Intransitive Würfel [1]

M. N. DESHPANDE, INDIEN
Übersetzung: JOACHIM ENGEL, LUDWIGSBURG

Zusammenfassung: *In diesem Aufsatz werden einige interessante Resultate über intransitive Würfel vorgestellt.*

1 Einleitung

In diesem Aufsatz betrachten wir Würfel mit n Seitenflächen. Auf jeder Fläche steht eine Zahl (die Zahlen müssen nicht unbedingt verschieden sein). Die Wahrscheinlichkeiten aller Flächen sind gleich. Wir betrachten k Würfel $W_1, W_2, \ldots, W_k$ und bezeichnen mit x_i das Resultat, wenn der i-te Würfel geworfen wird. ('Resultat' ist geeignet definiert, etwa als die Zahl auf der obersten Fläche). Wir sagen, dass W_i den Würfel W_j schlägt, wenn $x_i > x_j$.

Definition
Die Menge $W_1, W_2, \ldots, W_k$ ist eine Menge von intransitiven Würfeln, wenn
(i) $P(W_i \text{ schlägt } W_{i+1}) > 1/2$ für $i = 1, 2, \ldots, k-1$ und
(ii) $P(W_k \text{ schlägt } W_1) > 1/2$.

Illustration
Das folgende ist ein bekanntes Beispiel von drei intransitiven Würfel:

	Würfel		
	1	2	3
Zahl auf	4	2	1
Fläche	4	2	1
	5	3	7
	5	3	7
	6	9	8
	6	9	8

Wir diskutieren jetzt ein allgemeineres Problem und stellen eine Lösung vor.

2 Verallgemeinerung

Wir betrachten nun folgendes Problem: Ist es möglich n Würfel zu haben, wobei jeder Würfel n Flächen hat, so dass diese eine Menge von n intransitiven Würfel bilden? Die Antwort ist 'Ja' und wir betrachten eine Lösung.

Natürlich muss $n \geq 3$ sein, da es keine zwei Würfel mit nur zwei Seiten (d.h. also Münzen) gibt, die eine intransitive Menge bilden. Bevor wir den allgemeinen Fall betrachten, geben wir eine Lösung für $n = 3, 4, 5$ und 6:

$n=3$	Würfel		
	1	2	3
Zahl auf	3	2	1
Fläche	5	4	7
	6	9	8

$n=4$	Würfel			
	1	2	3	4
Zahl auf	4	3	2	1
Fläche	7	6	5	11
	9	8	13	12
	10	16	15	14

$n=5$	Würfel				
	1	2	3	4	5
Zahl auf	5	4	3	2	1
Fläche	9	8	7	6	16
	12	11	10	18	17
	14	13	21	20	19
	15	25	24	23	22

$n=6$	Würfel					
Zahl auf	6	5	4	3	2	1
Fläche	11	10	9	8	7	22
	15	14	13	12	24	23
	18	17	16	27	26	25
	20	19	31	30	29	28
	21	36	35	34	33	32

Für diese Würfel ist leicht nachzuprüfen:

[1] Übersetzung aus *Teaching Statistics*, 2000 (1), 4-5

		Würfel-Nummer							
		1	2	3	...	$n-3$	$n-2$	$n-1$	n
	1	n	$n-1$	$n-2$	...	4	3	2	1
	2	$2n-1$	$2n-2$	$2n-3$	...	$n+3$	$n+2$	$n+1$	T_n+1
	3	$3n-3$	$3n-4$	$3n-5$	...	$2n+1$	$2n$	T_n+3	T_n+2
Zahl	4	$4n-6$	$4n-7$	$4n-8$	...	$3n-2$	T_n+6	T_n+5	T_n+4
	5	$5n-10$	$5n-11$	$5n-12$	...	T_n+10	T_n+9	T_n+8	T_n+7
		...	...	...	...	...	...	...	...
	n	T_n	n^2	n^2-1	...	n^2-n+5	n^2-n+4	n^2-n+3	n^2-n+2

Tab. 1:

(1) $n=3$: $P(W_i \text{ schlägt } W_{i+1}) = 5/9$ für $i=1,2$
$P(W_3 \text{ schlägt } W_1) = 6/9$

(2) $n=4$: $P(W_i \text{ schlägt } W_{i+1}) = 9/16, i=1,2,3$
$P(W_4 \text{ schlägt } W_1) = 12/16$

(3) $n=5$: $P(W_i \text{ schlägt } W_{i+1}) = 14/25, i=1,2,3,4$
$P(W_5 \text{ schlägt } W_1) = 20/25$

(4) $n=6$: $P(W_i \text{ schlägt } W_{i+1}) = 20/36, i=1,\ldots,5$
$P(W_6 \text{ schlägt } W_1) = 30/36$

Betrachtungen dieser Lösungen führen uns zu einer allgemeinen Konstruktion von n intransitiven Würfeln mit n Flächen, wie in Tabelle 1 angezeigt. Es bezeichne a_{ij} die Zahl auf der i-ten Fläche des j-ten Würfels. Dann ist die Konstruktion wie folgt:

$$a_{ij} = \begin{cases} in+1-D_{i-1}-j, & \text{für } i+j \leq n+1 \\ D_n+D_{i-2}+n+1-j, & \text{für } i+j > n+1 \end{cases}$$

wobei die D_k die Dreieckszahlen bezeiche ($D_0 = 0, D_1 = 1, D_2 = 3, D_3 = 6, D_4 = 10, D_5 = 15$ usw.; allgmein: $D_k = D_{k-1} + k$).

Man sieht leicht, dass

$$P(W_i \text{ schlägt } W_{i+1}) = (D_n - 1)/n^2, i = 1, \ldots n-1$$

und

$$P(W_n \text{ schlägt } W_1) = 1 - 1/n.$$

Für $n \geq 3$ sind die obigen Wahrscheinlichkeiten alle größer 1/2, so dass die Würfel intransitiv sind.

Weitere Fragen bleiben noch offen:

- Ist die Lösung eindeutig?
- In dieser Lösung werden die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n^2$ verwendet. Kann eine Lösung auch mit weniger Zahlen erreicht werden?

Anmerkung des Übersetzers:

1. Ein Beispiel für vier intrasitive Würfel mit sechs Seiten findet sich in dem Buch *Stochastik* von Arthur Engel aus dem Jahr 1989 (S. 26).
2. Im Heft 2000 (3) von *Teaching Statistics* beantwortet derselbe Autor die letzte der beiden offenen Fragen konstruktiv. Man betrachte n Würfel mit folgenden Zahlen auf ihren n Seiten: auf dem i-ten Würfel steht auf $n-i+1$ Seiten die Zahl $n-i+1$, während auf den verbleibenden $i-1$ Seiten die Zahl $2n-i+1$ steht. Diese bilden eine Menge von n intransitiven Würfeln, wie sich leicht nachprüfen lässt.

Anschrift des Verfassers
M. N. Deshpande
Institute of Science
Nagpur
Indien