

Dazu haben wir ein Makro in der statistischen Programmierumgebung Lisp-Stat geschrieben (siehe unten). Per Simulation haben wir das folgende Experiment durchgeführt: N = 500 Fische befinden sich im Teich, M Fische werden eingefangen und markiert (*Capture*). Danach werden n Fische im zweiten Fang gefangen (*Recapture*). Eine einfache Realisierung der Simulation ergibt sich, wenn zunächst die Fische durch 500 Nullen repräsentiert werden. Markieren eines Fischs bedeutet das Ersetzen der Null durch eine Eins.

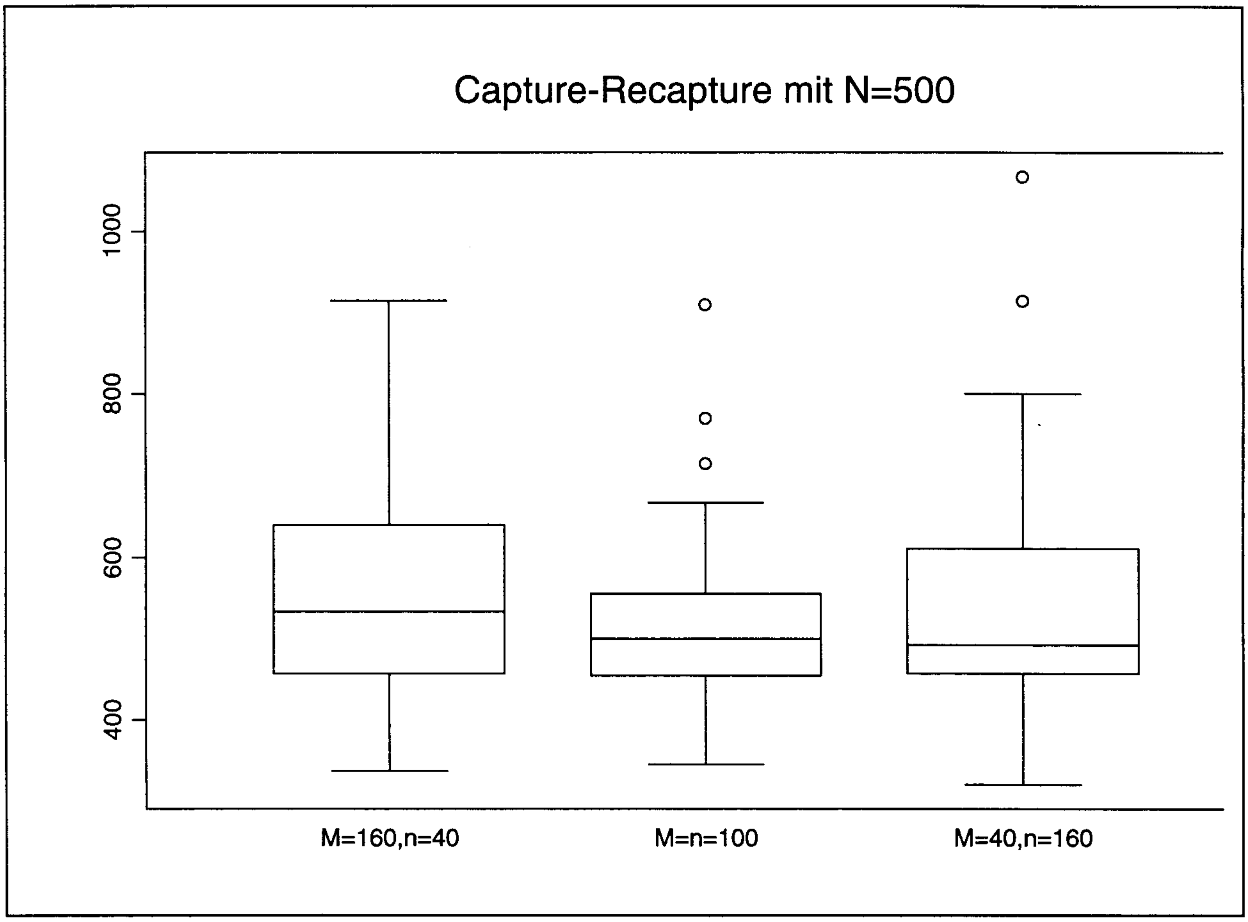

Abbildung 2: Vergleichende Boxplots von Schätzungen nach der Capture-Recapture-Methode.

Dann wird eine Zufallsstichprobe vom Umfang n gezogen und die Anzahl der Einsen gezählt.

Dieses Experiment wurde für $M_1 = 160$, $n_1 = 40$, $M_2 = n_2 = 100$ und $M_3 = 40$, $n_3 = 160$ jeweils 100 mal wiederholt. Aus der jeweiligen Anzahl der markierten Tiere im zweiten Fang sind 100 Schätzungen für N gemäß (1) errechnet worden, die mit dem wahren Wert N = 500 verglichen werden können. Abbildung 2 zeigt vergleichende Boxplots dieser Schätzungen.

Es ist offensichtlich, dass die Schätzungen besser werden, je mehr Tiere markiert (M groß) und je mehr Tiere im zweiten Fang eingefangen werden. Die erhaltenen Boxplots lassen vermuten, dass die Verteilung von $\hat{N}$ nicht symmetrisch um den wahren Wert N liegt. Es ist zu beachten, dass gerade bei einer niedrigen Zahl M markierter Tiere aufgrund zufälliger Variation die Anzahl markierter Tiere X im zweiten Fang sehr klein werden kann (im Extremfall auch 0). Dies führt dann wegen der

Zufallsvariable X im Nenner von (1) zu sehr hohen Schätzwerten für $\hat{N}$.

Ähnliches gilt bei einem niedrigen Wert für den Stichprobenumfang n wieder eingefangener Tiere.

4. Mathematisches zur Capture-Recapture-Methode

4.1. X ist hypergeometrisch verteilt:

Durch die Markierung ist die Gesamtzahl der Tiere in zwei Teilgruppen zerteilt: M Tiere haben eine Markierung erhalten, $N - M$ sind unmarkiert. Die Anzahl X markierter Tiere in der zweiten Stichprobe vom Umfang n ist eine Zufallsgröße, die einer hypergeometrischen Verteilung folgt:

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

4.2. Verteilung von $\hat{N}$:

Mit Formel (1) ergibt sich für die Verteilung der Zufallsgröße $\hat{N}$

$$P(\hat{N}=z) = P\left(\frac{M\,n}{X}=z\right)=P\left(X=\frac{M\,n}{z}\right)$$

$$=\frac{\binom{M}{\frac{M\,n}{z}}\cdot\binom{N-M}{n-\frac{M\,n}{z}}}{\binom{N}{n}}$$

vorausgesetzt z teilt M. Man beachte, dass die Verteilung von $\hat{N}$ nicht hypergeometrisch ist.

Die Berechnung von Erwartungswert und Varianz des Schätzers $\hat{N}$ ist recht kompliziert, weil der vom Zufall abhängige Ausdruck X in Formel (1) im Nenner erscheint. Mittels einer Taylorentwicklung um $x_0=\frac{M\,n}{N}$ lässt sich folgende Approximation begründen:

$$\frac{1}{X}\approx\frac{N}{M\,n}-\frac{N^2}{M^2n^2}\left(X-\frac{M\,n}{N}\right)+\frac{N^3}{M^3n^3}\left(X-\frac{M\,n}{N}\right)^2.$$

Damit ergibt sich, Vertauschbarkeit der Näherung mit dem Erwartungswert vorausgesetzt,

$$\mathrm{E}(\hat{N})\approx M\,n\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right)$$
$$=N-\frac{N^2}{M\,n}\left(\mathrm{E}(X)-\frac{M\,n}{N}\right)+\frac{N^3}{M^2n^2}\ \mathrm{Var}\,(X)$$
$$=N+\frac{N(N-M)}{M\,n}\cdot\frac{N-n}{N-1}$$

In ähnlicher Weise lässt sich für die Varianz herleiten

$$\mathrm{Var}\,(\hat{N})\approx M^2n^2\mathrm{Var}\left(\frac{1}{X}\right)$$
$$=M^2n^2\frac{N^4}{M^4n^4}\mathrm{Var}(X)$$
$$=\frac{N^2(N-M)(N-n)}{nM(N-1)}$$

Allerdings gelten diese Approximationen kaum bei kleinen Werten von M und n. Ist nämlich $M + n < N$, so nimmt die Zufallsvariable X den Wert 0 mit positiver Wahrscheinlichkeit an, d.h. dann ist $E(\hat{N})=\infty$ gilt. Der Schätzer $\hat{N}$ ist in keinem Fall (also auch falls $M + n > N$) unverzerrt. Die Populationsgröße wird im Mittel überschätzt. In der Literatur (Seber 1973) wird daher auch folgende Modifikation vorgeschlagen, die eine geringere Verzerrung hat:

$$\tilde{N}=\frac{(M+1)\cdot(n+1)}{X+1}-1.$$

In der Literatur (Scheaffer et al. 1986; Seber 1973) wird auch bei kleineren Werten von M und n auf obige Approximationen für den Erwartungswert und die Varianz von $\hat{N}$ Bezug genommen, z. B. um einen gewünschten Stichprobenumfang für M und n zu errechnen.

4.3. $\hat{N}$ ist Maximum-Likelihood-Schätzer für N:

Es bezeichne $h_k(N)=h(k,M,n,N)$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion der hypergeometrischen Verteilung als Funktion von N (bei gegebenem $X = k$, M und n)

$$h_k(N)=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Abbildung 3 zeigt eine typische Verteilung der Wahrscheinlichkeiten $h_k(N)$ in Abhängigkeit von N (hier für $k = 1$, $M = 3$, $n = 4$).

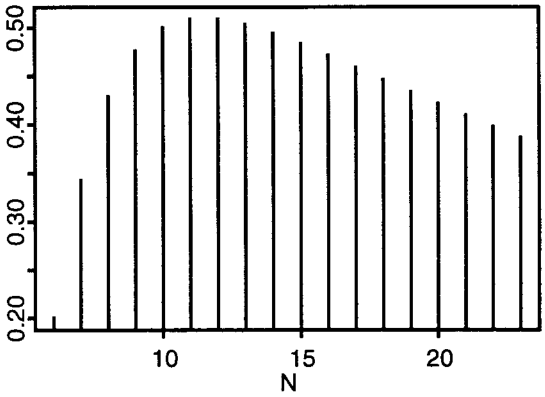

Abbildung 3: Wahrscheinlichkeiten $h_k(N)$ als Funktion von N.

Wichtig ist die qualitative Beobachtung, dass $h_k(N)$ zunächst monoton wächst und dann abfällt. Daraus lässt sich das Maximum dieser Funktion wie folgt berechnen: Ausgehend von

$$\frac{h_k(N)}{h_k(N-1)} = \frac{(N-M)\cdot(N-n)}{(N-M-n+k)\cdot N},$$

stellen wir fest, dass dieser Quotient genau dann größer 1 ist, wenn $N < \frac{M \cdot n}{k}$ gilt. Daraus folgt, dass (der abgerundete Wert von) $\hat{N} = \frac{M \cdot n}{k}$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion $h_k(N)$ maximiert. $\hat{N}$ ist somit Maximum-Likelihood-Schätzer für N.

4.4. Konfidenzintervalle für *N*:

In der Notation des vorangegangenen Abschnitts lässt sich auch leicht die Berechnung von Konfidenzintervallen für N herleiten. Die Gesamtzahl der Tiere N ist nicht bekannt. Nach Markieren von M Tieren befinden sich im zweiten Fang unter n gefangenen Tieren genau k Tiere mit Markierung. Zu gegebenem $\alpha \in \,]\,0\,,1\,[$ bezeichne N_U die kleinste ganze Zahl z mit der Eigenschaft

$P(X \leq k \mid z) > \alpha / 2$, d.h.

$h_0(z) + h_1(z) + \ldots + h_k(z) > \alpha / 2$.

Analog bezeichne N^O die größte ganze Zahl z mit

$P(X \geq k \mid z) > \alpha / 2$, bzw.

$P(X < k \mid z) \leq 1 - \alpha / 2$, d.h.

$h_k(z) + h_{k+1}(z) + \ldots + h_n(z) > \alpha / 2$.

Dann ist $[\,N_U\,,\,N^O\,]$ ein Konfidenzintervall zum Niveau α für N.

Beispiel: Es seien $M = 90$ Fische markiert worden. Beim Wiedereinfangen befanden sich unter $n = 80$ Tieren 12 Fische mit Markierung. Es ist dann $\hat{N} = 90 \bullet 80 / 12 = 600$ die geschätzte Zahl der Fische im See. Wie verlässlich ist diese Zahl? Dazu wird ein 5 % Konfidenzintervall für N gesucht. Es errechnet sich, z.B. mit Hilfe von Lisp-Stat, folgende Tabelle:

N	$P(X \leq 12 \mid N)$	$P(X < 12 \mid N)$
379	2,425 %	...
380	2,509 %	...
381	2,596 %	...
...	...	...
1094	...	97,480 %
1095	...	97,496 %
1096	...	97,513 %

Daraus ergibt sich [380 , 1095] als ein zweiseitiges 5 % Konfidenzintervall.

4.5 Testen von Hypothesen:

Wir haben $M = 90$ Fische markiert, von denen $k = 12$ beim zweiten Fang vom Umfang $n = 80$ wiederum ins Netz gingen. Jemand behauptet: „Es sind 1000 Fische im Teich." Wir sind skeptisch wegen der hohen Anzahl $k = 12$ von markierten Fischen beim Wiedereinfangen und hätten einen kleineren Wert erwartet. Wir testen daher

$H_0 : N = 1000$ versus $H_A : N < 1000$

und berechnen unter der Annahme, dass H_0 gilt, die Wahrscheinlichkeit einer Beobachtung, die mindestens so hoch ist wie die von uns erhaltene Zahl von $k = 12$ Fischen:

$$\begin{aligned} P(X \geq 12 \mid 1000) &= 1 - P(X < 12 \mid 1000) \\ &= h_0(1000) + h_1(1000) + \ldots + h_{11}(1000) \\ &= 4{,}66\ \%. \end{aligned}$$

4.6 Variante: Feste Vorgabe der Zahl markierter Tiere beim zweiten Fang

Eine Alternative besteht darin, beim Wiedereinfangen an Stelle einer fest vorgegebenen Anzahl so lange Fische zu fangen, bis eine feste Zahl $X = k$ markierter Fische eingefangen wurde. Die Schätzung für die Gesamtpopulation errechnet sich nach derselben Formel

$$\hat{N} = \frac{M \cdot n}{k}.$$

Die mathematische Analyse ist jetzt um vieles einfacher, da mit n der zufällige Term im Zähler steht. Damit vermeidet man zufallsbedingte Ausreißer aufgrund eines sehr kleinen Nenners k. Wir unterscheiden zwei Ziehungsmodi:

Werden die Tiere nicht gefangen, sondern nur beobachtet, so lässt sich die Zufallsvariable n mittels der negativen Binomialverteilung (Warten auf k-ten Erfolg) modellieren (siehe z.B. Henze 1997). Das Experiment entspricht dann im Urnenmodell dem Warten auf die k-te rote Kugel beim Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit M roten und N - M schwarzen Kugeln. Falls M und das zufällige n klein sind, dann spielt es für die mathematische Analyse keine große Rolle, nach welchem Ziehungsmodus (ob mit oder ohne Zurücklegen) die Tiere eingefangen bzw. beobachtet werden. Daher beziehen sich Scheaffer, Mendenhall und Ott (1986) auch beim Einfangen ohne Zurücklegen auf eine negative Binomialverteilung, die zu folgenden Ausdrücken für den Erwartungswert und die Varianz führen:

$$\mathrm{E}(\hat{N}) = \frac{M}{k} \cdot \mathrm{E}(n) = \frac{M}{k} \cdot \frac{k}{p} = N,$$

$$\mathrm{Var}(\hat{N}) = \frac{M^2}{k^2} \cdot \mathrm{Var}(n) = \frac{M^2}{k^2} \cdot k \cdot \frac{1-p}{p^2}$$

$$= \frac{M^2}{k^2} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N^2}{M^2} = \frac{N \cdot (N-M)}{k}.$$

Hält man am Ziehungsmodus ohne Zurücklegen fest, vielleicht weil M und k nicht klein gegenüber N sind, so folgt die Verteilung der Zufallsgröße n einer negativen hypergeometrischen Verteilung mit Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f_{N,M,k}(r) = \frac{\binom{M}{k-1}\binom{N-M}{r-k}}{\binom{N}{r-1}} \cdot \frac{M-k+1}{N-r+1},$$

$r = k, k+1, \ldots, k+N-M.$

Diese Formel gründet im Urnenmodell auf der Überlegung, dass unter den ersten r - 1 Ziehungen k - 1 Erfolge (z.B. rote Kugeln) eintreten bevor dann bei der r-ten Ziehung unter den verbleibenden $N - r + 1$ Kugeln eine der $M - k + 1$ roten Kugeln gezogen wird. Erwartungswert und Varianz dieser weniger bekannten Verteilung errechnen sich als (Johnson und Kotz 1970)

$$\mathrm{E}(n) = \frac{kN}{M+1},$$

$$\mathrm{Var}(n) = \frac{k(N+1)(N-M)(M+1-k)}{(M+1)^2(M+2)}$$

Hieraus ergeben sich

$$E(\hat{N}) = \frac{M}{M+1} \cdot N,$$

$$Var(\hat{N}) = \frac{M^2(N+1)(N-M)(M+1-k)}{k(M+1)^2(M+2)},$$

d. h. dieser Schätzer ist leicht verzerrt, weshalb in der Praxis (Seber 1973) dem modifizierten Schätzer

$$\tilde{N} = \frac{(M+1)n}{k}$$

der Vorzug gegeben wird.

5. Modellkritik: Was taugt die Methode für die Praxis?

Die Logik hinter der *Capture-Recapture*-Methode ist sehr plausibel. Der praktische Nutzen basiert aber auf einer Fülle von Annahmen, die in der Praxis nicht immer erfüllt sind. Die Markierung könnte z.B. herunterfallen, neue Tiere werden geboren, alte (markierte oder nicht-markierte) Tiere sterben, die Tiere durchmischen sich nicht wirklich, einige Tiere sind leichter einzufangen (und somit sowohl leichter zu markieren als auch wiedereinzufangen) als andere. Jedes dieser Ereignis-

Was schief laufen kann	**Einfluss auf $\hat{N}$**
Tieren verlieren Markierung	$\hat{N}$ zu hoch
Einige Tiere leichter zu fangen als andere	$\hat{N}$ zu niedrig
Tiere „durchmischen" sich schlecht	$\hat{N}$ zu niedrig oder zu hoch (hängt ab vom Ort oder der Methode des Einfangens)
Tiere sterben (verlassen Revier)	Kein Einfluss, falls markierte und nicht-markierte Tiere gleichermaßen betroffen sind und $\hat{N}$ den ursprünglichen Tierbestand bezeichnet.
Neue Tiere kommen hinzu	Kein Einfluss, falls $\hat{N}$ den neuen Tierbestand bezeichnet

se beeinflusst die Schätzung $\hat{N}$ der Gesamtzahl der Tiere. Man sollte hier ausführlich diskutieren, in welche Richtung diese verschiedenen Verletzungen der Modellannahmen wirken.

6. Zusammenfassung

Die Behandlung des Themas bietet fast alles, was an wichtigem statistischem Denken in Einführungskursen behandelt werden kann: Modellbildung, Intuition, Experimente und Versuchsaufbau, Computereinsatz, mathematische Analyse von Verteilungen, Konfidenzintervalle, Hypothesentesten und Modellkritik. Außerdem bietet es einen reizvollen Kontext, der leicht zu begreifen und von ökologisch-politischer Relevanz ist. Teile des hier Vorgeschlagenen können schon als Kurseinführung eingesetzt werden oder als Anwendungsbeispiel einzelner statistischer Konzepte. Die Übung mitsamt mathematischer Analyse bietet sich auch als zusammenfassender oder wiederholender Abschluss an.

7. Zur Software

Lisp-Stat für Windows wurde von Luke Tierney (University of Minnesota) Ende der 80-er Jahre als ein Dialekt der Programmiersprache LISP entwickelt. Wegen der eingebauten Graphikfähigkeit und spezieller Makro-Befehle ist es besonders für Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik geeignet. Lisp-Stat ist kostenlos im WWW verfügbar, z.B. unter

`www.statlab.uni-heidelberg.de`

Zahlreiche weitere Makros sind auf vielen Statistik-Servern bereitgestellt, z.B. in der internationalen Bibliothek Statlib der Carnegie-Mellon Universität in Pittsburgh

`lib.stat.cmu.edu`

Eine Version für Windows sowie Makros zum Capture-Recapture Problem sind verfügbar unter

`www.ph-ludwigsburg.de/`

`mathematik/personal/engel/.`

Laden des Makros recapt.lsp erzeugt einen Boxplot von Schätzungen der Gesamtzahl der Tiere basierend auf 100 Wiederholungen, wobei die Gesamtzahl auf $N = 400$ gesetzt ist. Die Werte für M und n können dabei über einen Schieberegler gewählt werden.
Etwas mehr Flexibilität erlaubt das Makro `caprecap.lsp`. Der Aufruf

```
(caprecap  m n r)
```

zusammen mit weiteren Lisp-Stat-Befehlen lässt auch vergleichende Boxplots wie in Abbildung 2 erzeugen. Zu allererst muss die Anzahl der Tiere im Teich mittels einer Liste mit Nullen angegeben werden, z.B. durch

```
(def teich (repeat 0 500))
```

Im Programm caprecap werden zunächst m Nullen auf Eins gesetzt („markiert"), bevor die zweite Stichprobe vom Umfang n gezogen wird, deren Anzahl Einsen gerade der Zahl markierte Tiere beim Recapture entspricht. Die Liste von geschätzten Populationsgrößen kann dann in einer Liste x abgespeichert werden, etwa in der Form

```
(def x1 (caprecap  m1 n1 r))
(def x2 (caprecap  m2 n2 r))
```

und im vergleichenden Boxplot dargestellt werden:

```
(boxplot (list x1 x2 ...)).
```

Literatur

Henze, N. (1997): Stochastik für Einsteiger. Wiesbaden: Vieweg.

Johnson, N.L.; Kotz, S. (1970): Distributions in Statistics. Discrete Distributions. Houghton Mifflin: Boston.

Perry, M.; Kader, G. (1998): Counting penguins. The Mathematics Teacher, 91 (2), S. 110 - 116.

Scheaffer, R.; Mendenhall, W.; Ott, L. (1986): Elementary Survey Sampling. Boston: Wadsworth.

Scheaffer, R.; Gnanadesikan; M., Watkins, A.; Witmer, J. (1998): Activity-based Statistics. Instructor Resources. New York: Springer.

Seber, G. A. (1973): The Estimation of Animal Abundance and related parameters. London: Griffin.

Tanur, J. et al. (1989): Statistics. A Guide to the Unknown. Belmont, CA: Duxbury Press.

Anschrift des Verfassers:

Dr. Joachim Engel
Pädagogische Hochschule Ludwigsburg
Institut für Mathematik und Informatik
Postfach 220
71602 Ludwigsburg
engel_joachim@ph-ludwigsburg.de