Wie gut kannst Du schätzen?

Und andere Probleme für den Statistik-Unterricht

HELMUT WIRTHS, OLDENBURG

Zusammenfassung: *Es geht in diesem Beitrag um Unterrichtseinheiten, bei denen schnell Daten gewonnen oder bereitgestellt werden können, außerdem um Fragen, die sich Lernenden geradezu aufdrängen, und die sie geklärt wissen wollen. Wie sich dabei Begriffe, Methoden und Darstellungsarten der Statistik, auch die der explorativen Datenanalyse einsetzen lassen, wird in diesem Beitrag dargestellt, ebenso Hilfen, die ein zumindest graphikfähiger Taschenrechner bietet.*

1. Einführung

Seit dem Schuljahr 2003/2004 gelten in Niedersachsen neue Richtlinien für den Mathematikunterricht in den Klassen 7 bis 10 des Gymnasiums. Für die Jahrgangsstufen 7 und 8 ist ein Lehrplanelement enthalten, in dem Statistikunterricht gefordert wird. Es soll dabei die Datenkompetenz der Lernenden gefördert und in statistisches Denken eingeführt werden. Zwar haben die Richtlinien für die Orientierungsstufe für Klasse 5 ebenfalls den Umgang mit Daten gefordert, doch konnte ich davon in Klasse 7 nichts feststellen. In der Regel wurde dieser Teil der Richtlinien dem Refrain eines Songs von Hans Scheibner folgend („Das macht doch nichts, das merkt doch keiner.“) gar nicht erst unterrichtet. Da auch für das Gymnasium keine Fortsetzung vorgesehen war, wird Unterricht in Statistik für viele Lehrende neu sein. In diesem Beitrag werden Anregungen gegeben, wie Statistik unterrichtet werden kann.

2. Schätzen des Alters bekannter Persönlichkeiten

Engel [2001] habe ich die folgende Aufgabe entnommen und in mehreren Lerngruppen erprobt. Wer meint, die eine oder andere Persönlichkeit sei in seiner Lerngruppe zu wenig bekannt, setze dafür eine bekanntere ein und behalte dabei die Mischung zwischen jüngeren und älteren Personen bei.

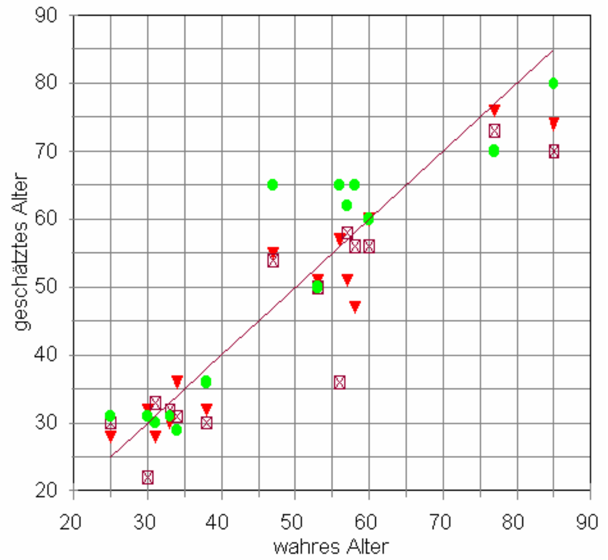
Aufgabe:

Die folgende Liste enthält die Namen von 14 bekannten Persönlichkeiten des öffentlichen Lebens. Notiere das von Dir geschätzte Alter jeder Person, ohne mit jemanden darüber zu sprechen. Wenn Dir die Person unbekannt ist, versuche zu raten.

Person	Alter (geschätzt)
Franziska von Almsick	
Franz Beckenbauer	
Bill Clinton	
Heike Drechsler	
Thomas Gottschalk	
Nelson Mandela	
Queen Elizabeth II	
Christina Rau	
Claudia Schiffer	
Michael Schumacher	
Arnold Schwarzenegger	
Katja Seizinger	
Wolfgang Thierse	
Jan Ullrich	

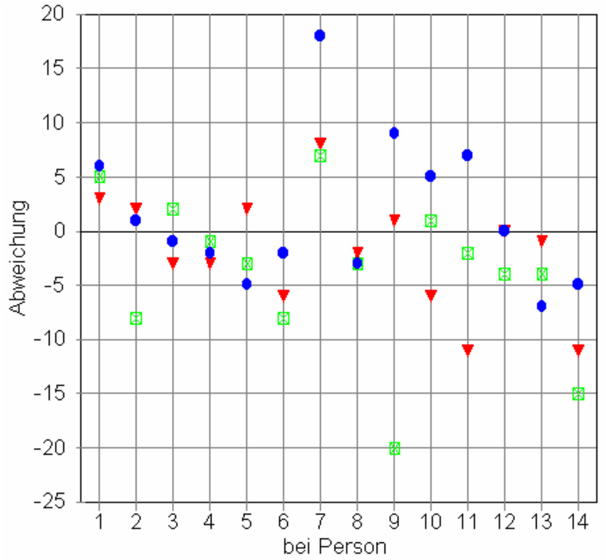
Soweit die Aufgabenstellung. Alle 14 Schätzungen sind schnell gemacht. Lernende wollen unbedingt wissen, ob sie gut geschätzt haben. Es entwickelt sich auch die Frage nach der besten Schätzung in der Lerngruppe. Um das zu entscheiden, müssen die Lernenden selbständig Kriterien entwickeln. In einer Lerngruppe wird das folgendermaßen formuliert: „Im Fußball wird die Rangfolge durch die erreichte Punktzahl festgelegt. Wer mehr Punkte hat, bekommt einen besseren Rangplatz. Bei gleicher Punktzahl entscheidet die Tordifferenz, bei gleicher Tordifferenz die größere Anzahl der geschossenen Tore. Bei unserer Schätzaufgabe ist es so: Die Anzahl der richtigen Schätzungen legt die Reihenfolge fest. Aber wir brauchen noch ein weiteres Kriterium, das die Reihenfolge bei gleicher

Anzahl an richtigen Schätzungen regelt.“ Ein zumindest graphikfähiger Taschenrechner kann die Situation veranschaulichen. Zeichnen wir ein Streudiagramm und tragen auf der x-Achse das wahre Alter und auf der y-Achse das geschätzte Alter ab. Richtige Schätzungen liegen auf der Gerade mit der Gleichung y = x, die wir noch zusätzlich einzeichnen. Die Schätzungen von Anke, Beate und Jan sind im folgenden Bild dargestellt



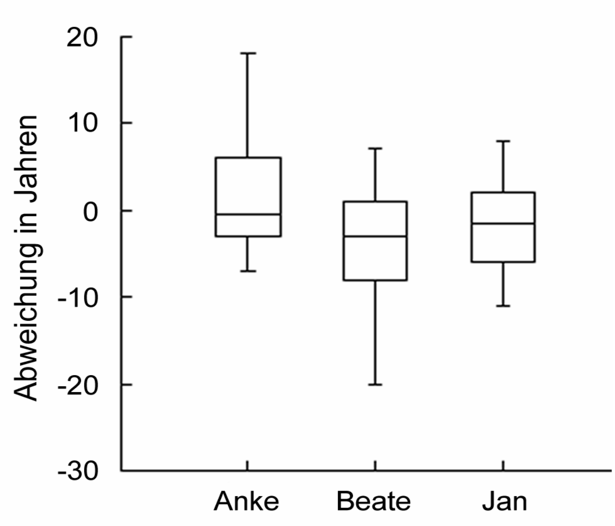
Die Symbole bedeuten: ♦ stellt die Schätzungen von Jan, ☒ die von Beate und ● die von Anke dar.

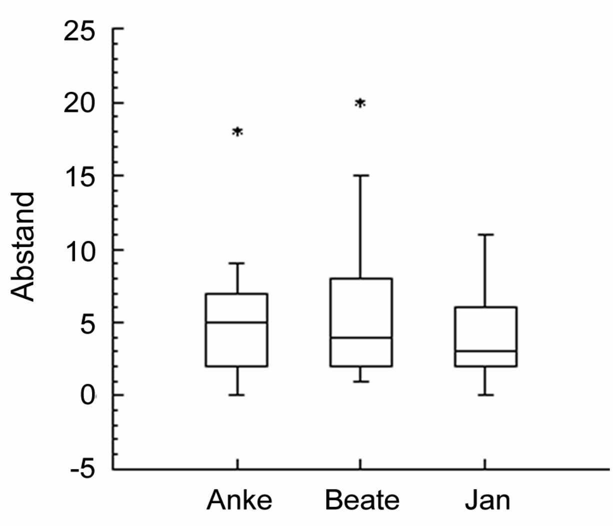
Man kann diesem Bild schon Hinweise entnehmen, wie die drei Personen schätzen. Wir unterstützen den Prozess, ein Kriterium zu finden, und stellen die Abweichungen des geschätzten Alters vom richtigen Alter dar. Eine negative Abweichung soll bedeuten, dass das Alter zu niedrig geschätzt wurde, entsprechend eine positive Abweichung, dass es zu hoch eingeschätzt wurde. Wir stellen eine neue Liste mit den Abweichungen her. Auch dies ist schnell geschehen, wenn wir es den Rechner durchführen lassen und im Tabellenkopf die entsprechende Gleichung eingeben. Die Abweichungen der Schätzungen der drei Personen von den wahren Werten ergeben folgendes Bild:



Über Abweichungen wird in dieser Lerngruppe lange diskutiert. Thomas formuliert eine erste Bedingung: Je kleiner die Summe aller Abweichungen ist, desto besser ist die Schätzung. Seinem Beispiel die Summe 10 sei besser als 100 setzt Katharina als Gegenbeispiel entgegen, dass die Summe -100 nicht besser als -10 sei. Till fasst schließlich die Diskussion zusammen: Die Summe aller Abweichungen soll Null sein. Aber dagegen erhebt sich Widerstand aus der Lerngruppe. Dies Kriterium könne sowohl jemanden erfassen, der immer ganz schlecht schätzt, mal viel zu groß, ein anderes Mal viel zu klein, aber auch jemand, der immer nur ein wenig die richtige Lösung verfehlt. Also eignet sich das Kriterium „Die Summe aller Abweichungen soll Null sein.“ nicht zur Charakterix^^sierung des besten Schätzers.

Statistik treiben heißt auch, die Fülle der Daten auf eine überschaubare Anzahl an Kennzahlen zu reduzieren, die immer noch möglichst viel Informationen über den Datensatz enthalten. Hier bieten sich die folgenden fünf Kennzahlen an, die einfach zu bestimmen und zu interpretieren sind: Das Maximum, das Minimum der Daten, der Median und die beiden Quartile. Wie diese aus einer sortierten Datensammlung bestimmt werden können, und wie daraus ein Maximum-Minimum-Boxplot oder ein Boxplot, der mögliche Ausreißern besonders hervorhebt, gezeichnet werden kann, wird zum Beispiel in Wirths [2002] dargestellt. Nun folgt der Boxplot zu den Abweichungen der Schätzungen der drei Personen von den wahren Werten:





Nach Meinung der Lerngruppe treten bei den Boxplots die Eigenheiten der drei Personen beim Schätzen besonders deutlich hervor. Alle schätzen mal zu viel, ein andermal zu wenig. Beate neigt stärker zum Unterschätzen, Anke zum Überschätzen, während Jans Schätzungen (fast) ausgeglichen erscheinen. Meine Frage an die Lerngruppe: Wie sieht ein Boxplot für Jemanden aus, der immer unter-(über)-schätzt, und wie für eine Person, bei der sich Unter- und Überschätzungen ideal ausgleichen?

Bei der Diskussion, ob über die Abweichungen ein Kriterium für gute Schätzungen entwickelt werden kann, habe ich gehofft, dass aus der Lerngruppe heraus der Vorschlag kommt, die Abstände, also die Beträge der Abweichungen, zu betrachten, habe mich aber bewusst zurückgehalten. In dieser Lerngruppe kommt dieser Vorschlag erst jetzt nach der ausgiebigen Diskussion über Abweichungen. Wir stellen eine neue Liste mit den Abständen her. Auch dies ist schnell geschehen, wenn wir es den Rechner durchführen lassen und im Tabellenkopf die entsprechende Gleichung eingeben. Nach den Erfahrungen mit den Abweichungen drucke ich hier kein Streudiagramm ab, sondern sofort die Boxplots der Abstände der Schätzungen der drei Personen von den wahren Werten:

Anke und Jan haben jeweils eine richtige Schätzung, während Beates beste Schätzung um ein Jahr vom richtigen Alter abweicht. Das kann man zwar auch schon am ersten Streudiagramm erkennen, aber nach Meinung meiner Lerngruppen wird es bei den Boxplots am deutlichsten. Anke und Beate haben aber auch jeweils eine Schätzung (in ihrem Boxplot mit „*“) gekennzeichnet, die weit außerhalb des Bereichs ihrer übrigen Schätzungen liegt, also einen Ausreißer im Sinne der Statistik darstellt. Meine Schülerinnen und Schüler haben anstelle von Ausreißer von einer außerordentlich schlechten Schätzung gesprochen. Für Jan als besten Schätzer sprechen nach Meinung der Lerngruppe folgende statistischen Kennzahlen: Er hat den besseren Median, das bessere 3. Quartil und das niedrigste Maximum, während er im Minimum nicht schlechter als Anke und im 1. Quartil nicht schlechter als Anke und Beate ist. Außerdem ist bei Jan die Summe aller Abstände minimal. Und damit ist in dieser Lerngruppe das zweite Kriterium gefunden, das neben der Zahl der richtigen Lösungen den besten Schätzer charakterisieren soll.

In anderen Lerngruppen ist die minimale Summe der Abstände das dominierende Kriterium. Jannes stellt das zum Beispiel so dar: Wenn jemand vier richtige Lösungen hat, weicht aber bei den restlichen Schätzungen zum Teil erheblich von den richtigen Werten ab, dann hat er schlechter geschätzt als jemand, der drei richtige Lösungen hat und sich sonst immer nur um ein bis höchstens zwei Jahre verschätzt. Für die Lerngruppe um Jannes gilt die minimale Summe aller Abstände als einziges Kriterium. Ich habe auch hier nicht regulierend oder formend ins Gespräch eingegriffen. Mir ist es wichtig, dass die Lernenden selbständig Ideen entwickeln und eigenständig Kriterien über den besten Schätzer unter sich aushandeln und dann konsequent anwenden.

3. Die Euro-Scheine

Nach Behandlung des arithmetischen Mittelwerts, der fünf Kennzahlen der EDA und der beiden Boxplot-Typen bringen die Lernenden einer 8. Klasse unvermutet folgende Fragen in den Unterricht ein und wollen sie unbedingt behandelt wissen:

Welche Euro-Scheine und Euro-Münzen gibt es? Welche davon sind in der eigenen Geldbörse oder in der der Eltern vorhanden?

Die Schülerinnen und Schüler schauen zunächst in der eigenen Geldbörse nach, befragen dann Freunde, Eltern sowie weitere Bekannte und tragen ihre Ergebnisse zusammen. Jeder stellt seine Ergebnisse unter der Überschrift „Verteilung der Euro-Münzen und -Scheine in der Geldbörse von ...“ (hier folgt der Name oder auch ein Pseudonym, manchmal werden ganz penibel Datum und Uhrzeit mit vermerkt) für jede Geldbörse in einem eigenen Histogrammen dar. Auf der waagerechten Achse wird der Münz- bzw. der Geldscheinwert in aufsteigender Reihenfolge im Abstand von 0,5 cm aufgetragen, auf der dazu senkrechten Achse die Anzahl der vorgefundenen Exemplare der jeweiligen Sorte. Diese Darstellungsart ist ihnen aus dem bisherigen Unterricht bekannt und muss auch Lesern nicht mehr unbedingt vorgestellt werden. So unterschiedlich die von den Lernenden gezeichneten Verteilungen auch sind (nicht immer kommt von jeder Münzsorte oder von jeder Geldscheinsorte wenigstens ein Exemplar zum Vorschein, mal sind es mehr Münzen, mal mehr Scheine, der Gesamtwert aller Scheine und Münzen schwankt erheblich von Geldbörse zu Geldbörse, sogar die Entdeckung ausländischer Euromünzen wird registriert), eine Beobachtung ist deutlich: Es fehlen Scheine mit den Werten 500 €, 200 € und 100 €. In Schülergeldbörsen wird auch der 50 €-Schein selten angetroffen. „Pro Kopf sollen es mehr als 2 000 € sein.“, sagt Lukas und beteuert, das habe er irgendwo gelesen. „Wir sind mit unseren Beobachtungen davon meilenweit entfernt.“ Die Lernenden wollen die Behauptung von Lukas nachprüfen. Dem Kalender für Lehrerinnen und Lehrer 2001/2002 aus dem Deutschen Sparkassen Verlag können wir folgende Angaben der Deutschen Bundesbank über die Anzahl der zum 1.1.2002 neu eingeführten Euro-Scheine in allen Euro-Ländern entnehmen:

Nennwert in €	Anzahl in 10^6 Stück
5	2 415
10	3 013
20	3 608
50	3 674
100	1 246
200	229
500	360

Außerdem sind die Motive und die Maße der einzelnen Scheine vermerkt. Der Aufforderung, so viele Informationen wie möglich zu errechnen, können die Lernenden nicht widerstehen und so wird

- die Gesamtzahl der Euro-Scheine,
- der Gesamtwert des Papiergelds,
- die Fläche des Papiergelds für jede Sorte,
- die gesamte bedruckte Fläche des Papiergelds,
- den auf jeden einzelnen Einwohner in den Ländern mit Euro-Währung (ca. 304 Millionen Einwohner) im Mittel entfallenden Papiergeld-Betrag,
- der Anteil der einzelnen Geldscheinsorte an der Gesamtzahl der Scheine bzw. am Gesamtgeldwert,
- der mittleren Wert eines Euro-Scheins

berechnet. Einige versuchen auch noch, die Papiermasse abzuschätzen.

Die Behauptung von Lukas erweist sich als korrekt. Auf jeden Einwohner in den Euro-Ländern entfällt der immense Betrag von 2 133,10 €. Außerdem berechnen wir, dass ein Euro-Schein im (arithmetischen) Mittel 44,58 € wert ist. (Beide Beträge sind auf volle Cent abgerundet.)

„Irgendetwas ist faul.“, sagt Ronald und setzt eine stürmische Diskussion in Gang, in der die vorher erarbeiteten Ergebnisse zum arithmetischen Mittelwert in Frage gestellt werden. „Wenn ich den Pro-Kopf-Euro-Betrag mit der Anzahl der Einwohner multipliziere, erhalte ich nicht den Gesamtwert aller Euro-Scheine. Das gleiche gilt für das Produkt aus dem Mittelwert aller Scheine und der Anzahl der Scheine.“ Haben wir gegen die Vorstellung der gleichmäßigen Verteilung, die zum arithmetischen Mittelwert gehört, verstoßen? Nun, wir haben auf volle Cent gerundet. Rechnen wir bei den Mittelwerten mit allen Stellen, die der Rechner anzeigt, dann erhalten wir die gewünschte volle Übereinstimmung. Dieses Beispiel zeigt, dass der arithmetische Mittelwert von Geldbeträgen nicht unbedingt ein Geldbetrag ist. Aber dass das Runden einen Fehlbetrag von 48,9 Millionen Euro (Mittelwert pro Euro-Schein auf Cent gerundet multipliziert mit der Zahl aller Scheine) ergibt, das beeindruckt sie doch sehr.

Schließlich wollen die Lernenden auch noch die 5 Kennzahlen der EDA berechnen und beide Boxplots zeichnen. Dazu denken wir uns alle $14{,}545 \cdot 10^9$ Euro-Scheine dem Wert nach in aufsteigender Folge sortiert. Die 5 Kennzahlen erhalten wir wie folgt:

Minimum	Wert des 1. Geldscheins (5 €)
1. Quartil	Mittelwert der Werte des 3 636 250 000. Scheins und des 3 636 250 001. Scheins (10 €)
Median	Mittelwert der Werte des 7 272 500 000. Scheins und des 7 272 500 001. Scheins (20 €)
3. Quartil	Mittelwert der Werte des 10 908 750 000. Scheins und des 10 908 750 001. Scheins (50 €)
Maximum	Wert letzter Schein (500 €)

Wenn wir einen Boxplot zeichnen, fällt auf, dass der untere Whisker (Länge 5 €) im Vergleich zum oberen (Länge 450 €) extrem lang ist. Das weckt Interesse an einem Boxplot der beurteilenden Statistik. Wir rechnen: $R = Q3 - Q1 = 40$ € und $1{,}5 \cdot R = 60$ €. Daraus folgt: $Q1 - 1{,}5 \cdot R = -50$ €. Nach unten gibt es also keine Ausreisser. Der untere Whisker reicht von 5 € bis 10 €. Ferner gilt: $Q3 + 1{,}5 \cdot R = 110$ €, der obere Whisker reicht daher von 50 € bis 100 €. Die Werte der Geldscheine zu 200 € und 500 € liegen „weit außerhalb“ des Bereichs, der durch die Whisker dargestellt wird, sind also Ausreisser. Insgesamt sind das rund 4 % aller Geldscheine. Statt von Ausreißern reden die Schülerinnen und Schüler von außergewöhnlichen Geldscheinen, die man in normalen Geldbörsen in der Regel nicht oder nur ganz selten, und dann nur zu besonderen Anlässen, findet.

4. Ein Weitsprungwettbewerb

Das folgende Beispiel eignet sich ebenfalls gut als Einführung in statistisches Denken. Bei solchen Wettbewerbssituationen kann man Lernende leicht zum Formulieren von Leitfragen bewegen. Das Problem lautet:

Die Klassen 7a und 7b machen einen Wettbewerb im Weitsprung. Die Ergebnisse in Meter sind:

Lerngruppe 7a:

2,92; 3,60; 3,47; 3,50; 3,54; 3,06; 3,08; 3,12; 3,16; 3,18; 3,17; 3,23; 3,19; 3,16; 3,36; 3,42; 3,40; 3,38; 3,37; 3,39; 3,28; 3,27; 3,34; 3,35; 3,31; 3,32; 3,30; 3,33; 3,29

Lerngruppe 7b:

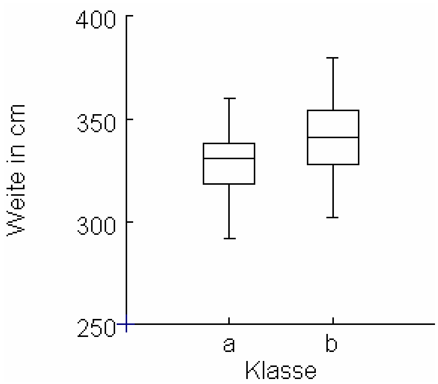
3,41; 3,40; 3,42; 3,39; 3,43; 3,41; 3,02; 3,80; 3,47; 3,47; 3,53; 3,55; 3,50; 3,12; 3,07; 3,70; 3,75; 3,25; 3,20; 3,17; 3,57; 3,62; 3,65; 3,35; 3,35; 3,29; 3,27; 3,32

Aufgaben:

1. Welche Klasse die „bessere“?
2. Welche Klasse ist die „ausgeglichenere“?
3. Welche Klasse hat die „stärkere Spitze“?
4. In welcher Klasse ist eine Leistung von 3,50 m „mehr wert“, das heißt in welcher Klasse gehört man mit dieser Sprungweite zu den besseren Sportlern dieser Klasse?

Lösungsskizzen zu 1:

In der Regel wird der Vergleich der arithmetischen Mittelwerte der Sprungweiten von Lernenden als Kriterium genannt. In der 7a ist das arithmetische Mittel 3,29 m, in der 7b ist es 3,41 m. Damit kann man sich begnügen und die 7b als die bessere Klasse bezeichnen. Ich wollte das auch, musste aber umdisponieren, als Florian sein Unbehagen äußert: „Wenn in die 7a ein Springer hinzukommt, der erheblich weiter als alle anderen springt, dann kann sich unser Urteil ändern.“ Und Florian macht an einigen Beispielen klar, wie sich der arithmetische Mittelwert ändert, wenn wir einen besonders starken Springer (also einen Ausreißer im Sinne der Statistik) hinzunehmen. Eins macht die Diskussion deutlich. Wenn wir die Daten nicht kennen, dann müsen wir beim Vergleich von arithmetischen Mittelwerten vorsichtig sein. Bei unseren Daten ist die Situation überschaubar, es gibt keinen Ausreißer. Die Diskussion hat als Nebenergebnis gebracht, dass der Median erheblich geringere Veränderungen erfährt als der arithmetische Mittelwert. Wenn wir die fünf Kennzahlen der EDA berechnen, wird es noch deutlicher. Neben dem arithmetischen Mittelwert sind 5 weitere statistische Kennzahlen (Minimum, 1. Quartil, Median, 3. Quartil, Maximum) bei Klasse 7b größer als bei Klasse 7a. Besonders eindrucksvoll zeigt es der Vergleich der beiden Boxplots:



Anne hat sich eine besonders interessante Lösung ausgedacht: Beim Eintrag in die Listen ihres Taschenrechners fällt ihr auf, dass bei jedem Listenplatz der betreffende Schüler der 7b besser ist als der auf dem gleichen Listenplatz befindliche aus der 7a. Nur für den 29. Schüler der 7a findet sich kein Vergleichspartner in der Parallelklasse. Anne hat die Sprungweiten aller Schüler der 7a und die aller Schüler aus der 7b addiert. Dabei stellt sie fest, dass die gesamte Sprungweite aller 28 Schüler der 7b nur um 1 cm kürzer ist als die der 29 Schüler der 7a. Daraus folgert sie, dass die 7b nur irgendeinen Schüler für den 29. Sprung nominieren muss. Dieser Schüler muss noch nicht einmal springen, er braucht nur einen kleinen Schritt zu machen, um die Gesamtsprungweite der 7a zu übertreffen. Daher ist für sie klar, dass im Weitsprung die 7b besser als die 7a ist.

Annes Idee, die Sprungweiten zu addieren, kann ich gut ausnutzen, um die beiden Aspekte zum arithmetischen Mittelwert zu verdeutlichen:

– Die Verteilung der Gesamtsprungweite auf 28 (bzw. für die 7a 29) gleich große Teile führt zum arithmetischen Mittelwert und
– Die Summe der Abweichungen aller Sprungweiten vom arithmischen Mittelwert ist Null.

Lernende müssen nicht nur die Gleichung zum Berechnen des arithmetischen Mittelwerts kennen und anwenden können, sie müssen sie auch veranschaulichen und wesentliche Eigenschaften damit verbinden können. Daher freue ich mich über jede sich bietende Gelegenheit und nutze sie zur Verankerung.

Lösungsskizzen zu 2:

Lernende nennen hier meist als Kriterium für Ausgeglichenheit den Unterschied zwischen Maximum und Minimum. Sie meinen damit eine Größe, die Spannweite S heißt und als S = Maximum - Minimum definiert wird. Für die 7a ist

$$S = 3{,}60\text{ m} - 2{,}92\text{ m} = 0{,}68\text{ m},$$

für die 7b

$$S = 3{,}80\text{ m} - 3{,}02\text{ m} = 0{,}78\text{ m}.$$

Nach diesem Kriterium wird man also Klasse 7a als die ausgeglichenere der beiden Klassen bezeichnen. Aber Lernende können unter „ausgeglichen“ auch etwas anderes verstehen. In Abschnitt 2 ist für sie Jan mit seinen Schätzungen am ausgeglichensten, weil sich die Abweichungen seiner Schätzungen (in etwa) ausgleichen. Wenn also die Summe aller Abweichungen Null ergibt, dann liegt in diesem anderen Sinne ideale Ausgeglichenheit vor.

Lösungsskizzen zu 3:

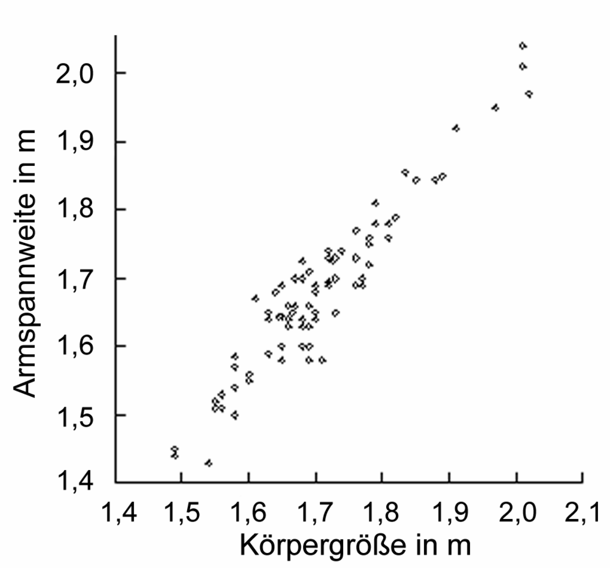
Zunächst muss man festlegen, ab welcher Sprungweite man von einer Spitzenleistung reden will. Setzen wir hier zum Beispiel 3,50 m als eine solche Grenze fest. In der Klasse 7a sind es 3 vom 29 Schülern, also rund 10 %, die mindestens 3,50 m gesprungen sind, in der 7b sind es 9 von 28 Schülern, also rund 32 %. Sowohl absolut als auch relativ sind es in der 7b mehr, sie hat also die stärkere Spitze.

Lösungsskizzen zu 4:

Diese Frage ist eigentlich schon in Aufgabe 3 beantwortet worden. In Klasse 7a gibt es weniger Schüler als in der 7b, die mindestens 3,50 m springen. Daher ist in Klasse 7a diese Sprungweite mehr wert.

5. Leonardos Mensch

Mit der Federzeichnung von Leonardo da Vinci „Die menschlichen Proportionen“ aus dem Jahre 1509 und dem zugehörigen Text (vgl. zum Beispiel bei Engel 2001) kann man die Phantasie der Lernenden zu eigenen Tun und zu selbständigen Untersuchungen gut anregen. In einer 9. Klasse stelle ich nach Einführung des CAS-Taschenrechners Leonardos Überlegungen zum Menschen vor. Ein Satz fasziniert die Schülerinnen und Schüler besonders: „Die Armspanne eines Menschen ist äquivalent zu seiner Körpergröße.“ Das wollen sie näher untersuchen und dabei auch ihren neuen Rechner mit einsetzen. Für 78 Messungen ergibt sich folgendes Bild:

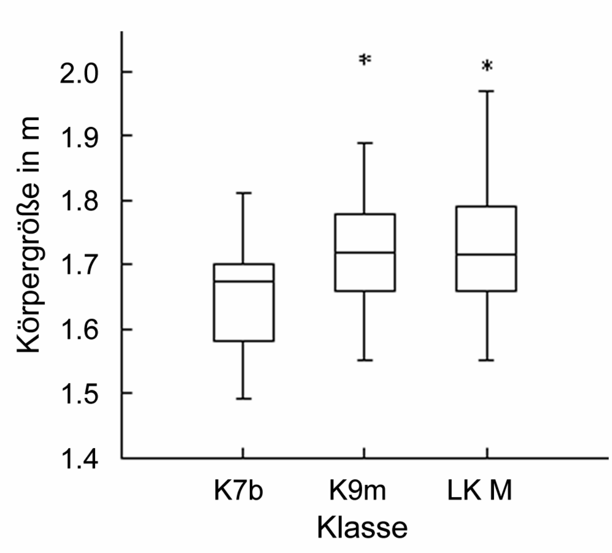


Ich habe meine übrigen Lerngruppen (Klasse 7 und den Leistungskurs in Jahrgang 12) mit einbezogen und so Daten von insgesamt 78 Lernenden erfasst. Auf der waagerechten Achse des Bildes wird die Körpergröße der Lernenden und auf der dazu senkrechten Achse die zugehörige Armspannweite (beides in Meter gemessen) aufgetragen. Ein linearer Trend ist der Punktwolke durchaus zu entnehmen. Die Lernenden interpretieren „äquivalent“ mit „gleich“, offenbar im Sinne von Leonardo. Zunächst meinen sie, Leonardos Aussage müsse bei jedem Menschen immer exakt zutreffen. Sie stören sich an den Abweichungen von Körpergröße und Armspannweite, auch wenn sie gering sind, und argwöhnen, dass sie selber nicht oder nicht so ganz Leonardos Vorstellungen von einem wohlproportionierten Menschen entsprechen. Aber haben zu Leonardos Lebzeiten alle Menschen diesem Ideal entsprochen? Nach einer intensiven Diskussion formuliert die Lerngruppe als Ergebnis, Leonardos Aussage als Modell zu nehmen, die etwas über einen (gedachten) durchschnittlichen Menschen aussagt, auch als Anleitung für Künstler gedacht, die menschlichen Proportionen in Zeichnungen so wiederzugeben, dass die Darstellung von Menschen natürlich wirkt. Nun verstehen sie Leonardos Aussage so: Die Armspannweite ist (in etwa) gleich der Körpergröße, dabei sind mehr oder weniger große Abweichungen nach oben und nach unten natürlich und gleichen sich im Idealfall aus. In der Lerngruppe wird auch eine andere Interpretation geäußert: Die Armspannweite und die Körpergröße sind proportional mit einem Proportionalitätsfaktor nahe bei 1.

Ich habe keine Regressionsrechnung durchführen lassen. Die Lernenden haben eine Ursprungsgerade nach Augenmaß in das Bild eingezeichnet und deren Steigung bestimmt, wobei die Steigungen in der Nähe von 1 liegen. Es herrscht Übereinstimmung darüber, dass der Graph durch den Ursprung gehen muss. Einige Lernende gehen noch weiter, haben eine Ursprungsgerade durch $P(\bar{x} \mid \bar{y})$ gewählt und deren Gleichung bestimmt. Sie argumentieren, dass eine Gerade, bei der die Summe aller Abweichungen Null ist, die Abweichungen sich also insgesamt ausgleichen, durch P gehen muss. Dies Ergebnis haben wir in der Diskussion, wie Leonardos Behauptung zu verstehen ist, erhalten. Da die Lernenden Steigungen erhalten, die fast 1 betragen, ist für sie klar, dass Leonardos Behauptung auch auf heutige Menschen angewandt werden kann, allerdings nicht als Aussage, die für jeden einzelnen Menschen exakt gilt, sondern als ein Modell, das Prognosewerte liefert, um die die tatsächlichen Werte schwanken.

Kein Schüler hat den Regressionsmodul des Rechners eingesetzt. In der Vorbereitung habe ich mir schon Gedanken gemacht, wie die dabei entstehenden Gleichungen zu interpretieren sind, vor allem, wie ein y-Achsenabschnitt ungleich Null zu erklären und zu interpretieren ist. Die Gleichung $y = 0{,}97 \cdot x + 0{,}0057$ kann für die Daten der 7. Klasse gewonnen werden. Für die Körpergröße wähle ich die Variable x und für die Armspannweite die Variable y. Bei der Gleichung für Klasse 7 können wir den y-Achsenabschnitt noch als systematischen Fehler bei der Messung der Armspannweite interpretieren, aber das macht bei betragsmäßig größeren y-Achsenabschnitten keinen Sinn mehr. Die Schülerinnen und Schüler haben die Messungen sehr sorgfältig durchgeführt. Einen systematischen Fehler von zum Beispiel 23 cm oder -17,5 cm hätten sie bereits bei der Messung moniert und die Messung sofort wiederholt. Bei solchen Gleichungen können wir den Definitionsbereich auf Körpergrößen größer als 1,50 m einschränken und brauchen uns dann um die Interpretation des y-Achsenabschnitts keine Gedanken mehr zu machen.

Die Lernenden haben selbständig begonnen, eindimensional zu arbeiten, also nur die Körpergrößen oder nur die Armspannen zu betrachten. Sie wollten noch mehr Informationen aus den Daten herausholen. Zu den drei Boxplots für die Körpergrößen der Schülerinnen und Schüler, die sie mit ihren Rechnern selbständig erstellt haben, habe ich ihnen die Aufgabe gestellt, sich ein Bild von den Größenverhältnissen in den drei Lerngruppen zu machen.

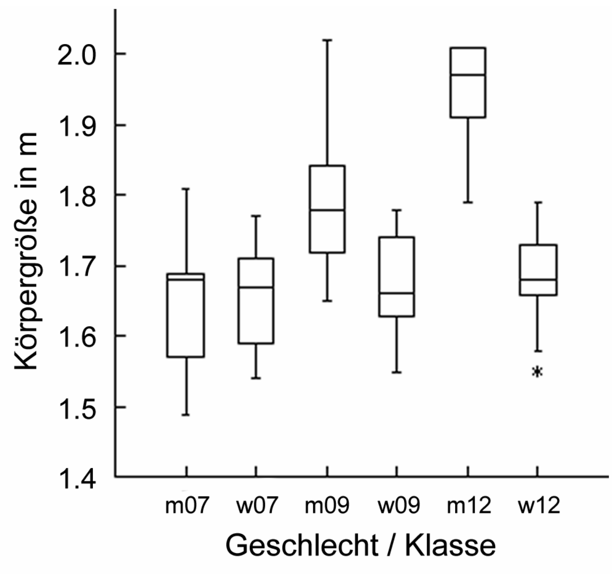


Konkret: Fertigt eine Zeichnung an, wie die Aufstellung der Schüler aussehen wird, wenn sie der Größe nach geordnet sind.

Für die eigene Lerngruppe ist dies kein Problem, man kann die Aufstellung ja konkret durchführen und die dabei gemachten Erkenntnisse bei den Zeichnungen der anderen Lerngruppen mit einbeziehen.

Dass Lernende von Jahr zu Jahr größer werden und auch von Jahrgang zu Jahrgang größer sind, ist eine Erfahrungstatsache. Es verwundert uns nicht, dies an den Boxplots zu erkennen. Aber gibt es keinen Unterschied in den Größen und in der Größenverteilung mehr zwischen den Schülern des 9. und des 12. Jahrgangs? Die beiden Boxplots zwingen zum genauen Hinschauen. Der etwas längere obere Whisker und der größere Abstand von 3. Quartil und Median beim Boxplot der 12. Klasse müssen erkannt und entsprechend interpretiert werden.

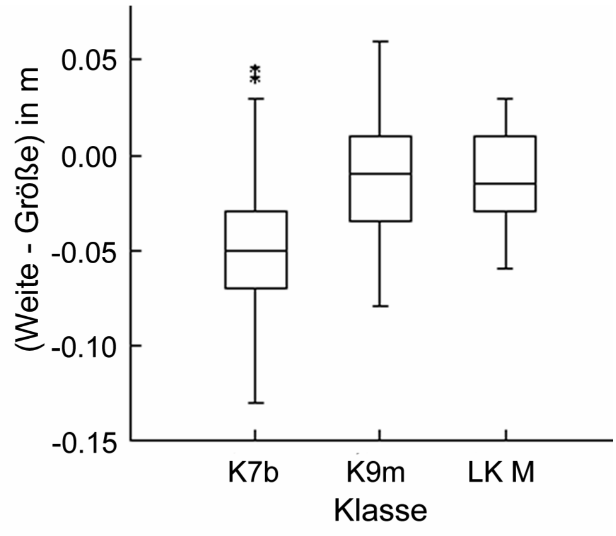
Noch interessanter werden die Boxplots, wenn man nach Geschlechtern trennt.



Gibt es nur bei den Jungen ein deutliches Größenwachstum? Ist es bei den Mädchen schon meist in der 7. Klasse fast abgeschlossen? Man muss schon genau hinschauen, um doch noch Unterschiede zu entdecken. Interessant ist auch, wie Ausreisser in der gesamten Klasse in den nach Geschlechtern getrennten Teilgruppen verschwinden beziehungsweise neu hinzukommen. Wenn man die Lerngruppen vor sich stehen sieht, ist dieser Effekt nicht unvermutet und wird auch von den Lernenden vorher so prognostiziert. Gibt es auch Boxplots ohne Whiskers? Der Boxplot der Jungen im LK ohne oberen Whisker provoziert diese Frage. Im LK ist die Ursache schnell entdeckt. Hier ist der Grund offensichtlich. In der 9. Klasse gebe ich folgende Informationen als Arbeitsauftrag: Es sind 5 Schüler im LK, die folgende Körpergrößen (jeweils in m) haben: 2,01; ...; 1,97; 1,91; 1,79. Wie groß ist der zweitgrößte Junge im LK? Die Lösung lautet: 2,01 m. Nun ist klar, warum es keinen oberen Whisker gibt. Bei diesem Beispiel ist noch mehr deutlich geworden: Es macht keinen Sinn, Boxplots bei weniger als 5 Daten zu zeichnen, und auch nicht, Statistik mit so wenig Daten zu treiben.

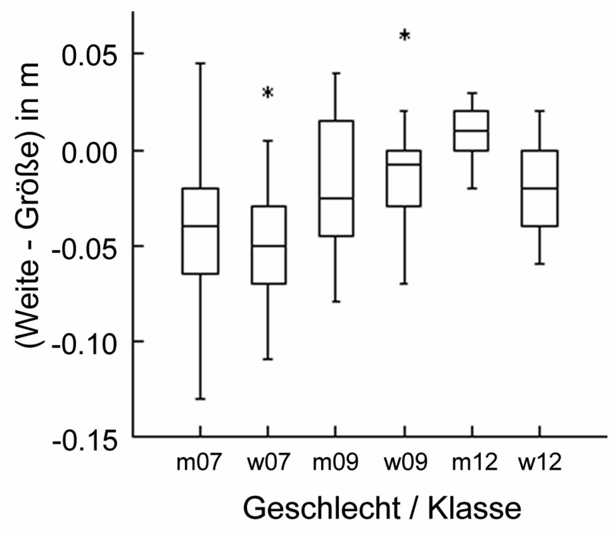
„Schade, dass wir nicht die Entwicklung der gleichen Schüler von der 7. Klasse bis zum LK mit den Boxplots dokumentieren," meinte Janina. Recht hat sie, aber das wäre ein sehr reizvolles Vorhaben, für das man einige Jahre warten muss, bis man die Daten bereit hat. Im nächsten Schuljahr kommen die 5. Klassen in Niedersachsen wieder zum Gymnasium. Vielleicht greift ein Leser oder eine Leserin diesen Vorschlag auf und verfolgt die Entwicklung von Schülern von der 5. Klasse bis zum Abitur.

Andere Schüler haben die Differenz aus der Armspannweite und der Körpergröße ausgerechnet. Das Streudiagramm mit allen 78 Daten zeigt, dass in der Mehrzahl der Fälle diese Differenz negative Werte annimmt. Die Lerngruppe meint, dass man dies beim Streudiagramm deutlicher als in der Datenliste sieht. Ich verzichte dennoch auf diesen Graphen und stelle sofort die noch informativeren Boxplots für die drei Klassen dar:



Nähern sich die Körpergröße und die Armspannweite im Laufe der Jahre (in etwa) einander an? Sollte man die Gültigkeit von Leonardos Aussage vielleicht nur an erwachsenen (im Sinne von ausgewachsenen) Menschen erproben? Gibt es Jahre, in denen das Breitenwachstum stärker als das Längenwachstum ist? All das sind Fragen, die sich meine Schülerinnen und Schüler beim Betrachten dieser Boxplots stellen. Will man diesen Fragen weiter nachgehen, wird man bei einigen von ihnen neue Erhebungen gezielt durchführen müssen. Ich habe aus Zeitgründen darauf verzichten müssen. Vielleicht regt dies eine Leserin oder einen Leser zu eigenen Untersuchungen an und wir lesen hier den Bericht.

Noch interessanter sind die Boxplots für die Differenz aus der Armspannweite und der Körpergröße, wenn man nach Geschlechtern trennt. Die Spannweite (Differenz zwischen Maximum und Minimum in den Boxplots) wird im Laufe der Jahre kleiner, der Median rückt in die Nähe von Null. Aber die geschlechtsspezifischen Unterschiede in meinen Lerngruppen sind nicht zu übersehen.



6. Abschlussbemerkungen

Man kann ein Projekt durchführen, bei dem man zuerst jahrelang Daten sammeln muss, bevor die Auswertung beginnen kann. Solch ein Projekt mit überraschenden Ergebnissen wird beispielhaft in Nordmeier[1989] dargestellt. Man kann auch von seinen Schülerinnen und Schülern einen umfangreichen Datensatz zusammentragen lassen. Ein solches projektartiges Vorhaben wird zum Beispiel in Wirths[2002] beschrieben. In diesem Beitrag möchte ich andere Vorgehensweisen vorstellen: Daten werden von den Lernenden selbst schnell erstellt, so dass die Auswertung noch in derselben Stunde zu ersten Ergebnissen führt. Nach der Datensammlung stellen Schülerinnen und Schüler selbst eine Frage, die sie geklärt wissen wollen, zu deren Beantwortung sie eine eigene Strategie entwickeln müssen. Man kann vielfältige Anässe dafür schaffen oder nutzen. Dies ist das Anliegen des ersten Beispiels. Wie man Schülerimpulse oder -fragen aufgreifen, Daten und Informationen sammeln, dabei auch vorgegebene Daten, wo immer man sie findet, integrieren und die dabei aufkommenden Fragen und Irritationen klären kann, wird im zweiten Beispiel vorgestellt. Mit gut gewählten Leitfragen, die Lernende vor allem in Wettbewerbssituationen gern selbst entwickeln, kann ebenfalls gut in statistisches Denken eingeführt werden. Dies soll im dritten Beispiel verdeutlicht werden. Wie man Anregungen aus der Geschichte in lebendigen Unterricht mit interessanten Ergebnissen integrieren kann, soll das vierte Beispiel zeigen.

Diese Beispiele müssen nicht der Reihe nach abgearbeitet werden. Wenn vom kommenden Schuljahr an in Niedersachsen wieder Unterricht am Gymnasium von der 5. Klasse an möglich wird, dann sollte man diese Beispiele in den Unterricht der 5. bis 8. Klasse so integrieren, dass in jedem Schuljahr Statistik betrieben wird, und dass in jedem Schuljahr der Schatz an Statistik-Erfahrungen und an Fingerspitzengefühl im Umgang mit Daten vergrößert wird.

Wichtig ist mir, dass Schülerinnen und Schüler von Anfang an in die Problemstellung und -findung mit einbezogen werden, Gelegenheit erhalten, selbst Daten zu sammeln oder zu produzieren, eigene Fragen zu stellen, die sie beantwortet wissen wollen, dabei Erfahrungen sammeln, Fingerspitzengefühl im Umgang mit Daten entwickeln und auch Vorurteile und Hypothesen auf den Prüfstand stellen können.

Wenn man das Erstellen von Daten Lernenden überlässt, kann es leider auch vorkommen, dass mit solch selbsterstellten Daten die vom Lehrenden gesetzten Lernziele nicht oder nur schwer zu erreichen sind. Damit müssen Lehrende rechnen und dürfen nicht überrascht sein, wenn dieser Fall eintritt. Häufig entsteht jedoch Material, das zu vielfältigen Fragen und Interpretationen anregt. Dieses Material sollten Lehrende gezielt sammeln, um es dann zu einem späteren Zeitpunkt in den Unterricht einbringen zu können, sobald sie dies für erforderlich halten.

Schülerinnen und Schüler sollen im Statistikunterricht lernen, mit den unterschiedlichen Darstellungsformen umzugehen und selbständig zu entscheiden, ob sie bereits anhand der vollständigen Datentabelle Aussagen begründen können oder andere Darstellungsformen wie zum Beispiel Stengel-Blatt-Diagramme oder Boxplots dazu benötigen. Ich habe in meinen Beispielen an einigen Stellen bewußt mehr Möglichkeiten aufgezeigt als unbedingt zur Beantwortung der aufgeworfenen Fragen erforderlich sind, um die Vielfalt an Möglichkeiten zu verdeutlichen. Auch in meinem Unterricht benötige ich diese Vielfalt; denn ich beobachte, wie unterschiedlich Lernende reagieren und argumentieren. Der eine beruft sich bei seinen Ausführungen auf die - ggfs. um zusätzlich berechnete Größen erweiterte - Datentabelle, andere wiederum benötigen verschiedene graphische Darstellungen zur Unterstützung ihrer Argumentation. Diese meinen Unterricht bereichernde Vielfalt möchte ich unterstützen und weiterentwickeln, und nicht durch einseitige Festlegung oder frühzeitige Einengung auf nur eine Möglichkeit verhindern.

Literatur

Engel, J. (2001): Datenorientierte Mathematik und beziehungshaltige Zugänge zur Statistik: Konzepte und Beispiele. In: Borovcnik, M./Engel, J./ Wickmann, D., Anregungen zum Stochastikunterricht. Franzbecker, Hildesheim 2001

Nordmeier, G. (1989): Erstfrühling und Aprilwetter - Projekte in der explorativen Datenanalyse. Stochastik in der Schule Heft 3/1989, S. 21 - 42

Wirths, H. (2002): Sind deutsche Autos anders als ausländische? StoiS 1/2002, S. 16 - 23

Anschrift des Verfassers

Helmut Wirths
Cäcilienschule Oldenburg
Haarenufer 11
26122 Oldenburg
helmut.wirths@uni-oldenburg.de