Die Analyse eines Buchtextes als LK-Abituraufgabe

HEINZ ALTHOFF, BIELEFELD

Zusammenfassung
Die folgende LK-Abituraufgabe unterscheidet sich von anderen Abituraufgaben dadurch, dass die Prüflinge in dieser Aufgabe einen Textabschnitt aus einem Buch von N. Henze ("Stochastik für Einsteiger") analysieren müssen. Neben der Aufgabenstellung und einer möglichen Lösung wird über die unterrichtlichen Voraussetzungen und Erfahrungen mit der Aufgabe berichtet.

Vorbemerkungen

In der Abiturklausur 2001 meines Leistungskurses habe ich, eingerahmt von je einer "normalen" Analysis- und Stochastikaufgabe (vgl. Aufgabe 2a) bis c) in Althoff 1996), eine Stochastikaufgabe gestellt, in der Prüflinge einen Text aus dem Buch "Stochastik für Einsteiger" von N. Henze (vgl. Anlage) analysieren sollten. Zur Bearbeitung der drei Aufgaben, die ich mit gleicher Punktzahl 40 bewertet habe, standen den Prüflingen insgesamt 4 1/4 Zeitstunden zur Verfügung.

Eine Aufgabe dieser Art hatte ich im Abitur bisher weder selbst gestellt noch anderswo gesehen. Die in der Aufgabe verlangten Fähigkeiten im Mathematikunterricht auszubilden halte ich aber für so wesentlich, dass ich das Experiment mit dieser Aufgabe im Abitur gewagt habe, und ich kann es zur Nachahmung empfehlen!

Voraussetzung für das Stellen einer solchen Aufgabe in einer Klausur ist allerdings, dass die Prüflinge aus dem Unterricht das Lesen und Verarbeiten (z. B. für Referate) wissenschaftlicher mathematischer Texte gewohnt sind. In meinem überdurchschnittlich leistungsfähigen LK gehörten u. a. das eingeführte Lehrbuch (Althoff 1985), Ausarbeitungen früherer Leistungskurse (Althoff 1999) sowie das Kapitel "Elemente der Kombinatorik" aus (Henze 1997[1]) zur mathematischen Lektüre. Daneben war der Besuch eines Vortrags von Henze am 12.12.2000 im Didaktischen Seminar der Universität Bielefeld eine Pflichtveranstaltung (anstelle ausgefallener Unterrichtsstunden). Vom Unterricht her waren es meine Prüflinge also gewohnt, (fremde) mathematische Texte zu analysieren und darin dargestellte Sachverhalte und Zusammenhänge zu interpretieren und zu begründen.

In dieser Abituraufgabe sollten sie nun zeigen, zu welchem Grad an Verständnis und Darstellungsfähigkeit sie am Ende ihres schulischen Mathematikunterrichts gelangt waren.

Anlage zur Aufgabe

(Die Prüflinge haben eine Kopie der Seiten 70 -72 aus dem Buch (Henze 2000[3]) bekommen; für ein besseres Layout in diesem Aufsatz hat N. Henze dankenswerterweise ein file aus seinem Buchmanuskript zur Verfügung gestellt, siehe Anhang.)

Aufgabenstellung

In der Anlage, die aus dem Ihnen bekannten Buch "Stochastik für Einsteiger" von Henze stammt, bewertet der Autor eine "Lottosensation" aus der Sicht des Fachmanns.

a) Was ist der wesentliche Inhalt der Sensationsmeldung, was besagt die stochastische Bewertung der Meldung durch Henze?

b) Zeigen Sie, wie man die in der letzten Zeile angegebene Wahrscheinlichkeit $\frac{10}{36}$ berechnen kann.

c) Begründen Sie, dass $P(X_n \geq k+1)$ in (10.1) die Wahrscheinlichkeit dafür bedeutet, dass die erste Kollision frühestens bei der $(k+1)-$ten Lottoausspielung, also nicht bis zur k-ten Lottoausspielung erfolgt.
Für welches Ereignis wird dann in (10.2) die Wahrscheinlichkeit angegeben?

d) Sie sollen sich nun mit dem Ansatz (10.1) genauer beschäftigen.

   d_1) Welches k-stufige Zufallsexperiment wird hier betrachtet?

   d_2) Warum kann Henze hier ein Laplace-Modell benutzen?

   d_3) Erläutern Sie möglichst genau, wie sich der Nenner und wie sich der Zähler ergibt.

e) Auf Seite 73 seines Buchs schreibt Henze: "Abschließend sei bemerkt, dass das Paradoxon der ersten Kollision in anderem Gewand als *Geburtstagsproblem* bekannt ist."

Begründen Sie diese Aussage. (Eine nützliche Hilfe kann dabei das Fächerbelegungsmodell sein.)

(Mögliche) Lösung der Aufgabe

a) Die "Sensation" besteht darin, dass man "normalerweise" nach so kurzer Zeit keine von ca. 14 Millionen möglichen Gewinnreihen schon zum zweiten Mal zieht. Rein intuitiv hält man dieses Ereignis nämlich für sehr unwahrscheinlich. Henze zeigt mit mathematischen Hilfsmitteln, dass die "Sensation" in Wirklichkeit gar keine ist, da die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des betrachteten Ereignisses mit fast 30 % wesentlich größer ist als man intuitiv annimmt.

b) Unterscheidet man (gedanklich) die beiden Würfel und betrachtet als *mögliche* Versuchsausfälle geordnete Paare, so gibt es 36 gleichwahrscheinliche Versuchausfälle. Von diesen sind, wie man leicht abzählen kann, 10 *günstig*. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme höchstens 5 beträgt, $\frac{10}{36}$.

c) Beschreibt man die Zufallsgröße X_n als Nummer derjenigen Lottoausspielung, bei der *zum ersten Mal eine Kollision auftritt* (was der von Henze gewählten Beschreibung für X_n entspricht), so erkennt man sofort die Richtigkeit der im Aufgabentext formulierten Interpretation. In (10.2) wird dann die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis "die erste Kollision erfolgt spätestens bei der k-ten Lottoausspielung" angegeben.

d_1) Das k-malige Ziehen einer Gewinnreihe.

d_2) Man kann davon ausgehen, das alle $n = \binom{49}{6}$ möglichen Gewinnreihenauslosungen und deshalb auch alle daraus gebildeten k-Tupel gleichwahrscheinlich sind.

d_3) *Mögliche* Versuchsausfälle sind hier alle k-Tupel, deren Komponenten n mögliche Werte haben. Es handelt sich also um die k-Permutationen mit Wiederholung aus $\{1,2,\ldots,n\}$, davon gibt es n^k.
Günstige Versuchsausfälle sind alle k-Tupel mit verschiedenen Komponenten, also die k-Permutationen ohne Wiederholung aus $\{1,2,\ldots,n\}$, davon gibt es $n*(n-1)*(n-2)*\ldots*(n-(k-1))$.

e) Das Geburtstagsproblem (Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben von k Personen wenigstens zwei am gleichen Tag Geburtstag?) bedeutet im Fächerbelegungsmodell: k Kugeln werden zufällig auf 365 verschiedene Fächer verteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es wenigstens ein mehrfach belegtes Fach? Das in (10.2) betrachtete Ereignis (Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist nach spätestens k Lottoausspielungen eine Kollision eingetreten?) bedeutet im Fächerbelegungsmodell: k Kugeln wrden zufällig auf n Fächer verteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es wenigstens ein mehrfach belegtes Fach? Stochastisch gesehen liegt also das gleiche Problem vor.

Erfahrungen mit der Aufgabe

Im Gegensatz zu den beiden anderen Aufgaben habe ich beim Einreichen des Abiturvorschlags für diese Aufgabe kein Anforderungsniveau III ausgewiesen. Bei der Korrektur hat sich dann jedoch gezeigt, dass die Teilaufgaben c) (möglicherweise wegen der Formulierung) und d_3) (wegen "möglichst genau") doch wohl wenigstens teilweise in das Anforderungsniveau III hineinreichen.

Teilaufgabe b) wurde von allen, e) von fast allen, a) von einer großen Mehrheit ordentlich bearbeitet. Deutliche Leistungsunterschiede zeigten sich dagegen bei den Teilaufgaben c) und d). Dabei unterschieden sich die Lösungen der einzelnen Prüflinge oft deutlich in der Art der Darstellung und bei den selbständig formulierten Argumentationen und Interpretationen.

Auffallend schwach (im Vergleich zu den beiden anderen Aufgaben) wurde die Aufgabe von den beiden Prüflingen bearbeitet, die Deutsch nicht als Muttersprache hatten, vergleichsweise gut dagegen von drei Prüflingen, die bis zum Schluß ihrer Schulzeit mit Algebralücken aus der SI zu kämpfen hatten. Im Durchschnitt gesehen wurden alle drei Abituraufgaben in diesem LK gleich gut bearbeitet.

Literatur

Althoff, H. (1985) Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Verlag Metzler, Stuttgart

Althoff, H. (1996): Erfahrungen mit zwei Leistungskurs-Abituraufgaben. In: Stochastik in der Schule 16 (1996), Heft 3

Althoff, H. (1999): Das Lösen stochastischer Probleme mit Hilfe eines Fächerbelegungsmodells - ein Bericht über eine Unterrichtsreihe in einem Leistungskurs 13. In: Berichte aus dem Seminar für Didaktik der Mathematik WS 97/98 und SS 98, Universität Bielefeld (herausgegeben von H. Althoff)

Henze, N. (1997[1] bzw. 2000[3]): Stochastik für Einsteiger. Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.

Anschrift des Verfassers:
Heinz Althoff
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
althoff@mathematik.uni-bielefeld.de

Das Paradoxon der ersten Kollision

Bekanntlich ist die Urlaubs– und Ferienzeit relativ arm an aufregenden Ereignissen, und wir sind längst daran gewöhnt, dass Politiker aller Couleur dieses „Sommerloch" durch ungewöhnliche Aktionen oder Wortbeiträge zur Selbstdarstellung nutzen. Umso erfreulicher ist es, dass wir die erste Sommerloch–Sensation des Jahres 1995 nicht der Politik, sondern dem reinen Zufall verdankten! So konnte man der Tagespresse am 29.6.1995 die folgende Meldung entnehmen:

Erstmals im Lotto
dieselbe Zahlenreihe

Stuttgart (dpa/lsw). Die Staatliche Toto–Lotto GmbH in Stuttgart hat eine Lottosensation gemeldet: Zum ersten Mal in der 40jährigen Geschichte des deutschen Zahlenlottos wurden zwei identische Gewinnreihen festgestellt. Am 21. Juni dieses Jahres kam im Lotto am Mittwoch in der Ziehung A die Gewinnreihe 15–25–27–30–42–48 heraus. Genau die selben Zahlen wurden bei der 1628. Ausspielung im Samstaglotto schon einmal gezogen, nämlich am 20. Dezember 1986. Welch ein Lottozufall: Unter den 49 Zahlen sind fast 14 Millionen verschiedene Sechserreihen möglich.

Zur wahrscheinlichkeitstheoretischen Bewertung dieser angeblichen „Sensation" ist zunächst zu beachten, nach welchem Ereignis *gesucht* wurde. Offenbar gilt als Sensation, dass *irgendeine* Gewinnreihe *irgendeines* Lottos (Mittwochslotto A, Mittwochslotto B oder Samstagslotto) schon in *irgendeiner* früheren Ziehung aufgetreten ist. Aus diesem Grunde müssen wir die Ausspielungen aller drei wöchentlich stattfindenden Ziehungen zusammenfassen. Da bis zum 21.6.1995 2071 Ausspielungen des Samstagslottos und jeweils 472 Ausspielungen des Mittwochslottos A (bzw. B) erfolgt waren, besteht das sensationelle Ereignis anscheinend darin, dass zum ersten Mal in der 3016ten Ausspielung eine Gewinnreihe erneut aufgetreten ist.

Natürlich wäre die Sensation noch größer gewesen, wenn diese erste Gewinnreihen–Wiederholung schon früher erfolgt wäre.

Für die nachfolgenden Betrachtungen setzen wir

$$n := \binom{49}{6} = 13\,983\,816$$

und denken uns alle Gewinnreihen *lexikographisch* durchnummeriert, d.h.

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\text{Nr. 1:} & 1 & - & 2 & - & 3 & - & 4 & - & 5 & - & 6 \\
\text{Nr. 2:} & 1 & - & 2 & - & 3 & - & 4 & - & 5 & - & 7 \\
\text{Nr. 3:} & 1 & - & 2 & - & 3 & - & 4 & - & 5 & - & 8 \\
\vdots & & & & & \vdots & & & & & & \vdots \\
\text{Nr. } n\text{:} & 44 & - & 45 & - & 46 & - & 47 & - & 48 & - & 49.
\end{array}$$

In dieser Deutung können wir uns die Ermittlung einer Gewinnreihe als rein zufälliges Besetzen eines von insgesamt n verschiedenen Fächern vorstellen.

Das anscheinend sensationelle Ereignis besteht nun offenbar darin, dass bei der sukzessiven rein zufälligen Besetzung von $n = 13\,983\,816$ verschiedenen Fächern *schon* beim 3016ten Mal die „erste Kollision“ auftrat, d.h. ein bereits besetztes Fach erneut besetzt wurde. Intuitiv würde man nämlich den „Zeitpunkt“ dieser ersten Kollision viel später erwarten. Würden Sie z.B. bei $n = 1000$ Fächern darauf wetten, dass die erste Kollision nach spätestens 50 Versuchen erfolgt ist?

Zur Modellierung des Kollisions–Phänomens betrachten wir die Zufallsvariable

$$X_n \;:=\; \text{Zeitpunkt der ersten Kollision beim sukzessiven rein zufälligen Besetzen von } n \text{ Fächern.}$$

Da mindestens 2 und höchstens $n+1$ Versuche (Zeiteinheiten) bis zur ersten Kollision nötig sind, nimmt X_n die Werte $2,3,\ldots,n+1$ an, und es gilt

$$P(X_n \geq k+1) \;=\; \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} \;=\; \frac{n^{\underline{k}}}{n^k} \qquad (1)$$

für jedes $k = 1,2,\ldots,n+1$. Um (1) einzusehen, beachte man, dass das Ereignis $\{X_n \geq k+1\}$ gleichbedeutend damit ist, dass bei der rein zufälligen Verteilung von k unterscheidbaren Teilchen auf n Fächer (Modell 9.2 (1)) alle Teilchen in verschiedenen Fächern liegen. Bei Annahme eines Laplace–Modells (Grundraum $Per_k^n(mW)$, $|Per_k^n(mW)| = n^k$) gibt der Zähler in (1) gerade die Anzahl der günstigen Fälle ($= |Per_k^n(oW)| = n^{\underline{k}} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$) an.

Aus (1) folgt durch Komplement–Bildung

$$P(X_n \leq k) \;=\; 1 - \prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) \qquad (2)$$

($k = 2,3,\ldots,n+1$; $P(X_n \leq 1) = 0$).

Tabelle 10.1 enthält die Wahrscheinlichkeiten $P(X_n \leq k)$ in Abhängigkeit von k für den Fall $n = 13\,983\,816$. Für das Ereignis $\{X_n \leq 3016\}$ gilt $P(X_n \leq 3016) = 0.2775\ldots$ Die Wahrscheinlichkeit des als „Sensation“ angepriesenen Ereignisses ist somit kaum kleiner als die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen zweier echter Würfel eine Augensumme von höchstens 5 zu erhalten ($10/36 = 0.2777\ldots$).

k	$P(X_n \leq k)$	k	$P(X_n \leq k)$	k	$P(X_n \leq k)$
500	0.0089	4500	0.5152	8500	0.9245
1000	0.0351	5000	0.5909	9000	0.9448
1500	0.0773	5500	0.6609	9500	0.9603
2000	0.1332	6000	0.7240	10000	0.9720
2500	0.2002	6500	0.7792	10500	0.9806
3000	0.2751	7000	0.8266	11000	0.9868
3500	0.3546	7500	0.8662	11500	0.9912
4000	0.4356	8000	0.8986	12000	0.9942

Tab. 1: Wahrscheinlichkeit für die erste Kollision nach höchstens k Versuchen beim Besetzen von $n = \binom{49}{6}$ Fächern