

Erfahrungen mit einer Grundkurs-Abituraufgabe

ACHIM HILDEBRAND, SPENGE

Den Lernbereich Stochastik haben die Schülerinnen und Schüler in meinem Mathematik-Grundkurs an der Erich-Kästner Gesamtschule in Bünde in den Kurshalbjahren 12.2 und 13.1 behandelt. Dabei wurden die folgenden Unterrichtsgegenstände bearbeitet:

Absolute und relative Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit, grundlegende Regeln, graphische Darstellungsformen. Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten: Baumdiagramme, Pfadregeln, abhängige und unabhängige Ereignisse, Vierfeldertafeln, Urnenmodell, Kombinatorik. Merkmale und Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Erwartungswert und Standardabweichung von Zufallsgrößen, Bernoulli-Versuche und Binomialverteilung, kumulierte Binomialverteilung, Erwartungswert und Standardabweichung bei Binomialverteilung, Wahrscheinlichkeit von σ -Umgebungen, Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe, einseitiger und zweiseitiger Hypothesentest.

Als Lehrbuch diente das Buch „Mathematik heute, Grundkurs Stochastik“ aus dem Schroedel-Verlag.

Die folgende Aufgabe bildete zusammen mit einer Analysisaufgabe die Abiturklausur 2000. Die

Schülerinnen und Schüler hatten für die Bearbeitung 3 Stunden Zeit.

Als Hilfsmittel durften sie einen nicht programmierbaren Taschenrechner, eine Formelsammlung, sowie die Tabelle kumulierter Wahrscheinlichkeiten mit $n=100$ benutzen.

Aufgabenstellung

In der Gemeinde Suhldorf fanden am vergangenen Sonntag Gemeinderatswahlen statt. Die großen Parteien auf Bundesebene spielen in Suhldorf keine Rolle. Hier gibt es seit 50 Jahren nur zwei Parteien, die PdL (Partei der Landwirte) mit ihrem langjährigen Vorsitzenden, Bauer Piepenbrink und die PSH (Partei der Selbständigen und Handwerker). Eine weitere Besonderheit in Suhldorf: Es gibt keine ungültigen Stimmen. Zum Wahlausgang erschienen in den beiden örtlichen Tageszeitungen folgende Artikel:

Über 50jährige bringen der PdL den Sieg

Bei den Gemeinderatswahlen in Suhldorf erhielt die PdL 60 % der abgegebenen Zweitstimmen.

Diesen Sieg hat die PdL den Wählerinnen und Wählern über 50 zu verdanken. Immerhin waren laut Umfragen 71,2 % ihrer Wählerinnen und Wähler über 50 Jahre alt.

Bei den Wählern der PSH liegt der Anteil dieser Altersgruppe nur bei 32,4 %.

PdL kann sich auf Ältere verlassen

Die PdL und ihr Vorsitzender Karl-Wilhelm Piepenbrink gewann gestern souverän die Gemeinderatswahl.

Dies ist nicht zuletzt auf die über 50jährigen zurückzuführen, die 55,7 % der Wählerinnen und Wähler in Suhldorf stellten. In dieser Altersgruppe wählten 76,7 % die PdL, wogegen von den Wählerinnen und Wählern, die 50 Jahre oder jünger sind, 60,9 % der PSH ihre Stimme gaben.

2.1 Beide Zeitungsartikel beschreiben dieselbe Wahl. Trotzdem wird mit unterschiedlichen Prozentangaben argumentiert. Ist einer der beiden Artikel fehlerhaft?

2.2 Es werden 100 Wählerinnen und Wähler zufällig ausgesucht.

(1) Wie groß ist Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 36 Personen die PSH gewählt haben?

(2) Wie groß ist Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 62 Personen die PdL gewählt haben?

(3) Wie groß ist Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 51 und 66 Personen die PdL gewählt haben?

2.3 Im Vorfeld der nächsten Gemeinderatswahl 2004 tagt der Parteivorstand der PdL. Der Vorsitzende, Bauer Piepenbrink, meint, man müsse sich verstärkt um die jüngeren Wählerinnen und Wähler bemühen. Eine demographische Untersuchung zeige nämlich, dass der Anteil der über 50-jährigen bei den Wahlberechtigten abgenommen habe. Damit sinke auch der Stimmenanteil der PdL. Er schlägt deshalb eine große Werbekampagne vor.

Der Schatzmeister der PdL, Bauer Grautebohnenkamp, denkt an die Kosten hierfür und meint, dies sei nicht notwendig. Der Stimmenanteil der PdL sei gegenüber 2000 nicht gesunken. Die Eltern würden ihre Kinder schon zur Wahl der „richtigen Partei“ erziehen.

Der Parteivorstand beschließt vor einer endgültigen Entscheidung eine Umfrage unter 200 Wählerinnen und Wählern durchzuführen. Diese soll vom Pressesprecher, Dr. Schmitz-Rottluff statistisch ausgewertet werden.

Gib zu den Standpunkten des Vorsitzenden und des Schatzmeisters geeignete Hypothesen an und formuliere Entscheidungsregeln für die Umfrage.

(Irrtumswahrscheinlichkeit: 5 %)

2.4 Bei der Umfrage haben 105 Personen angegeben, die PdL zu wählen. Würde diese Anzahl bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1 % zu einer Ablehnung der Hypothese des Schatzmeisters führen?

Erwartete Schülerleistung

In Nordrhein-Westfalen müssen die bei der Schulaufsicht eingereichten Abiturvorschläge neben den Lösungen auch einen Erwartungshorizont unter Berücksichtigung der unterrichtlichen Voraussetzungen enthalten. Zu dieser Aufgabe habe ich hierfür folgendes geschrieben:

Die Arbeit mit Baumdiagrammen wurde anhand einer Reihe von Beispielen im Unterricht geübt. Die Frage im Aufgabenteil 2.1 ist dagegen neu für die Schüler. Im Rahmen der Behandlung bedingter Wahrscheinlichkeiten wurde anhand eines Beispiels ein ähnliches Problem aber schon einmal behandelt, sodass für die Schüler diese Aufgabe lösbar sein sollte. Damit kann der Teil 2.1 dem Anforderungsbereich II zugeordnet werden.

Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei n-stufigen Bernoulli-Versuchen wurde häufig im

Unterricht geübt, u.a. auch mit Tabellen für kumulierte Wahrscheinlichkeiten. Dabei wurden aber Ereignisse mit einer Erfolgswahrscheinlichkeit $p > 0,5$ nur am Rande betrachtet. Aus diesem Grund würde ich die Aufgabenteile 2.2 (1) dem Anforderungsbereich I und die Teile (2) und (3) dem Anforderungsbereich II zuordnen.

Das Finden von Entscheidungsregeln bei einem einseitigen Hypothesentest ist im Unterricht behandelt worden. Allerdings ist dieses Beispiel mit zwei zu testenden Hypothesen komplexer als die im Unterricht behandelten Fälle. Aus diesem Grund ordne ich die Teile 2.3 und 2.4 dem Anforderungsbereich I mit Anteilen von Anforderungsbereich II zu.

Der Anforderungsbereich III wurde meiner Meinung nach bei dieser Aufgabe nicht erreicht. Dies war aber bei der Analysisaufgabe der Fall.

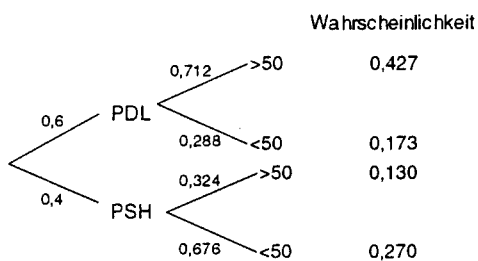
Lösung der Aufgabe

2.1 Grundlage des Vergleichs sind die folgenden Baumdiagramme:

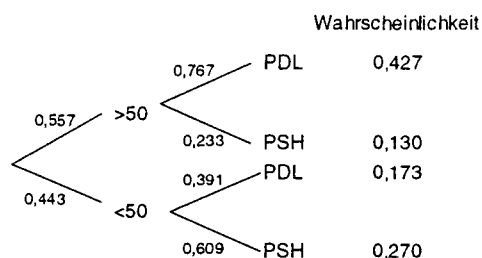
PDL: PDL gewählt; PSH: PSH gewählt; >50: Person ist älter als 50;

<50: Person ist 50 Jahre oder jünger

1.Artikel:



2.Artikel:



Die Wahrscheinlichkeiten für gleiche Pfade, sind in beiden Diagrammen gleich, Beispiel: Für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person die PDL gewählt hat und 50 Jahre oder jünger ist ($P(\text{PDL} \cap <50)$) erhält man in beiden Diagrammen 0,173. Damit wurde nachgewiesen, dass beide Artikel trotz unterschiedlicher Prozentangaben richtig sind.

2.2 Der Versuch kann als 100 stufiger Bernoulli-Versuch aufgefasst werden.

(1): $n=100$; $p=0,4$; $X :=$ Anzahl der PSH-Wähler

$$\begin{aligned} P(X > 36) &= 1 - P(X \leq 36) \\ &= 1 - 0,239 \\ &= 0,761 \end{aligned}$$

(2): $n=100$; $p=0,6$; $X :=$ Anzahl der PDL-Wähler; $q=0,4$; $Y :=$ Anzahl der PSH-Wähler

$$\begin{aligned} P(X < 62) &= P(Y > 38) \\ &= 1 - P(Y \leq 38) \\ &= 1 - 0,382 \\ &= 0,618 \end{aligned}$$

(3): $n=100$; $p=0,6$; $X :=$ Anzahl der PDL-Wähler; $q=0,4$; $Y :=$ Anzahl der PSH-Wähler

$$\begin{aligned} P(51 \leq X \leq 66) &= P(34 \leq Y \leq 49) \\ &= P(Y \leq 49) - P(Y \leq 33) \\ &= 0,973 - 0,091 \\ &= 0,882 \end{aligned}$$

2.3:

(1) Die Umfrage kann als 200 stufiger Bernoulli-Versuch aufgefasst werden.

Standpunkt von Bauer Piepenbrink: $p < 0,6$ (Hypothese H_1).

Standpunkt von Bauer Feldherter: $p \geq 0,6$ (Hypothese H_2).

Es sei X : Anzahl der Personen, die PDL wählen.

Für $n=200$ und $p=0,6$

$$\Rightarrow \mu = 120; \sigma = \sqrt{200 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = 6,928\dots$$

Um H_1 zu bestätigen wird die Hypothese $p \geq 0,6$ getestet.

Der Verwerfungsbereich für $\alpha = 5\%$ liegt bei:

$$X < \mu - 1,64\sigma.$$

$$X < 108,63\dots$$

\Rightarrow Entscheidungsregel: Die Hypothese $p \geq 0,6$ wird verworfen und damit der Standpunkt des Vorsitzenden bestätigt, wenn weniger als 109 Personen die PDL wählen.

Um H_2 zu bestätigen wird die Hypothese $p < 0,6$ getestet.

Der Verwerfungsbereich für $\alpha = 5\%$ liegt bei:

$$X \geq \mu + 1,64\sigma.$$

$$X \geq 131,36\dots$$

\Rightarrow Entscheidungsregel: Die Hypothese $p < 0,6$ wird verworfen und damit der Standpunkt des Schatzmeisters bestätigt, wenn mehr als 131 Personen die PDL wählen.

2.4: Bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1% ergibt sich bei gleichem μ und σ

$$X < \mu - 2,33\sigma$$

$$X < 103,85\dots$$

\Rightarrow Der Verwerfungsbereich der Hypothese $p \geq 0,6$ liegt bei $X < 104$. Bei 105 Personen, welche die PDL wählen, kann diese Hypothese bei $\alpha = 1\%$ nicht verworfen werden. Damit kann auch die Vermutung des Vorsitzenden nicht bestätigt werden.

Zu den erreichten Ergebnissen

Die Schülerinnen und Schüler sind mit dieser Stochastikaufgabe sehr unterschiedlich zurecht gekom-

men. Dies lag in erster Linie an der sehr inhomogenen Leistungsfähigkeit innerhalb des Kurses, was sich schon in den vorangegangenen Klausuren gezeigt hatte. Die Ergebnisse der Abiturklausur bestätigten diese Tatsache: drei mit gut bewerteten Klausuren standen auch drei mit ungenügend Bewerteten gegenüber. Diese letzten drei Prüflinge haben dabei keinen einzigen Punkt bei der Stochastikaufgabe bekommen.

Die drei Prüflinge, deren Klausur mit gut bewertet wurde, erreichten bei dieser Aufgabe dagegen zwischen 75% und 82% der Punkte. Im Durchschnitt wurden bei der Stochastikaufgabe 40% der Punkte erreicht. Bei der Analysisaufgabe waren es 44%.

Die folgende Tabelle zeigt für die einzelnen Teilaufgaben die maximal zu erreichende Punktzahl sowie die im Durchschnitt erreichte Prüfungsleistung:

Aufgabenteil	maximale Punktzahl	durchschnittliche Prüfungsleistung (in %)
2.1	16	26
2.2	25	45
2.3	20	48
2.4	7	34

Besonders auffällig ist die geringe durchschnittliche Prüfungsleistung im Aufgabenteil 2.1. Die Lösungsversuche der Schüler lassen vermuten, dass eine Reihe von ihnen Schwierigkeiten hatte, die Informationen des Textes in ein mathematisches Modell umzusetzen.

Literatur

H. Griesel, H. Postel (1990): Mathematik heute, Grundkurs Stochastik. Hannover: Schroedel Schulbucherlag

Anschrift des Verfassers:

Dr. Achim Hildebrand
Rottbusch 11a
32139 Spenge