Die Rolle der Simulation im Finanzmanagement

SIEGFRIED SZEBY, BERLIN

Zusammenfassung: *Die Modelle des Finanzmanagements beschreiben drei Phänomene: Dynamik, Risiko und Korrelationen (DRK-Modell). Die analytische Behandlung ist nur in relativ einfachen Spezialfällen möglich. In der Praxis ist häufig die Simulation an Stelle von unrealistischen Vereinfachungen die sinnvollere Alternative. Im Unterricht tritt die Simulation sogar bei relativ einfachen Aufgaben durchaus in Konkurrenz zum analytischen Vorgehen, da sie als spielerische Variante zumeist anschaulicher und in der Regel motivierender ist. Bei vielen Problemen der Stochastik ist die Simulation vielleicht nicht die elegantere, sicher aber die überzeugendere Methode. Als inhaltliche Erweiterung liefert die Finanzmathematik für den Mathematikunterricht interessantes Material. Exemplarisch sei die Bewertung von Optionen (Black-Scholes-Formel) genannt. Allein die Fragestellung, durch welchen Zufallsprozess man den Kursverlauf einer Aktie modellieren soll, um ihn dann zu simulieren, bildet eine anregende Ausgangssituation.*
Ergänzt um ein Glossar von H. Kilian

1 Das DRK-Modell

Die Modelle des Finanzmanagements beschreiben im Wesentlichen drei Sachverhalte:

(1) Wir möchten Zahlungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten bewerten und vergleichen.

(2) Neben sicheren Zahlungen werden auch Chancen und Risiken bei Kursentwicklungen berücksichtigt.

(3) Bei der gleichzeitigen Betrachtung mehrerer Wertpapiere sind auch Abhängigkeiten von Bedeutung.

Wir haben es also mit drei Phänomenen zu tun:

(1) Dynamik:
1000 € in bar – 1200 € in 3 Jahren

(2) Risiko:
Festzins-Anlage – Anlage in Aktien

(3) Korrelationen:
Aktie – Portfolio

Nicht immer treten alle drei Teilprobleme zusammen auf. So beschäftigen wir uns in der einfachen **Zinsrechnung** allein mit der Dynamik, während das Risiko und damit auch die gleichzeitige Betrachtung mehrerer korrelierter Anlagen keine Rolle spielen. Ein Beispiel dafür ist die Berechnung des Rentenendwertes einer regelmäßigen Zahlung.

Im Gegensatz dazu behandelt die **Portfoliotheorie** die Frage, wie man einen Betrag auf mehrere (korrelierte) Anlagen, z. B. Aktien, aufteilen muss, um das Risiko möglichst gering zu halten.

Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Behandlung von **Optionen**, bei denen die Dynamik und das Risiko die wesentliche Rolle spielen, also die Korrelation mehrerer Anlagemöglichkeiten nicht betrachtet wird.

Wer gern eine etwas systematischere Übersicht haben möchte, kann einige Beispiele für praktisch relevante Teilgebiete im Rahmen des DRK-Modells wiederfinden:

D - - = Zinsrechnung, ohne Risiko

- R - = Risiko, statisch

DR - = Aktien, Optionen (Black-Scholes)

- RK = Portfolio, statisch

DRK = Korrelierte Prozesse

Wenn wir das DRK-Modell als Metamodell akzeptieren, also als Rahmen für die verwendeten speziellen Modelle, stellen sich bei der Simulation einzelner Modelle folgende Fragen:

1. Welche Grundannahmen werden getroffen (z. B.: Zinssatz vom Betrag und von der Anlagefrist unabhängig?)
2. Welche Parameter sind erforderlich, um die einzelnen Modelle zu charakterisieren?
3. Was leisten die Modelle dann?

2 Simulation: einfache Implementierung

2.1 Das Modell

Ich möchte nun versuchen, alle drei Aspekte des DRK-Modells in einer einfachen Simulation des Verlaufs zweier Aktienkurse zu verdeutlichen.

Dynamik:

Wir gehen aus vom Anfangskurs S_0 = 100 € (die Bezeichnung „S“ für den Aktienkurs lässt sich durch den Begriff „stock price“ erklären) und einem jährlichen Zinssatz von p = 10% (Zinsrate q =

Stochastik in der Schule 22(2002)3, S. 12–22

$1 + p = 1{,}10$). Der Kurs S_t am Ende des Jahres t ergibt sich also aus dem des Vorjahres durch die „Bewegungsgleichung" $S_t = S_{t-1}q$.

Risiko:

Der tatsächliche Kurs wird vom Erwartungswert (jeweils für ein Jahr im voraus berechnet) aufgrund zufälliger Schwankungen abweichen. Im einfachsten Modell beschränken wir diese Abweichung durch einen festen Wert und nehmen für den Kurs eine Gleichverteilung (Rechteckverteilung) an. Um ein Zahlenbeispiel vor Augen zu haben, lassen wir den Kurs nach einem Jahr um maximal 10 € nach oben oder unten abweichen. Jeder Wert in diesem Bereich ist möglich. Die Spannweite ist also $b = 20$. (Die Varianz der Gleichverteilung ist $\sigma^2 = b^2/12 = 400/12 = 33{,}3$, die Standardabweichung $\sigma = 5{,}77$.) Mit Berücksichtigung des Risikos erhalten wir jetzt die Bewegungsgleichung $S_t = S_{t-1}q + X_1$, wobei X_1 eine gleichverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert 0 und der Spannweite 20 ist. Wir werden später die Gleichverteilung durch eine realistischere Verteilung, die Normalverteilung bzw. die Lognormalverteilung, ersetzen.

Korrelation:

Wenn wir gleichzeitig die Entwicklung zweier (oder mehrerer) Aktien untersuchen, müssen wir deren Korrelation beachten und bei der Simulation entsprechend modellieren. Wir müssen also eine Methode finden, um gleichgerichtete oder entgegengesetzte Tendenzen beider Kursentwicklungen durch entsprechende Korrelationen zu berücksichtigen.

Die Realität zeigt, dass z. B. viele DAX-Aktien untereinander positiv korreliert sind. Wenn der Kurs der Deutschen Bank steigt, dann tendenziell auch derjenige der Commerzbank. Natürlich ist dies nur ein stochastischer und kein deterministischer Zusammenhang.

In unserem Beispiel soll nun die Kursentwicklung einer zweiten Aktie bezüglich Dynamik und Risiko der ersten entsprechen. Wir möchten allerdings eine Korrelation der beiden Kurse simulieren. Genauer: Die jährlichen Abweichungen vom Erwartungswert sollen die gewünschte Korrelation von $p = -0{,}5$, also eine stark gegenläufige Tendenz aufweisen.

Eine allgemeine Methode zur Erzeugung korrelierter Zufallszahlen lässt sich mit Hilfe von Matrizenoperationen erreichen (Cholesky-Zerlegung, siehe http://www.lehre.fhw-berlin.de/fineng/risiko.htm). Wir beschränken uns hier auf die Korrelation zweier Zufallsvariablen.

Glossar: Was haben Zinsen mit Aktien zu tun?

Die Finanzmathematik muss mindestens ein Modell zur Verfügung stellen, durch das die Abhängigkeit des Wertes von Zahlungen bzw. von Kapital von den Zeitpunkten, zu denen sie erfolgen, dargestellt wird. Das allgemein übliche Modell ist das der Annahme eines in dem betrachteten Zeitraum konstanten Zinssatzes, verbunden mit der „Aufzinsung" bzw. „Abzinsung" des betrachteten Kapitals. Es sei p% der betrachtete Zinssatz, $i = p/100$ die zugehörige Zinsrate und $q = 1 + p/100$ der zugehörige Aufzinsungsfaktor. Ein Kapital K_0 zum Zeitpunkt $t=0$ hat nach n Jahren bezüglich des Zinssatzes p den Wert $K_n = K_0q^n$ bzw. ein Kapital, welches zum Zeitpunkt $t = t_0 + n$ Jahre den Wert K_n hat, hat zur Zeit t_0 den „abgezinsten" oder „diskontierten" Wert $K_0 = K_n/q^n$. Diesen Grundgedanken verallgemeinernd trifft man die folgenden **Definitionen:**

Eine Zahlungsfolge $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ zu den Zeitpunkten $t_1, t_2, \ldots, t_n$ hat zur Zeit T den **Gesamtwert** $G_T := \sum_{i=1}^{n} Z_i q^{T-t_i}$. Falls $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ eine monoton steigende Folge von Zeitpunkten ist, dann heißt der Gesamtwert

Barwert der Zahlungen für $T = t_1$,
Endwert der Zahlungen für $T = t_n$.

Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik:

Zwei Zahlungsfolgen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ zu den Zeitpunkten $t_1, t_2, \ldots, t_n$ und $Z_1', Z_2', \ldots, Z_n'$ zu den Zeitpunkten $t_1', t_2', \ldots, t_n'$ heißen **äquivalent bezüglich des festen Zinssatzes p** bzw. Aufzinsungsfaktors q, wenn sie den gleichen Barwert haben.

Bemerkung: Äquivalente Zahlungsfolgen haben zu allen Zeitpunkten T denselben Gesamtwert, insbesondere also auch denselben Endwert.

Literatur: Grundmann, Wolfgang: Finanz- und Versicherungsmathematik. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1996. ISBN 3-8145-2087-3

Dazu verwenden wir zunächst (für jedes Jahr) eine weitere Zufallsvariable X_2, die von X_1 unabhängig ist und dieselbe Verteilung hat wie X_1. Aus X_1 und X_2 erzeugen wir nun die korrelierten Zufallsvariablen Y_1 und Y_2:

$$Y_1 = X_1$$

$$Y_2 = \rho X_1 + \sqrt{1-\rho^2}X_2$$

Aus der Voraussetzung, dass X_1 und X_2 unkorreliert sind, ergibt sich für Y_1 und Y_2 die gewünschte Korrelation ρ, und Y_1 und Y_2 haben dieselbe Varianz (σ^2) wie X_1 und X_2:

$V(Y_2) = \rho^2 V(X_1) + (1 - \rho^2)V(X_2)$
$= \rho^2\sigma^2 + (1 - \rho^2)\sigma^2 = \sigma^2$.

Mit anderen Worten: Je größer wir bei Y_2 den Anteil von X_1 wählen, desto größer ist die Korrelation zwischen Y_1 und Y_2. Im Extremfall haben wir $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_1$ mit der Korrelation 1 oder auch $Y_2 = -X_1$ mit der Korrelation –l. Im anderen Extremfall verwenden wir die unkorrelierten Variablen $Y_1 = X_1$, $Y_2 = X_2$, erhalten also die Korrelation 0.

Glossar: Eigenschaften des Korrelationskoeffizienten

Für die Zufallsgrößen X, Y, Z: $\Omega \to \mathbb{R}$ mögen die Varianzen V[X], V[Y] existieren. Dann existiert auch die Varianz V[X+Y], und es gilt:

$V[X + Y) = V[X]+ V[Y] + 2COV[X,Y]$ mit
$COV[X,Y].= E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$.

Bekanntlich gilt für alle a, b $\in \mathbb{R}$

$E[aX+ b] = aE[X] + b$, $V[aX + b] = a^2V[X]$.

Wie man leicht sieht, gilt dann auch:

$COV[aX + b,Y] = aCOV[X,Y]$.

Schließlich verweisen wir noch auf

$COV[X,X] = V[X]$ und

$COV[X+Y,Z] = COV[X,Z] + COV[Y,Z]$.

Für den Korrelationskoeffizienten von X,Y, also

$$\rho \equiv \rho_{XY} \equiv \rho[X,Y] := \frac{COV[X, Y]}{\sqrt{V[X] \cdot V[Y]}}$$

gilt dann stets $-1 \le \rho \le 1$ (Normierung) und $\rho[aX+ b,Y] = \rho[X,Y]$ $(a \neq 0)$, aber es gibt wohl keinen einfachen allgemeinen Zusammenhang zwischen $\rho[X + Y,Z]$ und $\rho[X,Z]$, $\rho[Y,Z]$.

2.2 Implementierung in Excel

Nach diesen Vorbereitungen können wir das Modell in Excel implementieren. Die Eingabeparameter sind

- für die Dynamik: der Zinssatz p (bzw. q),
- für das Risiko: die Spannweite b,
- die Korrelation ρ .

Außerdem ist der Anfangskurs S_0 festzulegen.

Jede Neuberechnung (F9) liefert eine neue Simulation. Ein Beispiel ist in Abb. 1 wiedergegeben.

Im Intervall (0,1) gleichverteilte Zufallszahlen erhält man mit der Funktion „=zufallszahl()“.

drk.xls		Gleichverteilung, absolute Werte für Risikoeinflüsse
100	= S0	Anfangskurs
10,0%	= p	Zinssatz (Dynamik)
1,10	= q	Zinsrate
20,00	= b	Breite, Spannweite (Risiko ~ Volatilität)
5,77	= σ	StAbw., Var. der Gleichverteilung = (1/12)b²
-0,5	= ρ	Gewicht der ersten Anlage (Korrelation)

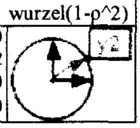
t (Jahre)	Dynamik		Risiko X1		Korrelationen X2	X1	ρ+X2	wurzel(1-ρ^2)
0	1,000	100,0		100,0			100,0	
1	1,100	110,0	8,70	118,7	4,06	-0,83	109,2	
2	1,210	121,0	-15,15	115,4	2,67	9,88	130,0	
3	1,331	133,1	1,18	128,1	-2,76	-2,98	140,0	

Abb. 1a: DRK-Modell: einfache Implementierung

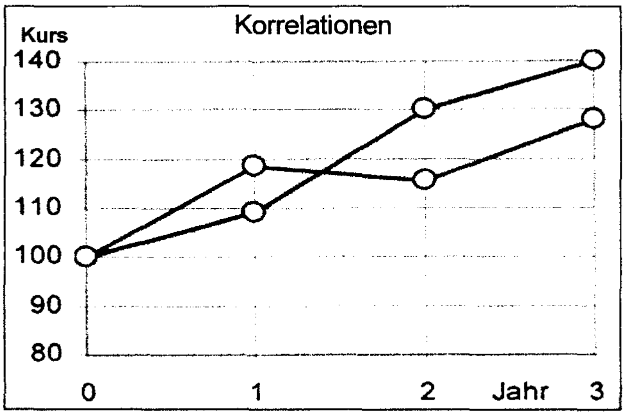


Abb. 1b: RK-Modell: Korrelationen

Die Abbildung 1b zeigt das Beispiel zweier Aktienkurse, die beide eine steigende Tendenz, jedoch eine negative Korrelation aufweisen. Wenn der Kurs der einen Aktie überdurchschnittlich steigt, d. h. stärker als der in der Dynamik modellierte Zinssatz von 10% angibt, dann fällt der Kurs der anderen Aktie mit großer Wahrscheinlichkeit.

3 Das Binomialmodell

Nachdem wir das Prinzip des DRK-Modells in Excel implementiert haben, möchten wir vom Prinzip zur Praxis gelangen: Wie muss man das DRK-Modell verändern, damit es in der Lehre und in der Praxis gleichermaßen vertretbar ist? Außerdem stellt sich die Frage nach dem Nutzen eines solchen Vorgehens: Wofür kann man ein solches Modell dann verwenden?

Wir werden sehen, dass wir das Risiko realistischer berücksichtigen können, wenn wir die Gleichverteilung durch eine Binomialverteilung, später durch eine (logarithmische) Normalverteilung, ersetzen.

Der Nutzen in der Lehre kann darin bestehen, dass sich mit der Simulation die Konsequenzen verschiedener Modellannahmen direkt vor Augen führen lassen. Insbesondere lässt sich untersuchen, wie bei Veränderung von Modellparametern eine Kurs-prognose über einen bestimmten Zeitraum aussehen kann.

Der Nutzen in der Praxis besteht darin, dass sich bei einer sorgfältigen Modellierung mit Hilfe der Simulation der faire Preis einer Option ermitteln lässt, man also eine Alternative zur wertvollen Black-Scholes-Formel hat, die ihr bei komplexeren Voraussetzungen sogar überlegen sein kann.

3.1 Vorbemerkung: Das Problem der Briefumschläge

In zwei geschlossenen Umschlägen, einem grünen und einem roten, liegen Gutscheine für Geldbeträge, der eine ist doppelt so viel wert wie der andere. Sie dürfen zwischen beiden wählen. Sie wählen den grünen Umschlag und finden darin einen Gutschein über 100 €. Der Spielleiter erlaubt Ihnen nun, noch einmal neu zu entscheiden. Wie entscheiden Sie sich?

Bei der Diskussion dieser Aufgabe tauchen i. a. folgende Fragen und Argumente auf:

- Im roten Umschlag sind 50 € oder 200 €, jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0,5. Der Erwartungswert ist mit 125 € größer als der Wert des gewählten Umschlags. Dies spricht für einen Wechsel.
- Der Betrag von 100 € im grünen Umschlag ist für die Entscheidung irrelevant. Auch bei jedem anderen Betrag gilt das obige Argument.
- Wenn der Betrag irrelevant ist, kann man auch auf die Information durch das Öffnen des Umschlags verzichten. Man weiß schon vorher, dass man mit dem grünen nicht zufrieden sein wird und den Wechsel zum roten vorziehen wird.
- Wenn man dies weiß, warum wählt man dann nicht gleich den roten Umschlag?
- Wählt man anfangs den roten Umschlag, gilt dieselbe Argumentation mit vertauschten Rollen.

Eine für die Behandlung dieses Problems nützliche Einsicht ist: Es gibt keine Gleichverteilung auf der gesamten (positiven) Achse. Wir können andererseits eine echte Alternative anbieten, wenn wir annehmen, dass eine Verdopplung nur mit Wahrscheinlichkeit 1/3, eine Halbierung dagegen mit Wahrscheinlichkeit 2/3 zu erwarten ist. In diesem Fall liefert der Erwartungswert 200*1/3 + 50*2/3 = 100 ein gleichwertiges Ergebnis.

3.2 Einstufiges Binomialmodell

Wir betrachten die relative Änderung des Aktienkurses innerhalb eines Jahres: S_1/S_0 und setzen voraus, dass es nur zwei Möglichkeiten gibt (u steht für „up“, d für „down“):

$$1{,}00 \left\langle \begin{array}{l} u = 1{,}25 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } p \\ d = 0{,}80 \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1-p \end{array} \right. .$$

Wie beim Problem der Briefumschläge (dort ist u = 2) wählen wir d = 1/u. Dieses multiplikative Modell hat den Vorteil, dass wir durch die relativen Änderungen Kurse von 10, 100 oder 1000 angemessen berücksichtigen und dass zweitens eine Abwärtsbewegung durch eine nachfolgende Aufwärtsbewegung (oder umgekehrt) neutralisiert wird. Dass es in der Praxis keine negativen Kurse gibt, ist beim multiplikativen Modell automatisch berücksichtigt.

Wir möchten zunächst keine Rendite (oder risikofreien Zinssatz) berücksichtigen, also keine Veränderung des Erwartungswertes haben (Martingal-Eigenschaft). Dazu müssen wir die Wahrscheinlichkeit p geeignet festlegen:

$\mu = u\cdot p + d\cdot(1-p) = d + (u-d)\cdot p = 1.$

Daraus folgt:

$$p = \frac{1-d}{u-d} = \frac{1}{u+1} = \frac{1}{2{,}25} = \frac{4}{9} = 0{,}444.$$

Wir erhalten Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung:

$E[S_1/S_0] = u\cdot p + d\cdot(1-p) = 1$

$V[S_1/S_0] = (u-1)^2\, p + (d-1)^2\,(1-p) = 0{,}05.$

Diese Varianz erhält man auch, wenn man die Verteilung als Binomialverteilung mit $n = 1$ interpretiert, bei der die Realisationen nicht 0 und 1 sind, sondern d und u, so dass die Spannweite (u – d) ist:

$V[S_1/S_0] = p(1-p)(u-d)^2 = 0{,}05,$

$\mathrm{StAbw}[S_1/S_0] = 0{,}224.$

Bei einem multiplikativen Modell ist es naheliegend, den Logarithmus von S_1/S_0 zu verwenden. Dadurch ergibt sich für die Auf- und Abwärtsbewegung eine Symmetrie bei den Beträgen, während die Wahrscheinlichkeiten unverändert asymmetrisch bleiben. Daraus folgt, dass der **Logarithmus eine fallende Tendenz** aufweist.

Präzise bedeutet dies, dass zwar $E[S_1] = S_0$, aber $E[\ln(S_1)] < \ln(S_0)$ ist.

Wie bei dem Problem der Briefumschläge ist die Verteilung asymmetrisch. Dort wurden Halbierung und Verdopplung des Betrages zugelassen (50 bzw.

200). Nur durch asymmetrische Wahrscheinlichkeiten (2/3 bzw. 1/3) konnte der Erwartungswert von 100 beibehalten werden. Die Veränderung der Logarithmen ist nach beiden Seiten gleich groß. Da die Abnahme mit 2/3, die Zunahme mit 1/3 gewichtet wird, ergibt sich die fallende Tendenz der Logarithmen.

Während der Erwartungswert des Kurses unverändert bleibt, gilt dies also für dessen Logarithmus nicht. Dieser nimmt umso stärker ab, je größer die Spannweite (das Risiko) ist. Die Prognose wird mit der Zeit unsicherer, die Verteilung wird breiter.

Hintergrund ist die Tatsache, dass für eine Zufallsvariable X i. a. E[ln(X)] nicht mit ln(E[X]) übereinstimmt.

$\ln(u) = \ln(1{,}25) = 0{,}223$

$\ln(d) = \ln(1/u) = -\ln(u) = -0{,}223$

$$\ln(1) = 0 \left(\begin{array}{l} \ln(u) = 0{,}2223 \text{ mit Wahrsch. } p = 0{,}444 \\ \ln(d) = -0{,}223 \text{ mit Wahrsch. } p = 0{,}556 \end{array} \right.$$

$E[\ln(S_1/S_0)] = p \cdot \ln(u) + (1 - p) \ln(d) = -0{,}0284 < \mathbf{0}$

$V[\ln(S_1/S_0)] = p \cdot (1-p) (\ln(u) - \ln(d))^2$
$= [u/(u + 1)^2] [2\ln(u)]^2 = 4u[\ln(u)/(u + 1)]^2 = 0{,}0492$

$\mathrm{StAbw}[\ln(S_1/S_0)] = 0{,}2218$

Diese Standardabweichung der logarithmischen Änderung, bezogen auf den Zeitraum eines Jahres, bezeichnet man als **Volatilität**.

Die exakte Interpretation der Volatilität ist nicht einfach.

Wenn eine Aktie mit dem Kurs 100 nach einem Jahr etwa im Bereich 80 bis 120 erwartet wird und eine andere Aktie mit dem Kurs 200 im Bereich 160 bis 240, dann möchte man ihnen dieselbe Volatilität zuordnen.

Eine Symmetrie nach oben und unten bei der Prognose ist eigentlich nicht wünschenswert, da der Kurs nach unten durch Null begrenzt ist. Einen Ausweg bietet der Logarithmus.

Nach zwei Jahren werden größere Abweichungen erwartet als nach einem Jahr. Deshalb wählt man für die Angabe der Volatilität den standardisierten Zeitraum von einem Jahr.

Wenn man etwas oberflächlich die Volatilität als die Schwankung einer Aktie interpretiert, so darf man dabei also nicht vergessen,

- dass es sich um relative Änderungen handelt,
- dass eigentlich die Logarithmen verwendet werden und
- dass ein Jahr als Bezugszeitraum berücksichtigt wird.

Nochmals halten wir fest, dass zwar $E[S_1] = S_0$, aber $E[\ln(S_1)] < \ln(S_0)$ ist.

Wir ändern jetzt unser Modell dahingehend ab, dass wir zusätzlich zur zufälligen Entwicklung noch einen risikofreien Zinssatz (Drift) annehmen.

Was bedeutet nun ein risikofreier Zinssatz in der Praxis?

Einen risikofreien Zinssatz kann man sich etwa als Zins einer festverzinslichen Bundesanleihe vorstellen, bei der die Verzinsung für einen bestimmten Zeitraum garantiert und nicht durch zufällige Einflüsse verändert wird.

Auch bei der Modellierung von Aktienkursen nimmt man eine solche tendenzielle Aufwärtsbewegung an, die allerdings von Risiken überlagert wird. Diese Aufwärtstendenz wird in der Praxis auch durch Dividendenzahlungen realisiert. Ohne die Aufwärtstendenz wären Aktien grundsätzlich weniger attraktiv als festverzinsliche Wertpapiere.

Da wir es mit einem multiplikativen Modell zu tun haben, verwenden wir an Stelle des jährlichen („diskreten") Zinssatzes r' den „kontinuierlichen" Zinssatz $r = \ln(1 + r')$, der sich numerisch geringfügig vom diskreten Zinssatz unterscheidet, aber in mathematischen Modellen elegantere Formulierungen erlaubt. Als Zahlenbeispiel können wir uns etwa $r' = 0{,}04$ (diskret) bzw. $r = \ln(1 + r') = 0{,}0392$ (kontinuierlich) mit $\exp(r) = 1 + r' = 1{,}04$ vorstellen.

Wir möchten nun $E[S_1/S_0] = \exp(r)$ realisieren. Um dies zu erreichen, gibt es zwei Möglichkeiten:

- entweder wir erhöhen die Wahrscheinlichkeit für die Aufwärtsbewegung:

  $p = (\exp(r) - d)/(u - d)$

- oder wir erhöhen die Werte u und d:

  $u = u_0\exp(r)$ und $d = d_0\exp(r)$, wenn wir die bisherigen Werte mit u_0 und d_0 bezeichnen.

Beide Möglichkeiten findet man in der Literatur. Wir wählen den zweiten Weg, setzen also $u = u_0\exp(r) = 1{,}30$ und $d = d_0\exp(r) = 0{,}832$, und es gilt jetzt $d(u) = \exp(2r)$, also $d = \exp(2r)/u$.

Wir können nun die Formeln für Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung übertragen, insbesondere gilt:

- $E[S_1/S_0] = u \cdot p + d(1 - p) = \exp(r) = 1{,}04$

  (wie gewünscht)

➢ $E[\ln(S_1/S_0)] = p\cdot\ln(u) + (1-p)\ln(d)$
$= r - [(u_0 - 1)/(u_0 + 1)]\ \ln(u_0)$
$= 0{,}0392 - 0{,}0248 = 0{,}0144 < r.$

Für die Logarithmen gilt wieder: Der Erwartungswert $E[\ln(S_1/S_0)]$ ist kleiner als $\ln(E[S_1/S_0]) = r$.

$V[\ln(S_1/S_0)]$ wird durch die Annahme eines Zinssatzes nicht verändert, da die Abstände der Logarithmen erhalten bleiben:

$\ln(u)-\ln(d)=(\ln(u_0)+r)-(\ln(d_0)+r)$
$=\ln(u_0)-\ln(d_0)$.

3.3 Mehrstufiges Binomialmodell

Das einstufige Binomialmodell setzt voraus, dass nach einem Jahr nur zwei Kurse möglich sind, eine Aufwärts- und eine Abwärtsbewegung mit jeweils genau einem festen Ergebnis. In der Praxis ist jedoch innerhalb eines gewissen Bereichs nahezu jeder Kurs möglich. Um wenigstens eine größere Anzahl von Möglichkeiten zu erzielen, verwendet man das mehrstufige Binomialmodell mit n Einzelschritten. Ein weiterer Gesichtspunkt ist der, dass man daraus durch Grenzübergang die wünschenswerte kontinuierliche Verteilung des Aktienkurses erhalten kann.

Um nach einem Jahr mehr als zwei mögliche Ergebnisse zuzulassen, können wir annehmen, dass der Verzweigungsprozess, bei dem der Kurs mit u oder d multipliziert wird, n-mal durchgeführt wird, z. B. kann n = 12 den 12 Monaten des Jahres entsprechen. Wenn dabei k Aufwärts- und (n – k) Abwärtsbewegungen vorkommen, ergibt sich der Wert

$S_n/S_0 = u^k d^{n-k}$.

Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ergebnis ist durch die Binomialverteilung gegeben:

$$W(S_n/S_0 = u^k d^{n-k}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Daraus ergeben sich dann Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von S_n/S_0 und von $\ln(S_n/S_0)$, auf deren Angabe wir hier verzichten.

4. Professionelle Implementierung

4.1 Theoretische Ergebnisse

Die Binomialverteilung, die sich bei 12 Monatswerten und den obigen Wahrscheinlichkeiten für Auf- und Abwärtsbewegungen ergibt, lässt sich recht gut durch eine Normalverteilung approximieren. Im kontinuierlichen Fall erhält man für den Logarithmus des Kurses $\ln(S_t/S_0)$ nach der Zeit t eine Normalverteilung, also eine logarithmische Normalverteilung für S_t/S_0.

Bei einer binomialverteilten Zufallsvariable ist $E(X) \sim n$ und auch $V(X) \sim n$. Dementsprechend sind jetzt $E[\ln(S_t/S_0)]$ und $V[\ln(S_t/S_0)]$ der Zeitspanne t proportional:

$E[\ln(S_t/S_0)] = \mu\cdot t$

$V[\ln(S_t/S_0)] = \sigma^2\cdot t$

Dabei ist $\mu = r - \sigma^2/2$ der Erwartungswert nach der Zeit t = 1. Dies entspricht einer Verzinsung mit dem kontinuierlichen Zinssatz r. σ^2 ist die Varianz und σ die Standardabweichung nach der Zeit t = 1, σ also die Standardabweichung von $\ln(S_1/S_0)$. **Diese** Standardabweichung σ von $\ln(S_1/S_0)$ – bezogen auf ein Jahr – bezeichnet man als **Volatilität**.

Setzt man speziell den Zinssatz r = 0, dann ergibt sich $\mu = -\sigma^2/2$, $E[\ln(S_t/S_0)] = (-\sigma^2/2)\ t$, also die **fallende Tendenz bei den Logarithmen**, die wir bereits beim Binomialmodell gefunden hatten.

Glossar: Die Lognormalverteilung

Es sei X eine Zufallsgröße, die nur positive Werte annimmt, und es sei ln(X) eine $N(\mu, \sigma^2)$ verteilte Zufallsgröße. Dann gilt also

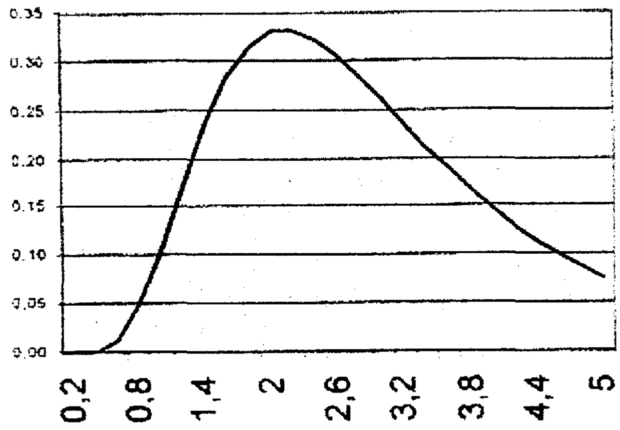
$$P(X \le x) = P(\ln(X) \le \ln(x)) = \Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{z}\exp\left(-\frac{(\ln(z)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dz\ .$$

Die Dichte der Lognormalverteilung ist

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$, falls x > 0, und = 0 sonst. Die Zufallsgröße X selbst heißt dann lognormal verteilt.

Dichtefunktion der Lognormalverteilung



mit μ = 1 und σ = 0,5.

Der Erwartungswert einer lognormalverteilten Zufallsgröße ist $E[X] = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ und die Varianz ist $Var[X] = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$. – Dieses Diagramm wurde mit Excel erstellt.

Was ist an diesen Veränderungen nun „professionell"?

Es sieht so aus, als wäre der Übergang von der Binomialverteilung zur Normalverteilung nur eine geringfügige Veränderung. Man erhält aber dadurch einen qualitativ anderen Zufallsprozess, der jetzt nicht nur für diskrete Zeitpunkte definiert ist, sondern für ein zeitliches Kontinuum. Auch wenn Aktienkurse praktisch nur für diskrete Zeitpunkte notiert werden, erhält man erst bei Verwendung dieses Modells die ausgezeichneten Ergebnisse der Optionsbewertung, die auch von den Praktikern anerkannt werden.

4.2 Umsetzung in Excel

Wenn man diese Ergebnisse für die logarithmische Normalverteilung akzeptiert, kann man daran gehen, sie in eine Excel-Tabelle umzusetzen. Wir möchten 12 Monatswerte simulieren (dt = 1/12). Dazu benötigen wir eine Formel zur Ermittlung des Erwartungswertes aus dem Kurs des Vormonats und die Varianz, bezogen auf die Logarithmen:

$E[\ln(S_t/S_{t-1})] = (r - \sigma^2/2)dt$ bzw.

$E[\ln(S_t)] = S_{t-1} + (r - \sigma^2/2)dt$

$V[\ln(S_t/S_{t-1})] = \sigma^2 dt$, bzw. $V[\ln(S_t)] = \sigma^2 dt$

(wegen $\ln(S_t/S_{t-1}) = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1})$).

Außerdem müssen wir **normalverteilte** Zufallszahlen mit diesen Parametern erzeugen.

Eine allgemeine Methode, mit der sich, unabhängig von der verwendeten Software, normalverteilte Zufallszahlen erzeugen lassen, ist das „Box-Muller-Verfahren" (Box/Muller (1958)), das zwei unabhängige im Intervall (0,l) gleichverteilte Zufallszahlen z_1 und z_2 in zwei unabhängige standardisiert normalverteilte Zufallszahlen x_1 und x_2 transformiert:

$$x_1 = \sqrt{-2\ln(z_1)}\cos(2\pi z_2)$$

$$x_2 = \sqrt{-2\ln(z_1)}\sin(2\pi z_2)$$

Wir haben uns bei der Simulation für Excel entschieden. Excel bietet mit der Inversen der Verteilungsfunktion der Normalverteilung eine Alternative: Hat man in Zelle Al durch Eingabe von „=zufallszahl()" eine in (0,1) gleichverteilte Zufallsvariable realisiert, so erhält man mittels „=norminv(Al;0;1)" die Realisation einer N(0,1)-verteilten Zufallsvariablen. Natürlich kann man auch direkt „=norminv(zufallszahl();0;1)" in eine Zelle eingeben, um N(0,1)-verteilte Zufallszahlen zu erzeugen. Eine theoretische Begründung für die „Inversionsmethode" zur Erzeugung von Zufallszahlen findet man etwa bei Pfanzagl (Pfanzagl (1991), S. 48).

Um mit Hilfe einer so erzeugten Zahl z eine Realisation für die nicht-standardisiert normalverteilte Variable $\ln(S_t)$ zu erzeugen, müssen wir noch die lineare Transformation

$$\ln(S_t) = S_{t-1} + (r - \sigma^2/2)dt + z\sigma\sqrt{dt}$$

durchführen. Mit Hilfe der Exponentialfunktion exp() erhält man schließlich den Kurs S_t.

aktien.xls =	Kursverlauf
100,00 = S0	Anfangskurs
0,20 = σ	Volatilität = StAbw des (n.v.) Ln des Preises pro Jahr
0,0408 = ρ	risikofreier Zinssatz (diskret)
0,0400 = r	risikofreier Zinssatz (konti)
0,0833 = dt	Zeitintervall (Jahr), auch 1/360 möglich

t [Mon]	E[ln(S)]	z	ln(S)	S
0	4,605	0,92	4,605	100,0
1	4,607	1,08	4,669	106,6
2	4,671	-1,20	4,602	99,6
3	4,603	-0,86	4,554	95,0
4	4,555	0,58	4,589	98,4
5	4,591	-0,16	4,582	97,7
6	4,583	0,64	4,620	101,5
7	4,622	-0,54	4,591	98,6
8	4,593	0,69	4,633	102,8
9	4,634	1,77	4,736	114,0
10	4,738	0,50	4,767	117,6
11	4,769	0,65	4,807	122,3
12	4,808	-0,63	4,772	118,2

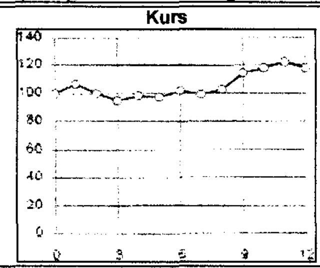


Abb. 2: Aktienkurs-Simulation: verbessertes Modell

5. Anwendung: Optionen

5.1 Was ist eine Option?

In der Sprache der Börse versteht man unter einer Option

- ein Recht auf eine Transaktion (Kauf = Call / Verkauf = Put)
- einer vorbestimmten Menge (100 Stück)
- eines vorbestimmten Gutes (Deutsche-Bank-Aktien)
- zu einem vorbestimmten Preis (60 €, garantierter Kauf- oder Verkaufspreis, auch „Basispreis" oder „Strike" genannt)
- an oder bis zu einem bestimmten Datum (dritter Freitag im nächsten Monat).

Eine „europäische Option" gewährt das Recht der Ausübung „an" einem bestimmten Datum (eine „amerikanische Option" dagegen „bis" zu einem Datum, also innerhalb eines Zeitraumes).

Eine wichtige Aufgabe (für deren Lösung 1997 der Nobelpreis für Ökonomie vergeben wurde) ist die Ermittlung eines fairen Preises für eine Option.

5.2 Binomialmodell

Ausgehend von unserem obigen einstufigen Modell

$$1{,}00 \begin{cases} u = 1{,}25 \text{ mit Wahrsch. } p = 0{,}444 \\ d = 0{,}80 \text{ mit Wahrsch. } 1 - p = 0{,}556 \end{cases}$$

(Kurs $S_0 = 100$, Strike $X = 100$, Zins $r = 0$)

können wir den fairen Preis einer Call-Option im Sinne des Erwartungswertes ermitteln. Diesen Wert einer Call-Option für das einstufige Modell bezeichnen wir mit C_1. Wir erhalten ihn folgendermaßen:

Gewinn = 125 – 100 = 25 mit Ws. p = 0,444

Gewinn = 0 mit Ws. (1 – p) = 0,556

$C_1 = 25 \cdot 0{,}444 + 0 \cdot 0{,}556 = 11{,}11$.

Wenn wir einen (kontinuierlichen) Zinssatz r berücksichtigen und eine Restlaufzeit T (in Jahren) annehmen, erhalten wir eine etwas allgemeinere Formel. Dabei ist zu berücksichtigen, dass wir den Gewinn erst am Ende des Zeitraumes, den Optionspreis jedoch auf die Gegenwart beziehen. Daher müssen wir durch Abzinsen den Barwert ermitteln.

Im Fall der Aufwärtsbewegung („u“ steht für „up“) erhalten wir am Ende des Zeitraumes den Gewinn C_u und im Fall der Abwärtsbewegung („d“ für „down“) den Gewinn C_d:

Gewinn = $C_u = \max(u \cdot S_0 - X, 0)$ mit Ws. p

Gewinn = $C_d = \max(d \cdot S_0 - X, 0)$ mit Ws. 1 – p .

C ist dann der abgezinste Erwartungswert:

$C_1 = [C_u p + C_d (1 - p)] \exp(-rT)$.

Diese Überlegungen lassen sich auch auf das mehrstufige Binomialmodell übertragen. Wir sind jedoch stärker an den Ergebnissen für den Fall interessiert, dass sich die Kurse kontinuierlich ändern können. Dies entspricht dem Grenzübergang von der Binomialverteilung zur Normalverteilung.

5.3 Die Black-Scholes-Formel

Die Black-Scholes-Formel liefert den fairen Preis einer europäischen Call-Option, wenn man das kontinuierliche Modell zugrunde legt, bei dem der Kurs durch eine logarithmische Normalverteilung beschrieben wird:

$$C = S_0 N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2)$$

$$\text{mit } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + rT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

$$\text{und } d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + rT}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

C = Fairer Preis einer Call-Option
S_0 = Anfangskurs der Aktie
X = Basispreis (Strike)
σ = Volatilität
r = Zinssatz (kontinuierlich)
T = Laufzeit (Jahre)
N(x) = Verteilungsfunktion der Normalverteilung.

Beispiel:

$S_0 = 100$, $X = 100$, $\sigma = 0{,}20$, $r = 0{,}04$, $T = 1$.
Ergebnis: d1 = 0,3000, d2 = 0,1000, **C = 9,93**.

Was bedeutet dieses Ergebnis? Kann man eine Option verkaufen? Wird man diesen Preis tatsächlich am Markt vorfinden?

Ja, Optionen werden am Markt gehandelt. Die tatsächlichen Preise findet man im Wirtschaftsteil einiger Zeitungen, z. B. auch im „Handelsblatt“, und natürlich auch im Internet. Standardisiert werden sie dadurch, dass man nur bestimmte Ausübungszeitpunkte (dritter Freitag im Monat) und bestimmte Basispreise (nahe dem aktuellen Kurs, etwas darunter bzw. etwas darüber) wählt.

Ob der Marktpreis mit dem Black-Scholes-Wert übereinstimmt, lässt sich nicht unmittelbar nachprüfen, da man für die Berechnung des fairen Optionspreises nach Black-Scholes die Volatilität benötigt, und zwar die Volatilität für den zukünftigen Restlaufzeitraum der Option.

Man kann die bisher beobachtete („historische“) Volatilität verwenden, die üblicherweise für den letzten Monat (20 Börsentage) und das letzte Jahr veröffentlicht wird. Dies führt häufig zu recht guten Übereinstimmungen mit der Black-Scholes-Formel.

Mitunter ergeben sich jedoch Abweichungen. In diesen Fällen kann man sich fragen, welcher andere Wert für die Volatilität eine solche Abweichung erklären würde. Diesen Wert nennt man die „implizite Volatilität“. Mit der impliziten Volatilität für eine bestimmte Aktie kann man dann immerhin Optionen für verschiedene Restlaufzeiten und verschiedene garantierte Kauf-/Verkaufs-Preise (Basispreise) untersuchen, die sich dann bei dieser Annahme häufig einheitlich erklären lassen.

5.4 Die Rolle der Simulation

5.4.1 Simulation als Alternative zur analytischen Berechnung

Mit unserer Aktienkurs-Simulation (vgl. Abb. 2) sind wir in der Lage, den Kurs einer Aktie nach einer bestimmten Zeit, sagen wir nach einem Jahr, einzuschätzen. Wir könnten etwa 100 Simulationen durchführen und notieren, welcher Kurs sich jeweils ergeben hat. Dann könnten wir abzählen, wie oft sich die Ausübung der Option gelohnt hätte und welchen Betrag wir durchschnittlich gewonnen hätten. Wenn wir diesen Betrag noch diskontieren, liefert uns der Barwert eine Schätzung des fairen Optionspreises, der analytisch durch die Black-Scholes-Formel gegeben ist.

In unserem Beispiel ergab die Simulation einen Endkurs von 118,09. Die Ausübung der Option bringt also einen Gewinn von 18,09. Abgezinst liefert dies den Wert 18,18/exp(0,04) = 17,47. Unsere Option hätte also zufällig den Wert 17,47. Analytisch erhielten wir aus der Black-Scholes-Formel C = 9,93.

Was haben die beiden Werte 17,47 (aus der Simulation) und 9,93 (nach Black-Scholes) miteinander zu tun?

Wie üblich ist 17,47 als Ergebnis eines einzigen Simulationslaufs die einmalige Realisation eines Zufallsprozesses bzw. einer Zufallsvariablen. Wenn wir unsere Simulation mehrfach wiederholen, können wir dadurch den fairen Preis einer Call-Option abschätzen.

Empirisch könnten wir etwa 10 mal 100 Realisationen erzeugen, jeweils die Mittelwerte aus den 100 Werten bilden und dann erkennen, ob diese Mittelwerte einigermaßen stabil sind, oder auch, etwas eleganter, ein Konfidenzintervall berechnen.

Der Black-Scholes-Wert 9,93 ist der „faire Preis" einer Call-Option, d. h. der Wert, der sich bei der vorausgesetzten Volatilität als abgezinster Erwartungswert des Gewinns ergibt, wenn man den Zeitpunkt der Optionsausübung zugrunde legt. Er ist der Erwartungswert der bei der Simulation realisierten Zufallsgröße.

Die Simulation erfüllt hier zwei Funktionen:

- Sie ist ein didaktisches Hilfsmittel, indem sie den Zufallscharakter, also Chancen und Risiken von Optionen, veranschaulicht. Man sieht deutlich, wie der Wert der Option zu Stande kommt. Insbesondere kann man auch den Einfluss der einzelnen Variablen studieren.
- Mit der Simulation können wir Modelländerungen verfolgen, die mit der Black-Scholes-Formel nicht ohne weiteres zu berücksichtigen sind. So können wir Veränderungen der Volatilität innerhalb der Laufzeit oder auch Dividendenzahlungen wesentlich leichter in der Simulation als in der analytischen Rechnung berücksichtigen.

Bei der Herleitung der Black-Scholes-Formel wird vorausgesetzt, dass die Volatilität im betrachteten Zeitraum, also bis zur Ausübung der Option, konstant ist. Man kann nun leicht in der Black-Scholes-Formel für die Volatilität verschiedene Werte einsetzen und erhält dann entsprechende Optionspreise. Möchte man jedoch zulassen, dass sich die Volatilität während des Restlaufzeitraumes verändert, dann sind die Voraussetzungen für die Herleitung der Black-Scholes-Formel verletzt. Es bereitet erhebliche Schwierigkeiten, die Formel an veränderte Voraussetzungen anzupassen.

Im Gegensatz dazu kann man bei der Simulation für einen Teilzeitraum eine andere Volatilität zugrunde legen und die Simulation unter diesen veränderten Bedingungen durchführen, ohne dass sich prinzipielle Probleme ergeben. Ebenso lassen sich auch Dividendenzahlungen berücksichtigen, die bei der theoretischen Herleitung erhebliche Mühe bereiten.

5.4.2 Kombination von Simulation und analytischer Berechnung

Dadurch dass wir einerseits den Aktienkurs als Zufallsprozess simulieren, andererseits in Abhängigkeit vom aktuellen Kurs und von der aktuellen Restlaufzeit (bei vorgegebenen Werten für Strike X, Zins r und Volatilität σ) den Optionswert analytisch berechnen können, sind wir in der Lage, auch **den Verlauf des Optionswertes dynamisch nachzubilden** (Abb. 3).

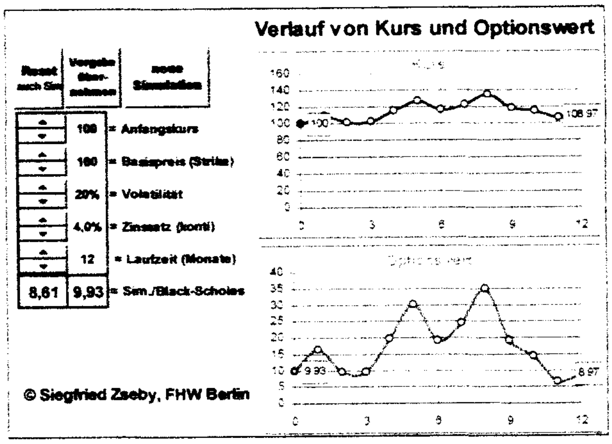


Abb. 3:
Kombination von Simulation und Black-Scholes

In unserem früheren Beispiel (Abb. 2) ergab sich aus dem Anfangskurs 100 nach einem Monat der Kurs 106,60. Wenn wir nun in der Black-Scholes-Formel S_0 = 106,60 und T = 11/12 (11 Monate Restlaufzeit) einsetzen, erhalten wir C = 13,88 als zugehörigen Wert der Option, der folglich gegenüber dem Anfangswert 9,93 infolge der Kurserhöhung erheblich zugenommen hat. Wir können nun Kurs und Optionswert Monat für Monat verfolgen und beobachten, wie zwischen Bangen und Hoffen die Option schließlich wertlos wird oder doch noch ein Gewinn herausspringt.

Wenn wir am Anfang einen Optionspreis von 9,93 erhalten haben, so ist dieser das Resultat einer Berechnung, die insbesondere den Anfangskurs 100 und die Restlaufzeit von 12 Monaten verwendet hat.

Warten wir nun einen Monat ab, dann beträgt die Restlaufzeit nur noch 11 Monate und der Kurs wird sich geändert haben. Je nachdem, wie sich der Aktienkurs entwickelt hat, ändert sich auch der Wert unserer Option. Nach einem weiteren Monat haben wir einen zufällig veränderten Kurs und einen zugehörigen Optionspreis, usw. Wenn wir nun eine mögliche Entwicklung des Optionspreises für ein Jahr simulieren möchten, dann können wir folgendermaßen vorgehen:

Wir **simulieren** Monat für Monat den Kurs der Aktien und berechnen **analytisch** für diese simulierten Kurse die zugehörigen Optionspreise.

Indem wir die Zufallszahlen fixieren und nur die einzelnen Einflussgrößen ändern, können wir deren Auswirkungen studieren, ohne durch den Zufall „gestört“ zu werden („Parallelsimulation“, vergleichbar der Untersuchung von Umwelteinflüssen in der Zwillingsforschung).

Andererseits können wir natürlich auch wie bisher für feste Werte der Parameter den Einfluss des Zufalls studieren, indem wir mehrere Simulationen durchführen.

5.4.3 The Greeks

Schließlich möchte ich noch einige Bemerkungen darüber machen, wie sich „marginale“ Änderungen der Variablenwerte analytisch auswirken. Wir haben nämlich mit der Black-Scholes-Formel ein Beispiel für eine Funktion mit mehreren Veränderlichen, die als Unterrichtsmaterial hervorragend geeignet ist.

Es wird mitunter krampfhaft nach Anwendungen für partielle Ableitungen gesucht. Hier haben wir den merkwürdigen Fall, dass einerseits Mathematiker kaum darüber informiert sind, wie sehr die Finanzmärkte an partiellen Ableitungen interessiert sind, während anderseits die Börsianer kaum wissen, dass es sich bei den begehrten Kennzahlen um partielle Ableitungen handelt.

Die partiellen Ableitungen des Optionswertes C nach allen Variablen lassen sich ökonomisch interpretieren. Die Ableitungen werden mit griechischen Buchstaben getauft (daher die Bezeichnung „The Greeks“). Am wichtigsten ist den Ökonomen die Ableitung nach dem Aktienkurs S (auf den Index 0 verzichte ich im Moment), das „**Delta**“:

$\delta = \partial C/\partial S$

Es gibt an, wie sich eine (augenblickliche) Änderung des Aktienkurses auf den fairen Optionspreis auswirken würde.

Alle partiellen Ableitungen lassen sich durch Simulation schätzen, indem man mehrere Simulationen durchführt und dabei leicht veränderte Parameterwerte mit denselben Zufallszahlen parallel mitführt.

Andererseits lassen sich die Ableitungen – zumindest mit einem CAS - auch analytisch ermitteln und mit den ökonomischen Überlegungen vergleichen.

6 Schlussbemerkungen

Ich hoffe, mit meinen Ausführungen einige Impulse in methodischer und inhaltlicher Hinsicht gegeben zu haben:

- Die Simulation bietet als spielerische Variante eine Alternative zu analytischen Verfahren. Unabhängig davon, ob die analytische Berechnung zu bewältigen ist oder nicht, sollte man das Potential dieser mathematischen Alternative nutzen.
- Die Finanzmathematik sollte sich nicht auf die Standardaufgaben der klassischen Zinsrechnung beschränken. Sobald Zufall – Chance und Risiko – im Spiel ist, werden häufig Interessen angesprochen, die sich auch für kompliziertere Fragestellungen mobilisieren lassen.

Wir sollten also den **Zauber der Simulation** im Stochastikunterricht stärker verankern und uns nicht scheuen, auch **Probleme aus der Finanzmathematik** als Anschauungsmaterial zu verwenden.

7 Literatur

Black, F. and Scholes, M. (1973): The pricing of options and corporate liabilities. In: Journal of Political Economy 81, 637–659.

Box, G. E. P. and Muller, M. E. (1958). A note on the generation of random normal deviates. In: Ann. Math. Stat. 29, 610–611.

Hull, John C. (2000): Options, Futures and Other Derivative Securities. Paperback. 4th Ed. Longman Higher Education. ISBN: 0130158224.

Korn, R.; Korn, E. (2001): Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung 2. Auflage, Vieweg, Braunschweig. ISBN: 3528169826.

Pfanzagl, Johann (1991): Allgemeine Methodenlehre der Statistik II. Berlin: de Gruyter

Pfeiffer, Dietmar (2000): Zur Mathematik derivativer Finanzinstrumente: Anregungen für den Stochastik-Unterricht. In: Stochastik in der Schule, Band 20, Heft 2, S. 25-37

Uszapowski, Igor (1999): Optionen und Futures verstehen. Beck-DTV, München. ISBN: 3423058080.

Autor

Prof. Dr. Siegfried Zseby
Fachhochschule für Wirtschaft Berlin
Badensche Straße 50/51
10825 Berlin
E-Mail: `zseby@fhw-berlin.de`

Diese Aktie zeigt vor hellgrünem Hintergrund eine historische Abbildung der Börse Stuttgart um 1870.

Dies ist ein Stock Certificate einer Schule in Illinois/USA aus dem Jahre 1917.