Geduld und Zufall

PETER EICHELSBACHER, BOCHUM, UND MATTHIAS LÖWE, MÜNSTER

Zusammenfassung: *Wir analysieren ein derzeit nicht nur in Casinos, sondern auch bei allen MS-Windows Benutzern sehr beliebtes Kartenspiel – Patience – in einer sehr einfachen Version. Es zeigt sich, dass die optimale Strategie in diesem Spiel zu einem viel diskutierten Thema der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie führt, der Länge der längsten wachsenden Teilfolge einer zufälligen Permutation.*

1 Einleitung

Bekanntlich gehen die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Analyse von Glücksspielen zurück. Laplace und mit ihm viele andere entdeckten ihre grundlegenden Prinzipien im Bemühen, Würfelspiele oder Roulette zu verstehen.

Komplizierter gestaltete sich die Analyse von Kartenspielen, da hier neben der Zufallskomponente auch strategische Elemente eine Rolle spielen. Selbst Spiele, die eine recht einfache Struktur zu haben scheinen, an denen beispielsweise wie im Patience-Spiel nur ein Spieler teilnimmt, bieten eine solche Fülle an Entscheidungsmöglichkeiten, dass sie einer mathematischen Analyse bislang unzugänglich gewesen sind.

In der vorliegenden Arbeit sollen die auftretenden Probleme an einer sehr einfachen Version von Patience beispielhaft beleuchtet werden. Auch erlaubt die einfache Struktur interessierten Schülern, Simulationen dieses Spiels auf dem Computer, beispielsweise im Rahmen einer Facharbeit, eigenständig durchzuführen, um ein Gefühl für das Spiel zu entwickeln und Vermutungen über sein Ergebnis aufzustellen. Die optimale Strategie ist nicht nur für jeden Schüler nachvollziehbar, sondern kann von ihm bei intensiver Beschäftigung auch selbstständig hergeleitet werden.

Andererseits verknüpft sich die optimale Strategie mit einer Zufallsvariablen, die zwar von ihrer Definition her einfach zu verstehen ist, deren Verhalten aber jahrzehntelang Anlass zu Vermutungen gegeben hat. So bietet sich den Schülern die Möglichkeit, anhand eines einfachen Beispiels Fragestellungen aktueller mathematischer Forschung kennenzulernen (und zu erfahren, dass es so etwas überhaupt gibt).

2 Patience

Patience, zu deutsch Geduld, bezeichnet gleich eine ganze Gruppe von Einpersonen-Kartenspielen, die Mitte des 18. Jahrhunderts in Frankreich aufkamen und damals vom Adel mit Karten aus Silber gespielt wurden. Mit der Einführung der Spielkarten aus Pappe fand das Spiel auch in den weniger betuchten Schichten der Bevölkerung Verbreitung. Allen Varianten von Patience ist zu eigen, dass Karten von einem oder mehreren Stapeln aufgenommen werden und – nach variierenden Spielregeln – in einen oder mehreren anderen Stapeln wieder abgelegt werden. Je nach Spielart ist entweder die Anzahl der abgelegten Karten zu maximieren oder die Anzahl der Stapel zu optimieren (minimieren oder maximieren). Die derzeit wohl bekannteste Variante von Patience findet sich unter seinem englischen Namen "Solitaire" unter dem Computer-Betriebssystem Windows. Eine ähnliche Version kann auch in vielen amerikanischen Spielbanken gespielt werden. Man zahlt einen gewissen Betrag, etwa 10 \$, für ein Deck von 52 Karten und bekommt einen Gewinn für jede im Endstapel abgelegte Karte. Natürlich haben alle Spielbanken ein Interesse daran festzustellen, wieviele Karten im Mittel ihren Weg zum Endstapel finden, um Einsatz und Gewinn angemessen festlegen zu können. Leider ist eine rigorose mathematische Analyse dieses Spiels bislang in weiter Ferne.

In diesem Artikel werden wir uns einer bedeutend einfacheren Variante von Patience zuwenden. Wir benötigen ein Kartenspiel von N Karten, die "linear geordnet" sind, d.h. für je zwei Karten lässt sich entscheiden, welche die höher wertige ist. Beispielsweise kann man von einem Kartenspiel nur die Herzkarten entnehmen und diese mit der Ordnung

$$As < 2 < 3 < \cdots < B < D < K$$

versehen. Die Karten werden gemischt und auf einen Stapel gelegt. Von diesem Stapel wird nun sukzessive eine nach der anderen Karte von oben entnommen und in einem von mehreren Stapeln abgelegt. Die Regel dabei ist, dass eine Karte nicht auf einen Stapel gelegt werden kann, wenn sie höher als dessen oberste Karte ist. Gibt es keinen Stapel, auf den eine neu gezogene Karte gelegt werden kann, muss ein neuer Stapel angefangen werden. Ziel ist es, das Spiel mit so wenig Stapeln wie möglich zu beenden.

3 Mathematisches Modellieren und Mischen

Einer Computersimulation des obigen Patience-Spiels muss natürlich ein mathematisches Modell zugrunde liegen. Hierbei ist die erste Frage, die es zu klären gilt: Was bedeutet es, dass wir das Kartenspiel zu Beginn gut mischen?

Der Sinn eines solchen Mischens ist es offenbar, die Karten aus einer möglicherweise bekannten Anfangssituation so durcheinander zu bringen, dass die Reihenfolge nicht mehr vorhersagbar ist. In mathematischer Sprechweise erhalten wir durch Mischen eine Permutation unserer Karten, oder, wenn wir die Karten mit 1 bis N durchnummerieren, eine Permutation der Zahlen $1,...,N$. Die Menge aller Permutationen von $\{1,...,N\}$ heißt *symmetrische Gruppe* und wird mit S_N bezeichnet.

Ein Kartenspiel können wir als gut gemischt bezeichnen, wenn wir nach dem Mischen keine Idee mehr haben, welche Permutation vorliegt, d.h. wenn alle Permutationen $\sigma \in S_N$ gleich wahrscheinlich sind. Nun hat S_N $N!$ viele Elemente, d.h. wir dürfen das Kartenspiel als gut gemischt bezeichnen, wenn für die Situation nach dem Mischen gilt:

$$P(\sigma \text{ liegt vor }) =: P(\sigma) = \frac{1}{N!}.$$

Wie lässt sich nun am praktischsten eine Permutation $\sigma \in S_N$ simulieren? Formal lässt sich eine Permutation σ als eine Folge von N Paaren $(i,\sigma(i))$ aufschreiben mit $1 \leq i \leq N$ und $1 \leq \sigma(i) \leq N$. Hierbei bezeichnet $\sigma(i)$ den Platz an dem die Ziffer i in der Permutation σ erscheint. Die Permutation

$$\sigma = \{(1,2),(2,1),(3,3)\} \in S_3$$

bedeutet, dass Karte 2 nach dem Mischen auf Platz 1, Karte 1 auf Platz 2 und Karte 3 auf Platz 3 gelandet ist. Manchmal schreibt man dafür kürzer $\sigma = (2\ 1\ 3) \in S_3$. Nun ist es offenbar gar nicht wichtig, dass die $\sigma(i) \in \{1,\dots,N\}$ sind. Wichtig ist allein, dass für $i \neq j$ auch $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ ist. Dann kann man die $i \in \{1,\dots,N\}$ in der auf- oder absteigenden Reihenfolge der $\sigma(i)$ aufschreiben und erhält eine zufällige Permutation. Dies ist beispielsweise gewährleistet, wenn man für jedes i eine Zufallsvariable $\sigma(i)$ zieht, die unabhängig von allen anderen und uniform im Intervall $[0,1]$ verteilt ist (eine solche ist leicht auf einem Computer zu erzeugen). Hierbei bemerke man, dass für zwei uniform auf $[0,1]$ verteilte Zufallsvariablen X,Y mit Wahrscheinlichkeit eins $X \neq Y$ gilt. Es wird also stets für $i \neq j$ entweder $\sigma(i) < \sigma(j)$ oder umgekehrt $\sigma(j) < \sigma(i)$ gelten. Ein Rezept zum Erzeugen einer Zufallspermutation lautet genauer also so:

- Erzeuge unabhängige, uniform in $[0,1]$ verteilte Zufallszahlen $\sigma(1),...,\sigma(N)$.
- Ordne $\{1,\dots,N\}$ so, dass

  $$\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < .. < \sigma(i_N)$$

  gilt. Hierbei ist $\{i_1,\dots,i_N\}$ die neue Anordnung der Menge $\{1,\dots,N\}$.
- Dann ist $(i_1,i_2,...,i_N) \in S_N$ eine zufällige Permutation.

4 Strategien im Patience-Spiel

Wir wollen nun annehmen, das Kartenspiel sei gut gemischt (wie viele Mischvorgänge dafür notwendig sind, steht auf einem anderen Blatt und kann hier nicht im Detail erläutert werden).

Wir probieren nun, unser einfaches Patience-Spiel aus Kapitel 2 zu spielen. Wie kann man erreichen, dass zum Schluss so wenig Stapel wie möglich ausgelegt sind? Eine Strategie liegt auf der Hand: Wir legen jede neue Karte auf den erstmöglichen Stapel. Diese Strategie wollen wir die *gierige Strategie* nennen. Schauen wir sie uns anhand eines Beispiels an:

Beispiel 4.1 *Der gemischte Kartenstapel von $N = 10$ Karten sei gegeben durch*

5 3 6 7 4 9 10 1 8 2

Spielen wir damit Patience gemäß der gierigen Strategie, erhalten wir die folgende Abfolge von Stapeln:

5	3	3	3	3 4
	5	5 6	5 6 7	5 6 7

		1
3 4	3 4	3 4
5 6 7 9	5 6 7 9 10	5 6 7 9 10

1	1 2
3 4 8	3 4 8
5 6 7 9 10	5 6 7 9 10

Wir haben unser Spiel also mit fünf Stapeln beendet. Aber wie gut ist das? Der folgende Satz sagt aus, dass in der Tat dieses Ergebnis das bestmögliche ist. Bevor wir ihn formulieren und beweisen können, müssen wir noch einen Begriff einführen:

Definition 4.2 *Es sei $\sigma \in S_N$. Eine steigende Teilfolge der Länge k von σ ist eine Folge $i_1 < \cdots < i_k$, so dass*

$$\sigma(i_1) < \cdots < \sigma(i_k).$$

Beispiel 4.3 *In der obigen Permutation*

$$(5,3,6,7,4,9,10,1,8,2)$$

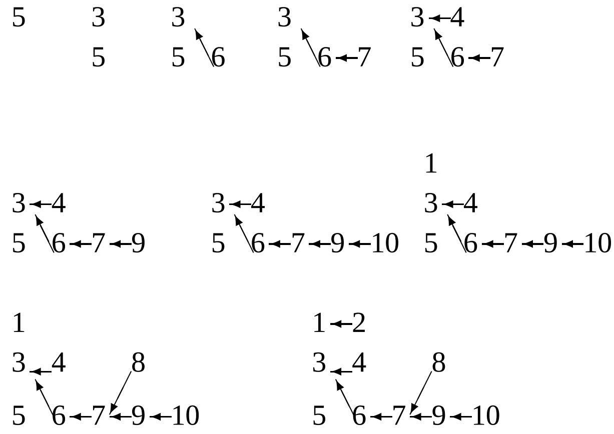
ist eine steigende Teilfolge $5,6,7,9,10$. *Dieses ist gleichzeitig die längste steigende Teilfolge. Die steigende Teilfolge* $3,6,7,9,10$, *die ebenfalls Länge fünf hat, zeigt, dass es offenbar mehrere längste steigende Teilfolgen einer Permutation geben kann.*

Wir sind nun in der Lage zu beweisen, dass die oben eingeführte gierige Strategie in der Tat optimal ist.

Theorem 4.4 *In dem oben dargestellten Patience-Spiel ist die gierige Strategie optimal. Sie benötigt so viele Stapel wie die Länge der längsten steigenden Teilfolge in dem gemischten Kartenspiel. Jede andere Strategie benötigt – selbst bei vorheriger Ansicht des gemischten Kartenspiels – mindestens ebenso viele Stapel.*

Beweis. Für die eine Richtung bemerken wir, dass, falls $i_1 < \cdots < i_k$ eine steigende Teilfolge in dem gemischten Kartenspiel ist, die Karten $i_1,\ldots,i_k$ auf verschiedenen Stapeln landen müssen. In der Tat: Zu dem Zeitpunkt, an dem Karte i_j gezogen wird, müssen, laut Spielregel, die Stapel, in denen die Karten $i_1,\ldots,i_{j-1}$ abgelegt wurden, eine oberste Karte zeigen, die kleiner oder gleich $i_1,\ldots,i_{j-1}$ ist. Da $i_j > i_k$ für alle $k \in \{1,\ldots,j-1\}$ ist, muss also i_j auf einem anderen Stapel abgelegt werden. Somit benötigt jede Strategie mindestens so viele Stapel wie die Länge der längsten steigenden Teilfolge.

Für die umgekehrte Richtung nehmen wir an, wir spielen unser Patience-Spiel mit der gierigen Strategie. An jede Karte, die nicht in einem schon errichteten Stapel landet, hängen wir einen Pfeil an. Dieser zeigt auf die Karte im Stapel links von ihr, die in diesem oben lag, als die betreffende Karte gespielt wurde. In Beispiel 4.1 ergibt sich



Folgt man den Pfeilen von einer Karte im äußersten rechten Stapel rückwärts, ergibt sich eine Zahlenfolge, im Beispiel $10,9,7,6,3$. Diese, in umgekehrter Reihenfolge gelesen (im Beispiel: $3,6,7,9,10$) ist eine steigende Teilfolge $i_1 < \cdots < i_k$ des gemischten Kartenspiels. In der Tat: Dass $i_1 < \cdots < i_k$ eine Teilfolge ist, folgt aus der Konstruktion. Wäre sie nicht steigend, dann wäre beispielsweise ein $i_j < i_{j-1}$ für ein j. Aber dann hätte gemäß der gierigen Strategie die Karte i_j auch auf den Stapel gelegt werden können, auf welchem i_{j-1} liegt. Somit kann die Teilfolge $i_1 < \cdots < i_k$ nur dann nicht steigend sein, wenn wir nicht die gierige Strategie gespielt haben, im Gegensatz zur Annahme.

Daher ist die so konstruierte Teilfolge steigend. Da sie genau eine Karte aus jedem der Stapel enthält, muss es nach der einleitenden Überlegung eine längste steigende Teilfolge sein. Dies beweist die Behauptung. ■

Eine hübsche Übung ist es hier, einen ähnlichen Algorithmus zur Konstruktion *sämtlicher* längster wachsender Teilfolgen einer Permutation anzugeben.

Die geschilderte Variante des Patience-Spiels wird auch *Patience-Sortieren* genannt, und zwar aus folgenden Gründen: Am Ende des Spiels liegt Karte 1 oben im ersten Stapel, wenn man Karte 1 wegnimmt, liegt Karte 2 oben auf einem der Stapel, wenn man diese wegnimmt, liegt Karte 3 oben auf einem der Stapel usw. Mit Hilfe dieses Vorgehens kann man also die Karten von Hand sortieren.

5 Simulationen

Für eine Aufgabe, die auch von Schülern im Rahmen eines kleineren Projekts gelöst werden kann, bietet sich z. B. die folgende Frage an: ”Stellen Sie sich vor, Sie sind Besitzer eines Spielcasinos, das die oben diskutierte Variante des Patience-Spiels anbietet. Ein

Deck Karten kostet 10 Euro. Für ein gewonnenes Spiel zahlen Sie 100 Euro aus. Ab wieviel Stapeln kann man für gegebenes N ein Spiel für gewonnen gelten lassen, wenn Sie im Mittel die Hälfte des Einsatzes als Gewinn behalten wollen? Simulieren Sie die Situation für verschiedene N."

Da wir in Abschnitt 3 schon besprochen haben, wie man N Karten mischt, ist die gierige Strategie nun leicht progammierbar. Eine Simulation durch Aldous und Diaconis in [1] liefert für $N = 52$ Karten (also ein gewöhnliches Kartenspiel) und 10000 Versuche die folgende Tabelle:

Anzahl der Stapel	8	9	10	11	12
Häufigkeit	54	525	1746	2791	2503

Anzahl der Stapel	13	14	15	16	17	18
Häufigkeit	1518	632	186	33	17	1

Gewöhnlich wird man also mit zehn bis dreizehn Stapeln das Spiel beenden. Ca. fünf Prozent aller Spiele enden mit neun Stapeln und weniger. Mit dem genannten Ziel, die Hälfte des Einsatzes als Gewinn zu behalten, kann man also bei Gewinnausschüttung des zehnfachen Einsatzes ein Spiel mit $N = 52$ Karten als gewonnen gelten lassen, wenn es mit neun Stapeln oder weniger endet.

6 Rekorde

Man kann sich beim Patience-Spiel, welches wir hier vorgestellt haben, auch fragen, wieviel Karten in den verschiedenen Stapeln im Schnitt liegen. Auch hierzu kann man Simulationen durchführen. Wir greifen im Rahmen des schulmathematischen Verständnisses einen weiteren Aspekt heraus: die Karten des ersten Stapels sind die *Rekord-Karten*. Damit meinen wir diejenigen Karten, deren Nummer (Label) kleiner ist als die Nummer aller Vorgängerkarten. In unserem Beispiel aus Abschnitt 4 sind dies die Rekorde 5,3,1.

Wenn man mit A_i das Ereignis *die i'te Karte ist ein Rekord* bezeichnet, so gilt $P(A_i) = 1/i$ und die Ereignisse $(A_1, \dots, A_N)$ sind stochastisch unabhängig. Dies ist keinerwegs elementarer Schulstoff. Die stochastische Unabhängigkeit entspricht auch nicht unbedingt unserer Intuition: ist die i'te Karte ein Rekord, würden wir vermuten, dass dies das Eintreten des Ereignisses, die $i+1$'te Karte ist auch ein Rekord, beeinflusst. Wir diskutieren den durchaus aufwendigen Beweis der stochastischen Unabhängigkeit hier nicht. Warum ist $P(A_i) = 1/i$? Dem gut gemischten Deck wird eine Folge von i Karten als Teilmenge entnommen. Jede mögliche Teilmenge der Mächtigkeit i kann laut Voraussetzung (gute Mischung) mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen werden. Die niedrigstwertige unter den gezogenen Karten ist der Rekordanwärter. Er kann mit gleicher Wahrscheinlichkeit an jeder Stelle der Folge liegen, also mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/i$, so auch an letzter Stelle, wodurch der Anwärter zum Rekord wird. Also ist $P(A_i) = 1/i$. Diese Überlegung gilt unabhängig davon, ob schon zuvor in einer Teilfolge der Länge $i' < i$ das Rekordereignis bezüglich eines anderen Anwärters eingetreten ist.

Häufig ist eine Diskussion der Berechnung von Erwartungswert und Varianz einfacher, wie eben auch in diesem Beispiel. Bezeichnet R_i die Zufallsgröße, die den Wert 1 annimmt, wenn die i'te Karte ein Rekord ist, und sonst den Wert 0 annimmt, so ist $R_i = 1$ mit Wahrscheinlichkeit $1/i$, also ist der Erwartungswert $E(R_i) = 1/i$. Die Anzahl $S_N(1) = \sum_{i=1}^N R_i$ der Rekorde in einer zufälligen Permutation von N Karten (und somit die Anzahl der Karten im ersten Deck des Patience-Sortierens) erfüllt somit

$$ES_N(1) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} \sim \log N.$$

Da $R_i^2 = R_i$ gilt, ist $V(R_i) = E(R_i^2) - E(R_i)^2 = 1/i - 1/(i^2)$. Also gilt für die Varianz

$$V(S_N(1)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i}(1 - \frac{1}{i}) \sim \log N.$$

Mit etwas mehr mathematischem Aufwand kann man sogar zeigen, dass die Verteilung von

$$\frac{S_N(1) - \log N}{\sqrt{\log N}}$$

gegen die Standardnormalverteilung konvergiert. Dies gehört aber in der Regel noch nicht einmal zum Standardstoff einer einführenden Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Das Patience-Spiel liefert eine schöne *Simulationsmöglichkeit* der Rekorde eines gemischen Kartendecks.

7 Ausblick – Ulams Problem

Das hier diskutierte Patience-Spiel führt bei weiterem Studium in ein bekanntes Thema der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie: Ulams Problem, der Frage nach dem Verhalten der längsten wachsenden Teilfolge einer Zufallspermutation. Diese Frage wurde bereits von Ulam 1961 aufgeworfen [11]. Mit Hilfe von Simulationen (die er aufgrund der begrenzten Computermöglichkeiten zu dieser Zeit nur für

$N = 10$ durchführen konnte!) vermutete er, dass der Mittelwert der Länge der längsten steigenden Teilfolge einer Permutation $\sigma \in S_N$ sich asymptotisch wie $c \cdot \sqrt{N}$ verhält, wobei c eine Konstante ist.

Die Frage wurde 1972 von Hammersley beantwortet [7]. Der Wert für c, nämlich $c = 2$, wurde 1977 von Kerov und Vershik gefunden [9]. Ein unabhängiger Beweis für $c = 2$ wurde im selben Jahr von Logan und Shepp [10] gefunden. Andere Beweismethoden für dieselbe Tatsache wurden später von Aldous und Diaconis [1], Johansson [8] und Groeneboom [6] gefunden. Ein vieldiskutiertes Thema seit 1977 war die Frage nach einem zentralen Grenzwertsatz für die Länge der längsten steigenden Teilfolge eines $\sigma \in S_N$. Genauer versucht man die Länge der längsten steigenden Teilfolge eines $\sigma \in S_N$ durch eine Funktion von N zu dividieren, so dass man asymptotisch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung erhält, die nicht nur in einem Punkt konzentriert ist. Wie eben bemerkt, ist beispielsweise $\sqrt{N}$ dafür nicht die richtige Funktion (Skala), denn die Länge der längsten steigenden Teilfolge eines $\sigma \in S_N$ dividiert durch $\sqrt{N}$ konvergiert gegen 2. Anschaulich versucht man eine Art "de Moivre-Laplace-Gesetz" für die Länge der längsten steigenden Teilfolge zu finden. Auch wenn es natürlich keinen Grund gibt, anzunehmen, dass das bei einer solchen Skalierung auftretende Limesgesetz stets die Gaußsche Glockenkurve – die Normalverteilung – ist, war die folgende Entdeckung von Baik, Deift und Johansson 1999 [3] doch eine große Überraschung: Die richtige Skala für solch ein Limesgesetz ist $N^{\frac{1}{6}}$, und die Fluktuationen sind asymptotisch nicht normal verteilt.

Die Beweise der oben genannten Sätze bieten einen Querschnitt durch weite Bereiche der Mathematik. Sehr lesenswerte, weiterführende Übersichtsarbeiten findet der interessierte Leser in Deift [4] und Aldous und Diaconis [2].

Literatur

[1] D. Aldous, P. Diaconis (1995): Hammersley's interacting particle process and longest increasing subsequences. Probab. Theory Related Fields 103, 199–213.

[2] D. Aldous, P. Diaconis (1999): Longest increasing subsequences: from patience sorting to the Baik-Deift-Johansson theorem. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 36, 413–432.

[3] J. Baik, P. Deift, K. Johansson (1999): On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations. J. Amer. Math. Soc. 12, 1119–1178.

[4] P. Deift (2000): Integrable systems and combinatorial theory. Notices Amer. Math. Soc. 47, 631–640.

[5] P. Erdös, G. Szekeres (1935): A combinatorial theorem in geometry. Compositio Math. 2, 463–470.

[6] P. Groeneboom (2000): Ulam's problem and Hammersley's process. Universiteit Delft: Preprint.

[7] J.M. Hammersley (1972): A few seedlings of research. Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. I: Theory of statistics, 345–394. Berkeley, Calif.: Univ. California Press.

[8] K. Johansson (1998): The longest increasing subsequence in a random permutation and a unitary random matrix model. Math. Res. Lett. 5, no. 1-2, 63–82.

[9] S.V. Kerov, A.M. Vershik (1977): Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tables. Soviet Math. Dokl. 18, 527–531.

[10] B.F. Logan, L.A. Shepp (1977): A variational problem for random Young tableaux. Advances in Math. 26, no. 2, 206–222.

[11] S. Ulam (1961): Monte Carlo calculations in problems of mathematical physics. Modern mathematics for the engineer: Second series, 261–281. New York: McGraw-Hill.

Anschrift der Verfasser
Peter Eichelsbacher
Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum
NA 3 / 68
D-44780 Bochum
peter.eichelsbacher@ruhr-uni-bochum.de

Matthias Löwe
Fachbereich Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Einsteinstr. 62
D-48149 Münster
loewe@math.kun.nl