Eine Prognose für die Entwicklung des Anteils ausländischer 1-Euro-Münzen in Deutschland

HENRIK KRATZ, FRANKFURT

Zusammenfassung: Vorgestellt werden Konzeption und Erfahrungen einer Unterrichtseinheit für die Sekundarstufe II, in der Schüler ein Austauschmodell für die Wanderung der 1-Euro-Münzen zwischen Deutschland und den übrigen Euroländern entwickelt haben. Die Einheit basiert auf den Auszählungsergebnissen des Euro-Projekts von Strick am Landrat-Lucas-Gymnasium in Leverkusen.

Auf der Grundlage des Modells wird eine langfristige Prognose für die Entwicklung des Anteils ausländischer bzw. deutscher 1-Euro-Münzen in Deutschland erstellt. Da der Münzenaustausch mit Hilfe von Rekursionsgleichungen beschrieben wird, erweist sich das Tabellenkalkulationsprogramm Excel als wichtiges Instrument zur Modellierung und Veranschaulichung.

1 Das Euro-Projekt von Strick

Zum 1. Januar 2002 wurde der Euro in 12 der damals 16 EU-Länder als gemeinsame Währung eingeführt. Jede neue Münzsorte hat eine Seite, die den Wert der Münze zeigt und in allen Ländern gleich aussieht. Auf der anderen Seite befindet sich ein Motiv, das von den Ländern individuell gestaltet werden konnte.

Befanden sich zum Eurostart noch alle Münzen in ihrem Ursprungsland, so begann unmittelbar danach aufgrund von Handel und Reise eine Durchmischung der Münzen, die von vielen Menschen neugierig verfolgt wird. Während uns der Anblick von französischen oder niederländischen Euromünzen inzwischen recht vertraut geworden ist, sind finnische oder portugiesische Münzen nach wie vor sehr selten.

Um den Durchmischungsprozess der Münzen zu untersuchen, führt das Landrat-Lucas-Gymnasium in Leverkusen unter Leitung von Heinz Klaus Strick seit der Euro-Einführung ein Projekt durch. In monatlichen Abständen wird eine Stichprobe von jeweils 500 Münzen verschiedener Sorten (1-Euro, 10-Cent, 1-Cent) nach ihrer Herkunft ausgezählt. Die Stichprobe stammt von der Volksbank Rhein-Wupper, die die Münzen zufällig aus ihren Kundeneinzahlungen herausgreift (siehe Strick (2003) sowie die Homepage des Landrat-Lucas-Gymnasiums). Tab. 1 und Abb. 1 zeigen die Auszählungsergebnisse für die 1-Euro-Münzen in tabellarischer bzw. graphischer Form. Dabei gibt S die Anzahl der deutschen Münzen in der monatlichen Stichprobe an.

Monat	S	Monat	S
Dez 01	500	Mrz 03	445
Jan 02	491	Apr 03	460
Feb 02	491	Mai 03	449
Mrz 02	489	Jun 03	448
Apr 02	486	Jul 03	440
Mai 02	479	Aug 03	441
Jun 02	491	Sep 03	445
Jul 02	470	Okt 03	258
Aug 02	475	Nov 03	444
Sep 02	469	Dez 03	443
Okt 02	467	Jan 04	443
Nov 02	467	Feb 04	449
Dez 02	469	Mrz 04	439
Jan 03	456	Apr 04	408
Feb 03	465	Mai 04	

Tab. 1: Auszählungsergebnisse des Landrat-Lucas-Gymnasiums in tabellarischer Form

Die Eurowanderung wird auch von dem Freiberger Statistiker Dietrich Stoyan im Rahmen seines Projektes EURODIFF untersucht. Münzmeldungen werden dabei per Internetformular gesammelt und statistisch ausgewertet[1]. Im Gegensatz zu den Leverkusener Ergebnissen ist es bei Stoyans Daten allerdings deutlich schwieriger, einen klaren Trend zu erkennen, so dass sie sich nicht in gleichem Maße für die Verwendung im Unterricht eignen. Stoyan führt die verhältnismäßig starken Schwankungen seiner Daten im Wesentlichen auf zwei Ursachen zurück. Zum einen gab es anfangs überproportional viele euphorische Meldungen über ausländische Münzen, so dass die Gesamtheit der Meldungen nicht repräsentativ war. Zum anderen spielen wohl auch Sammler („Münzhorter" – wie Stoyan sie nennt) eine Rolle, die ausländische Münzen aus dem Umlauf ziehen und damit den Durchmischungsprozess scheinbar verlangsamen.

Strick hat die Auszählungsergebnisse seines Euro-Projeks im Mathematikunterricht der Mittelstufe ausgewertet. Mit Hilfe von Excel haben seine Schüler Trendlinien erstellt, mit denen relativ zuverlässige Aussagen über die Entwicklung der Stichprobe in den kommenden Monaten getroffen werden konnten (Strick (2003), S. 266f.).

[1] Stoyans Ergebnisse findet man unter der Adresse: www.mathe.tu-freiberg.de/inst/stoch/Stoyan/euro/euro.html

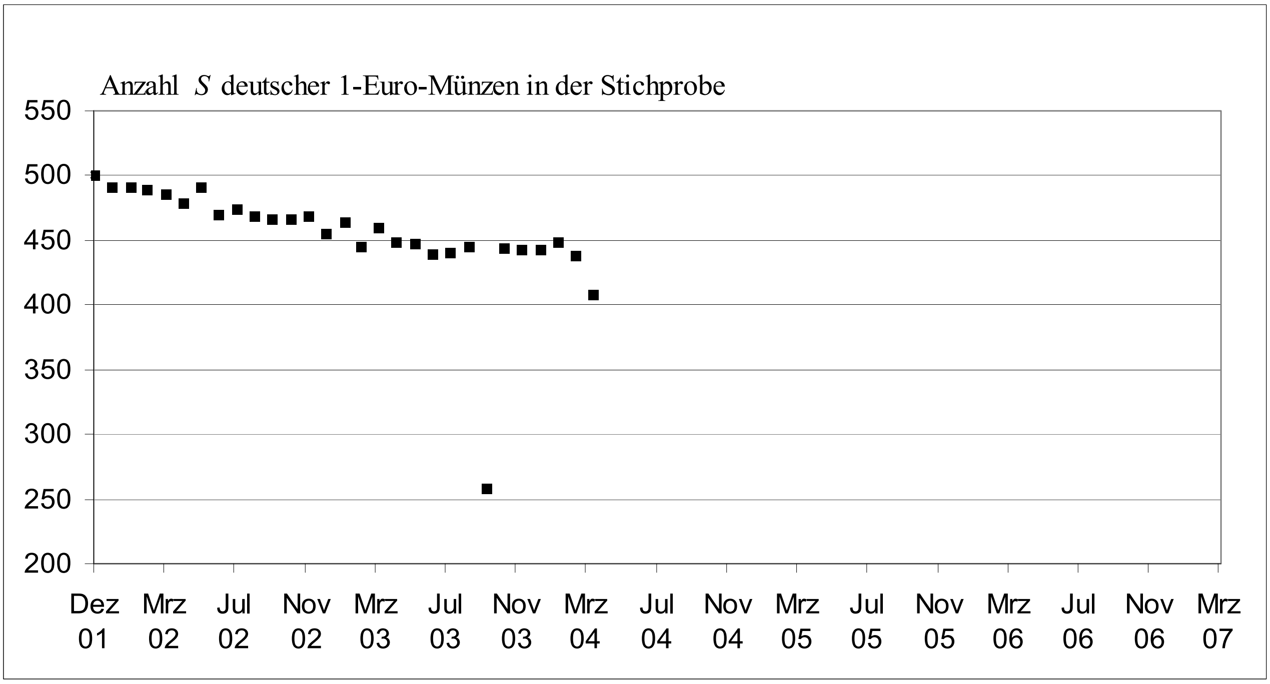

Abb. 1: Entwicklung der Anzahl der deutschen 1-Euro-Münzen der Stichprobe für zwei unterschiedliche p

Allerdings wurden dabei auch die Grenzen dieser Modellierung deutlich, denn Trendlinien zeigen Münzanteile, die unter 0% fallen würden. „Die Schülerinnen und Schüler erkannten sofort, dass hier die linearen Modelle die Entwicklung nicht angemessen wiedergeben können.“ (ebd.)

2 Die Wanderung der Euromünzen als Austauschprozess

Hier soll eine Unterrichtseinheit für den Stochastikunterricht der Oberstufe vorgestellt werden, in der eine längerfristige Prognose für die Entwicklung des Anteils ausländischer 1-Euro-Münzen in Deutschland auf der Basis eines Austauschmodells entwickelt wurde. Der Einheit liegt ein offener Einstieg in den Themenbereich „Austauschprozesse“ zugrunde. Dabei haben die Schüler die Wanderung der Euromünzen parallel zu einem weiteren Problem, dem Austausch von Ionen zwischen zwei Zellen, bearbeitet und ihre Fragen, Überlegungen und Ergebnisse mit Hilfe eines Forschungshefts festgehalten (siehe Kratz (2004)). Der Einstieg verzichtet bewusst auf eine vorherige Behandlung des Matrizenkalküls, damit die selbstständige Entwicklung einer Modellierung stärker im Zentrum des Unterrichts stehen kann.

Zum Eurostart wurden insgesamt ca. 50 Milliarden neue Münzen geprägt, davon 4,8 Milliarden 1-Euro-Münzen. Tab. 2 zeigt, welche Anteile dabei auf die einzelnen Länder entfallen sind.

Land	Anteil	Land	Anteil
Deutschland	32,9%	Österreich	3,5%
Frankreich	15,8%	Griechenland	2,6%
Italien	15,4%	Portugal	2,5%
Spanien	13,7%	Finnland	2,1%
Niederlande	5,4%	Irland	2,1%
Belgien	3,8%	sonstige	0,2%

Tab. 2: Prägeanteile der einzelnen Länder zur Euroeinführung (Quelle: `www.ecb.int`)

Neben diesen allgemeinen Informationen standen den Schülern außerdem die Auszählungsergebnisse des Landrat-Lucas-Gymnasiums zur Verfügung (Tab. 1 und Abb. 1). In der Auseinandersetzung mit der Problemsituation haben die Schüler folgende Kernideen entwickelt (vgl. Kratz (2004)):

- Wie werden sich die Anteile ausländischer bzw. deutscher 1-Euro-Münzen in der Stichprobe entwickeln?
- Gibt es einen Prozentwert, dem sich der Anteil der deutschen Münzen in der Stichprobe annä-

hert? (Dabei waren die Vermutungen zum weiteren Verlauf sehr unterschiedlich: Der Anteil der deutschen Münzen in der Stichprobe wird sich immer weiter a) 0%, b) dem Prägeanteil von 32,9% oder c) 50% annähern.)

- Wann wird es genauso viele, wann deutlich mehr ausländische als deutsche Münzen in der Stichprobe geben?
- Wie lässt sich die Veränderung der Anteile innerhalb einer bestimmten Zeit, zum Beispiel innerhalb eines halben Jahres, darstellen?
- Welche Funktion beschreibt die Entwicklung des Anteils ausländischer bzw. deutscher Münzen in der Stichprobe?

Die Kernideen führten zur Entwicklung eines Austauschmodells für die Wanderung der Euromünzen, das sich am Modell der Ionendiffusion zwischen zwei Zellen orientiert. Die Analogie lässt sich herstellen, wenn man nicht mehr alle 12 verschiedenen Herkunftsländer einzeln betrachtet, sondern nur noch zwischen deutschen und ausländischen Münzen unterscheidet. Ein solches Realmodell führt auf einen diskreten linearen Austauschvorgang zwischen zwei Zuständen, bei dem die neue Verteilung nach einem Zeitschritt mit Hilfe von Rekursionsgleichungen berechnet werden kann. Bezeichnet man mit N_I bzw. N_A die Zahl deutscher 1-Euro-Münzen, die sich im Inland bzw. Ausland befinden, so ergibt sich für die neue Verteilung N_I^{neu} bzw. N_A^{neu} nach einem Zeitschritt:

$$N_I^{\text{neu}} = (1-p)N_I + rN_A \qquad \text{und}$$

$$N_A^{\text{neu}} = pN_I + (1-r)N_A \quad .$$

Dabei ist p der Prozentsatz aller Münzen in Deutschland, die während des Zeitschritts ins Ausland hinauswandern und umgekehrt r der Prozentsatz der Münzen im Ausland, die nach Deutschland hineinwandern (siehe Abb. 3). Außerdem wird angenommen, dass diese allgemeinen Prozentsätze auch für die deutschen 1-Euro-Münzen im Inland bzw. im Ausland gelten.

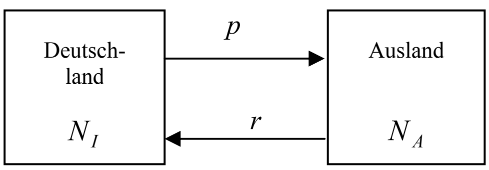

Abb. 3: Schematische Darstellung des Austauschs von Euro-Münzen

Eine geschlossene Modellbildung gelingt aber erst, wenn man davon ausgeht, dass die Gesamtmenge an 1-Euro-Münzen in jedem Land konstant bleibt, das heißt, dass die „Handelsbilanz" zwischen „eingeführten" und „ausgeführten" Münzen ausgeglichen ist. Dies bedeutet, dass die Übergangsanteile p und r in folgender Weise voneinander abhängen müssen:

Gesamtmenge aller Münzen in Deutschland $\cdot\, p$ =

Gesamtmenge aller Münzen im Ausland $\cdot\, r$

Aufgrund der Prägeanteile der Euroländer ergibt sich daraus eine Bedingung, die im Folgenden *Bilanzbedingung* genannt werden soll:

$$r = 0,329\, p/(1-0,329)$$

Wäre die Bilanzbedingung nicht erfüllt und beispielsweise $r < 0,329\, p/(1-0,329)$, so würde die Anzahl aller Münzen in Deutschland von ursprünglich ca. 16,54 Milliarden nach und nach auf einen geringeren Wert absinken. Der Bedarf an Münzen als Zahlungsmittel, der von der Deutschen Bundesbank ursprünglich kalkuliert wurde, wäre dann nicht mehr ausreichend gedeckt.

Die meisten Schülergruppen gelangten nicht durch eine abstrakte Überlegung zur Bilanzvorstellung, sondern durch das Experimentieren mit konkreten Zahlen: „Innerhalb des ersten halben Jahres wanderten ca. 3,8% aller Münzen aus Deutschland in die übrigen Euro-Länder, dies sind ca. 60 Millionen Münzen. Wenn wir davon ausgehen, dass für jeden Euro, der ins Ausland geht, ein Euro zurückkommt, müssen aus den Euro-Ländern in dieser Zeit auch 60 Millionen Münzen nach Deutschland gewandert sein. Das entspricht einem Anteil von ca. 1,8% aller Münzen im Ausland."

Im Rahmen einer vereinfachenden, schulischen Modellbildung ist es sicherlich sinnvoll, die Bilanzbedingung vorauszusetzen. Es sollte den Schülern allerdings bewusst werden, dass es sich um eine idealisierende *Annahme* handelt, deren Legitimität letztlich aufgrund weiterer Daten überprüft werden muss.
Insgesamt darf die scheinbare Einfachheit der Rekursionsgleichungen nicht darüber hinwegtäuschen, dass es sich um einen anspruchsvollen Modellbildungsprozess handelt, der einen Wechsel längerer Gruppenarbeits- und Plenumsphasen erfordert. Folgende Schwierigkeiten sind bei der Durchführung aufgetreten:

- Den Schülern gelingt es nicht, die komplexe Situation so weit zu vereinfachen, dass ein reales Modell als Ausgangspunkt für die Mathematisierung entsteht. (Eine mögliche Hilfestellung besteht darin, zunächst qualitativ die Parallelen zum Ionenaustausch zwischen zwei Zellen herauszuarbeiten, indem Entsprechungen gesucht werden:

Ionen/1-Euro-Münzen;
1.Zelle/Deutschland; 2.Zelle/Ausland;
typischer Zeitschritt: 1 Minute/1 Monat)

- Die Einführung geeigneter Variablen misslingt. (Hilfsfragen: Welche Größen sind für uns interessant? Welche Größen verändern sich?)
- Die Schüler haben Schwierigkeiten, aufgrund der empirischen Daten die Austauschanteile p und r für einen bestimmten Zeitraum abzuschätzen. (Hilfe: Wiederholung von Abschätzungstechniken)
- Die Schüler können zwar für konkrete Zahlenbeispiele die Verteilung nach einem bestimmten Zeitschritt berechnen, aber keine allgemeinen Rekursionsgleichungen formulieren. (Hilfe: Schrittweise „Übersetzung" konkreter in abstrakte Rechenterme)
- Die Mathematisierung enthält redundante Teile, weil nicht nur die beiden Variable N_I (deutsche Münzen in Deutschland) und N_A (deutsche Münzen im Ausland) eingeführt werden, sondern zwei weitere Variablen für die ausländischen Münzen in Deutschland bzw. im Ausland. (Als Hilfe bietet es sich an, in Form eines Einschubs eine klassische Problemlöseaufgabe bearbeiten zu lassen, die hier in der Einkleidung von Leuders vorgestellt werden soll: „Zwei Gläser sind mit der gleichen Menge Rotwein bzw. Weißwein gefüllt. Nun entnimmt man ein Zehntel (oder alternativ: einen Esslöffel, Anm. des Autors) des Rotweines und mischt ihn in den Weißwein. Dieselbe Menge des vermischten Weins füllt man wieder in den Rotwein zurück. Ist nun mehr Rotwein im Weißwein oder umgekehrt?" (Leuders (2003), S. 121) Diese Aufgabe bietet viele Anlässe zum Begründen und Argumentieren und verdeutlicht, dass die Vermischungsanteile aufgrund der Komplementarität der Situation gleich sein müssen: Die Menge an Weißwein, die im Weißweinglas fehlt, muss sich im Rotweinglas befinden und umgekehrt. Wenn man von der Bilanzbedingung ausgeht, gilt eine entsprechende Aussage auch für das Europroblem, so dass die oben beschriebene Verdopplung der Variablen vermieden werden kann.)
- Die Bilanzbedingung wird nicht formuliert oder kann nicht mathematisiert werden. (Hilfe: Durchspielen von Szenarien, bei denen die Bilanzbedingung verletzt ist)

3 Excel als wesentliche Hilfe im Modellierungsprozess

Aufgrund der Auszählungsergebnisse der ersten beiden Monate in Abb. 1 konnten die Schüler Werte für die Übergangsanteile p und r grob abschätzen. Der Rückgang von 500 auf 491 deutsche Münzen entspricht einem p von 0,018. Damit konnten sie die monatliche Entwicklung der Euro-Verteilung mit Hilfe von Excel iterativ berechnen und graphisch darstellen. Um einen Bezug zur Leverkusener Stichprobe herzustellen, sind die Schüler von einer Gesamtmenge von 500 1-Euro-Münzen ausgegangen und haben dargestellt, wie sich $N_I(x)$ als Anzahl deutscher 1-Euro-Münzen in der Stichprobe monatlich verändert. Dabei bezeichnet x die Anzahl der Monate nach der Euroeinführung. In die Exceltabelle wurden auch die tatsächlichen Stichprobenwerte $S(x)$ eingefügt, damit ein direkter Vergleich mit den Modellwerten $N_I(x)$ möglich ist (Tab. 4a).

	r	p		
	0,003432	0,007		
	x	$N_I(x)$	$S(x)$	$(N_I(x)-S(x))^2$
Dez 01	0	500,00	500	0,00
Jan 02	1	496,50	491	30,25
Feb 02	2	493,04	491	4,15
Mrz 02	3	489,61	489	0,37
Apr 02	4	486,22	486	0,05
Mai 02	5	482,86	479	14,91
Jun 02	6	479,54	491	131,33
Jul 02	7	476,25	470	39,11
Aug 02	8	473,00	475	3,99
Sep 02	9	469,78	469	0,61
Okt 02	10	466,60	467	0,16
Nov 02	11	463,45	467	12,63
Dez 02	12	460,33	469	75,20
Jan 03	13	457,24	456	1,54
Feb 03	14	454,19	465	116,90
Mrz 03	15	451,17	445	38,02
Apr 03	16	448,18	460	139,82
Mai 03	17	445,22	449	14,32
Jun 03	18	442,29	448	32,63
Jul 03	19	439,39	440	0,37
Aug 03	20	436,52	441	20,05
Sep 03	21	433,68	445	128,05
Okt 03	22	430,88	258	29886,05
Nov 03	23	428,10	444	252,91
Dez 03	24	425,35	443	311,63

Jan 04	25	422,63	443	415,11
Feb 04	26	419,93	449	844,89
Mrz 04	27	417,27	439	472,27
Apr 04	28	414,63	408	43,98
Mai 04	29	412,02		Summe
Jun 04	30	409,44		33031,30

Tab. 4: a) Exceltabelle zur Berechnung von $N_I(x)$ *für* p = *0,007 b) Letzte Spalte: Erweiterung zur Bestimmung der Summe der quadratischen Abweichungen*

Excel erwies sich aus zwei Gründen als optimales Hilfsmittel zur Untersuchung des Austauschprozesses.

1. Die Schüler konnten die Variable p sehr einfach variieren, indem sie den entsprechenden Zelleninhalt überschrieben. Da Excel Rechnung und Graph automatisch anpasst, erhielten die Schüler eine unmittelbare Rückmeldung darüber, welchen Einfluss die jeweilige Veränderung auf den Durchmischungsprozess hat. Damit konnte in hervorragender Weise der Aspekt der „Kovariation", das heißt des „Miteinander-Variierens" (Malle (2000)) zweier Größen veranschaulicht werden.[2] Abb. 6 (nächste Seite!) zeigt zwei Entwicklungen der Stichprobe für unterschiedliche p.
2. Die Schüler konnten sofort entdecken, dass sich in diesem Modell die Verteilung der Euromünzen einer Gleichgewichtsverteilung annähert, die den ursprünglichen Prägeanteilen entspricht. Bei einer Stichprobe von $N_{\text{ges}} = 500$ Münzen stabilisiert sich die Zahl der deutschen Münzen in der Stichprobe am Ende des Durchmischungsprozesses immer bei ungefähr 165 deutschen Münzen, unabhängig davon, welchen Parameter p man wählt.[3]

Durch das Variieren erkannten die Schüler den funktionalen Zusammenhang, der zwischen der Variablen p und der Geschwindigkeit des Durchmischungsprozesses besteht: „Wenn man ein größeres p wählt, sinkt der Anteil der deutschen Euromünzen in der Stichprobe schneller und die Gleichgewichtsverteilung wird in kürzerer Zeit erreicht." Diese Einsicht war für den weiteren Verlauf der Unterrichtseinheit entscheidend, denn nun stand die Frage im Raum, welches p eigentlich optimal ist, das heißt, welches p am besten zu den bisherigen Auszählungsdaten passt?

Zunächst probierten die Schüler so lange, bis das von ihnen gewählte p zu einem graphischen Verlauf der Münzverteilung führte, der den bisherigen Datenpunkten optisch möglichst nahe kommt. Die Ergebnisse der verschiedenen Schülergruppen zeigten, dass p, bezogen auf einen Zeitraum von einem Monat, in einem Bereich zwischen 0,004 und 0,009 liegen sollte. Was den Grad der Exaktheit betrifft, geht dieses Probieren mit Excel bereits über das Freihandzeichnen einer Ausgleichskurve auf Papier hinaus, da für alle Werte von p die Entwicklung mit Hilfe der Rekursionsgleichungen berechnet wird.

Allerdings merkten die Schüler, dass diese Lösungsmethode die Frage nach dem optimalen p noch nicht völlig zufrieden stellend beantworten kann, weil sich kleine Unterschiede in der Wahl von p deutlich auf langfristige Prognosen auswirken. An dieser Stelle äußerte eine Schülerin den Vorschlag, die Trendfunktion von Excel zu verwenden, die der Kurs bereits bei der Beschäftigung mit der Methode der linearen Regression kennen gelernt hatte. Da den Schülern außerdem bekannt war, dass die Entwicklung der Münzenverteilung durch eine Exponentialfunktion dargestellt wird (siehe Kratz (2004)), wollte die Schülerin für das jetzige Problem die Option „exponentieller Typ" verwenden. Dieser Vorschlag wurde aufgegriffen und die entsprechende Trendfunktion gezeichnet.

Dabei fiel den Schülern etwas Unerwartetes auf: Excels exponentielle Trendlinie nähert sich für große Zeiten asymptotisch dem Wert 0 an, während die Schüler bei ihrer bisherigen Vorgehensweise eine Annäherung an eine Gleichgewichtsverteilung mit etwa 165 deutschen Münzen erhalten hatten. Ein Blick in das Hilfemanual von Excel konnte klären, wie es zu dieser Abweichung kommt. Bei der Option „exponentielle Trendfunktion" geht das Programm immer von einer Funktion der Form $f(x) = ce^{bx}$ aus, was immer eine asymptotische Annäherung an 0 bedeutet. Excel stellt also nicht den Funktionstyp zur Verfügung, der zur Beschreibung dieses Problems erforderlich wäre.

Durch eine sukzessive Umformung der Rekursionsgleichungen ist es aber einigen Gruppen gelungen, die Funktion zu entdecken, die – in diesem Modell – tatsächlich hinter der Veränderung der Euroverteilung steckt. Zunächst haben die Schüler die Nebenbedingung

$$N_{\text{ges}} = N_I(x) + N_A(x)$$

formuliert, um auszudrücken, dass die Gesamtzahl deutscher 1-Euro-Münzen konstant bleibt. Damit kann die Rekursionsgleichung

[2] Hier zeigte sich erneut, dass neben dynamischer Geometrie-Software (vgl. Elschenbroich (2003)) auch das Tabellenkalkulationsprogramm Excel das Ziel einer Erziehung zum funktionalen Denken (Krüger (2000)) wesentlich unterstützen kann.

[3] Diese Eigenschaft des Modells folgt aus der Bilanzbedingung.

$N_I^{\text{neu}} = (1-p)N_I + rN_A$

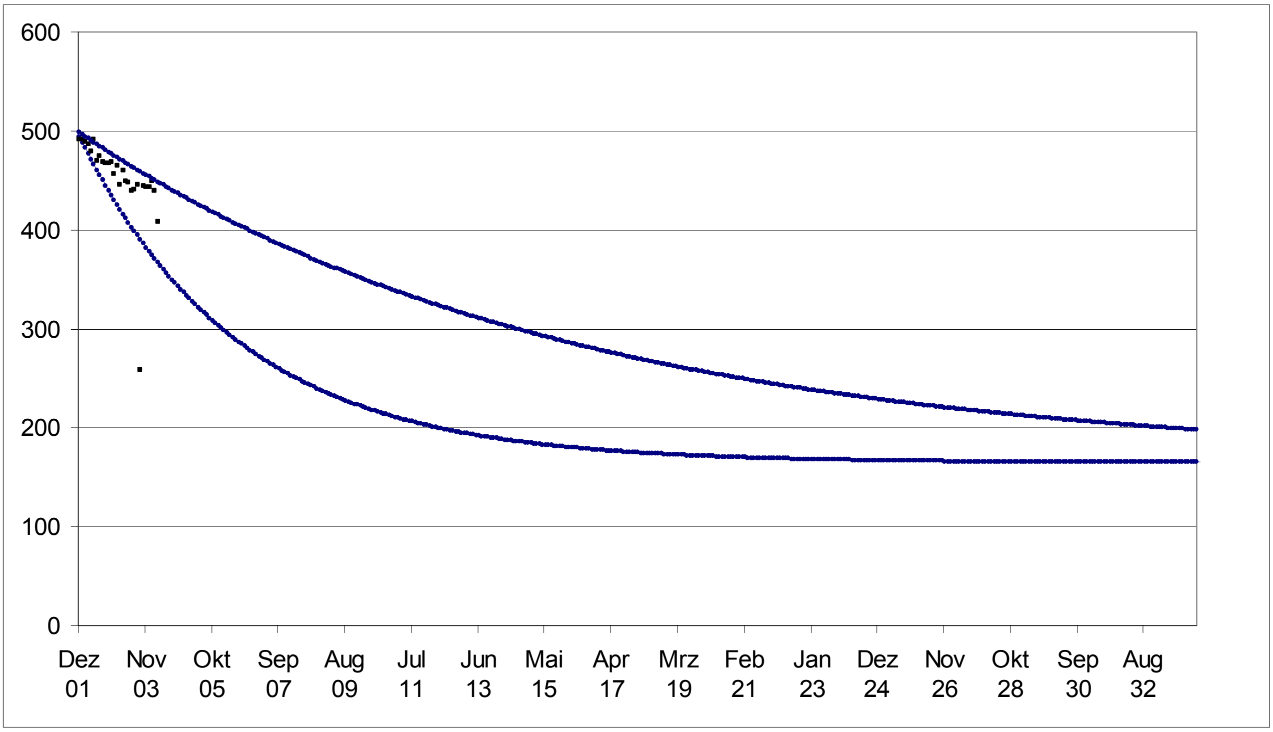

Abb. 6: Entwicklung der Anzahl der deutschen 1-Euro-Münzen der Stichprobe für zwei unterschiedliche p

so umgeformt werden, dass nur noch N_I und die konstante Größe N_{ges} auftreten. Für die ersten Zeitschritte ergibt sich

$$N_I(1) = N_I(0)\cdot(1-p) + (N_{\text{ges}} - N_I(0))\cdot r$$
$$= N_I(0)\cdot(1-p-r) + N_{\text{ges}}\cdot r$$

bzw.

$$N_I(2) = N_I(0)\cdot(1-p-r)^2 +$$
$$N_{\text{ges}}\cdot r\cdot(1-p-r) + N_{\text{ges}}\cdot r$$

und

$$N_I(3) = N_I(0)\cdot(1-p-r)^3 +$$

$$N_{\text{ges}}\cdot r\cdot[(1-p-r)^2 + (1-p-r) + 1]$$

Die Schüler erkannten die Gesetzmäßigkeit, die der Bildung dieser Terme zugrunde liegt, und verallgemeinerten

$$N_I(x) = N_I(0)\cdot(1-p-r)^x +$$
$$N_{\text{ges}}\cdot r\cdot[(1-p-r)^{x-1} + (1-p-r)^{x-2} + \ldots + 1]$$

Schließlich wurde der Term in eckigen Klammern mit Hilfe der Summenformel für geometrische Reihen in geschlossener Form dargestellt:

$$N_I(x) = N_I(0)\cdot(1-p-r)^x +$$
$$N_{\text{ges}}\cdot r\cdot[1-(1-p-r)^x/(p+r)]\,.$$

Damit wurde deutlich, dass die Verteilung innerhalb des Modells durch eine ganz bestimmte Exponentialfunktion beschrieben wird. Da der Funktionsterm aus einem diskreten Modell hergeleitet wurde, stand die Variable x zunächst für die Zahl ganzer Monate. Für die Schüler war es aber unmittelbar einsichtig, dass die Verteilung nun auch für Zwischenzeiten, zum Beispiel für zweieinhalb Monate, angegeben werden konnte. Auf diese Weise war es gelungen, Aussagen über beliebige Zeitpunkte des kontinuierlich ablaufenden Prozesses zu machen. Außerdem konnten die Schüler jetzt formal beweisen, dass sich tatsächlich die Gleichgewichtsverteilung einstellen muss, die sie bisher nur durch schrittweises Berechnen gefunden hatten:

$$N_I = \lim_{x\to\infty} N_I(x) = N_{\text{ges}}\cdot r/(p+r)$$
$$= N_{\text{ges}}\cdot 0{,}329$$

Im letzten Umformungsschritt wurde die Beziehung $r/(p+r) = 0{,}329$ verwendet, die aus der Bilanzbedingung folgt. Mit Hilfe der Bilanzbedingung konnte auch die Abhängigkeit von $N_I(x)$ auf die Variable p reduziert werden. Da alle weiteren Kalkulationen mit Excel erfolgten, war es dafür allerdings nicht notwendig, den unübersichtlich werdenden Funktionsterm explizit aufzuschreiben. Es reichte, die Ersetzung implizit durch einen entsprechenden Zellenbezug in Excel herzustellen.

Den Parameter p hatten die Schüler anfangs näherungsweise bestimmt, indem sie den Graphen rein visuell an den gegebenen Datenverlauf anpassten. Als Ziel wurde nun formuliert, den Parameter p so zu wählen, dass die Summe der quadratischen Abweichungen des prognostizierten Wertes $N_I(x)$ vom tatsächlichen Wert der Stichprobe $S(x)$ des jeweiligen Monats möglichst klein wird. Damit wurde der Übergang von einem nur abschätzenden Verfahren zur Regression als quantitativem Verfahren vollzogen. Wiederum erwies sich der Einsatz von Excel als äußerst hilfreich, weil die Berechnung der Summe der quadratischen Abweichungen nur einmal eingegeben werden musste (Abb. 4b)).

Es schloss sich eine explorative Phase an, in der die Schüler mit Hilfe von Intervallschachtelungen nach dem p mit der kleinsten Summe gesucht haben. Dabei arbeiteten die Schüler mit viel Spaß und Ausdauer. Zur Motivation hat beigetragen, dass die Optimierung von p den Charakter eines sportlichen Wettkampfs zwischen den verschiedenen Gruppen bekam. („Wir haben ein p mit einer noch kleineren Summe der Quadrate gefunden!“)

Die Schüler fanden heraus, dass – bei einer Genauigkeit von 4 Nachkommastellen – die Summe der quadratischen Abweichungen am kleinsten wird, wenn als monatlicher Übergangsanteil $p_0 = 0{,}0072$ gewählt wird. Die Summe beträgt dann etwa 33003. Gleichzeitig fiel ihnen auf, dass diese minimierte Summe immer noch verhältnismäßig groß ist. Dies liegt an dem mit Abstand größten Beitrag vom Oktober 2003, als sich erstaunlicherweise nur 258 deutsche Münzen in der Stichprobe befanden.

In didaktischer Hinsicht erwies sich dieser „Ausreißer“ allerdings als Glücksfall. Er gab den Anstoß, zu diskutieren, inwieweit Stichprobenwerte berücksichtigt werden sollen, die sehr stark vom allgemeinen Trend abweichen. Die Schüler vermuteten, dass die hohe Zahl ausländischer Münzen in dieser Stichprobe durch ein außergewöhnliches Ereignis zustande gekommen sein muss. Beispielsweise könnte ein aus dem Ausland kommender Händler in diesem Monat seine Bareinnahmen in der Bank einbezahlt haben. Viele Schüler wiesen darauf hin, dass aufgrund des Ausreißers der Graph für $p_0 = 0{,}0072$ „eigentlich zu weit unten“ verläuft. Um dies zu korrigieren, wurde nun vorgeschlagen, die Zahl von 258 durch die Zahl von 444 zu ersetzen, die nahe bei den Werten des vorangegangenen bzw. folgenden Monats liegt. Nach dieser Glättung ist die Summe der quadratischen Abweichungen mit 1665 für einen Austauschanteil von $p_1 = 0{,}00587$ am geringsten. Abb. 7 (nächste Seite!) zeigt den zugehörigen Graphen.

4 Prognose und Diskussion der Grenzen der Modellierung

Nach der Optimierung von p konnten die Schüler ihre Ausgangsfragen beantworten, indem sie die Exceltabellen und Graphen auswerteten. Unter der Annahme, dass sich der bisherige Entwicklungstrend fortsetzt, erlaubt die Modellierung folgende Prognosen: Ende des Jahres 2014 wird es etwa genau so viele deutsche wie ausländische Münzen in der Stichprobe geben.

Der Anteil der deutschen 1-Euro-Münzen in der Stichprobe wird erst in den 20er Jahren deutlich in die Nähe der stabilen Gleichgewichtsverteilung kommen, sofern es den Euro dann überhaupt noch gibt. Nach der Prognose wird der Anteil der deutschen Münzen frühestens im Jahr 2023 unter 40% sinken.

Um die Aussagekraft von Prognosen realistisch einschätzen zu können, ist es generell wichtig, dass im Unterricht auch die Grenzen einer bestimmten Modellierung reflektiert werden. Bei der hier vorgestellten Modellierung der Euro-Wanderung trifft dies in besonderem Maße zu, weil in die Bildung des Modells viele vereinfachende Annahmen eingeflossen sind. Da sich Zweifel an der Gültigkeit der Modellierung auch in vielen Eintragungen in den Forschungsheften widerspiegeln, sollen hier einige entsprechende Auszüge eingefügt werden:

(1) „Wir können keine ‚wahrhaftigen’ zukünftigen Statistiken darstellen, da die 2004 hinzukommenden Länder in naher Zukunft auch den Euro bekommen werden.“

(2) „In dem Beispiel gehen wir von den Erstprägungen aus! Doch was passiert mit den neuen Prägungen? Werden diese mitgezählt?“

(3) „Genügen überhaupt 500 Münzen, um angeben zu können, dass der Anteil von x Prozent für ganz Deutschland gelten kann? Insgesamt gibt es ja 4,8 Milliarden 1-Euro-Münzen.“

(4) „Welche Bank wurde für die Zählung ausgesucht? Eine große Stadt mit hoher Touristenzahl oder ein Dorf?“

.

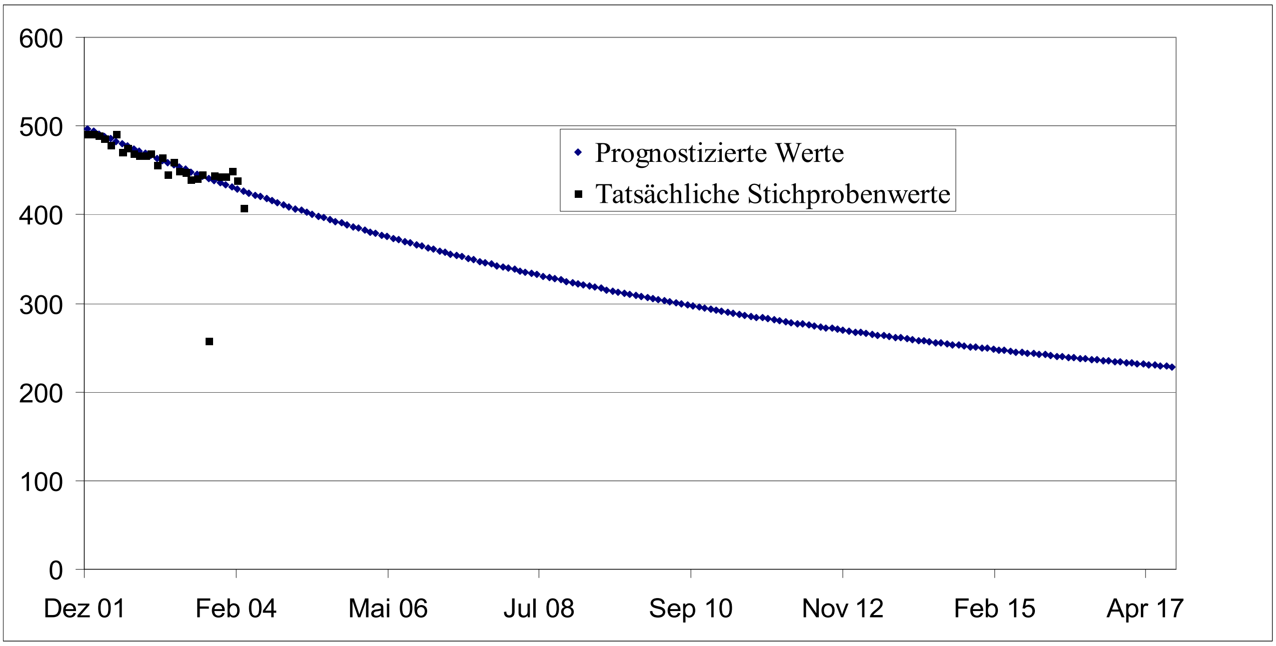

Abb. 7: Prognose zur Entwicklung der Anzahl der deutschen 1-Euro-Münzen (p_1 = 0,00587

Gerade die Auseinandersetzung mit diesen Einwänden erwies sich im Unterricht als fruchtbar, weil sie den Schülern ein vertieftes Verständnis für das Wesen der Modellbildung eröffnete. Während der Diskussion erkannten die Schüler den Einfluss von Neuprägungen, die entweder durch den Beitritt neuer Euroländer (1) oder Nachprägungen in den bisherigen Euroländern (2) hinzukommen: Da die neuen Münzen in ihren jeweiligen Prägeländern ausgegeben werden, wird der Durchmischungsprozess sicherlich etwas langsamer verlaufen, als es die obige Prognose erwarten lässt. Auch die Fragen, inwieweit der Stichprobenumfang (3) und der Ort, an dem die Stichproben erhoben wurden (4), überhaupt eine repräsentative Aussage zulassen, sind sehr gerechtfertigt. Tatsächlich zeigen die Auszählungsergebnisse von Ina Heink vom Wiprecht-Gymnasium Groitzsch/ Sachsen und von Hans-Rudolph Timmig vom Arnold-Gymnasium Neustadt/ Coburg, dass in beiden Städten bisher wesentlich weniger ausländische Münzen angekommen sind als in Leverkusen[4]. Offensichtlich gibt es in der Bundesrepublik in den verschiedenen Regionen stark unterschiedliche Durchmischungsgrade. Diskutiert wurde auch, inwieweit Veränderungen der Reisegewohnheiten die Entwicklung beeinflussen könnten. Darüber hinaus basiert die hier vorgenommene Modellbildung auf der Bilanzbedingung, deren Gültigkeit letztlich nicht feststeht (siehe Abschnitt 2).

Insgesamt wurde den Schülern bewusst, dass es sich um eine bedingte Prognose handelt, weil das Modell eine Reihe von Einflussfaktoren unberücksichtigt lässt. Man kann die Geschwindigkeit der Durchmischung zwar innerhalb eines gewissen Rahmens abschätzen, muss sich aber gleichzeitig auf Abweichungen einstellen.

5 Schlussbemerkungen

Die Währungsunion innerhalb Europas ist ein historisches Ereignis, das alle Bürger der Euroländer unmittelbar miterlebt haben und das sich auf den Alltag jedes Einzelnen auswirkt. Die Frage, wie schnell die ausländischen Euros zu uns kommen, berührt viele wirtschafts- und gesellschaftspolitische Aspekte und macht den Geldkreislauf in Europa erfahrbar. Während des Unterrichts war deutlich zu spüren, dass dies die Schüler dazu motivieren konnte, sich auf eine anspruchsvolle Modellierung einzulassen.

Im Vergleich zu anderen Austauschprozessen, die als Beispiele in Schulbüchern behandelt werden, besitzt die Wanderung der Euromünzen einen Vorteil. Reisegewohnheiten und Handelsbeziehungen, die für den Münztransport verantwortlich sind, ändern sich in der Regel nur langsam. Deshalb darf man voraussetzen, dass die Übergangsanteile p und r über längere Zeiträume hinweg

[4] Die Auszählungsergebnisse dieser beiden Gymnasien findet man zusammen mit den Leverkusener Ergebnissen auf der Homepage des Landrat-Lucas-Gymnasiums.

verhältnismäßig konstant sind. Bei anderen Austauschvorgängen ist dies oft ein Schwachpunkt. Beispielsweise ändern sich die Übergangsanteile bei Käufern bestimmter Produkte, Besucherzahlen, Wählergruppen und auch bei der Zelldiffusion im Verlauf des Prozesses zum Teil so erheblich, dass die Ausbildung eines Gleichgewichtszustandes und langfristige zeitliche Prognosen fraglich werden.

Literatur

Elschenbroich, H.-J. (2003): Ein dynamischer Zugang zu Funktionen und Gleichungen. MNU 56/8, S. 454-460.

Kratz, H. (2004): Ein einfaches Modell für die Diffusion des Euro. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht, Tagungsband der 38. Jahrestagung der GDM in Augsburg.

Krüger, K. (2000): Erziehung zum funktionalen Denken. Logos.

Leuders, T. (Hrsg.) (2003): Mathematik-Didaktik, Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Cornelsen Verlag, Berlin.

Malle, G. (2000): Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. In: mathematik-lehren 103, S. 8-11, Friedrich Verlag, Seelze.

Strick, H. K. (2003): EURO, EURO, wie schnell wirst Du wandern? In: Praxis der Mathematik, Heft 6/45.Jg., S. 265-270, Aulis Verlag Deubner, Köln.

Welchen Gewinn-Bonus kann man erwarten?

HENRIK KRATZ, FRANKFURT

Zusammenfassung: Die Postbank bietet eine Sparform an, bei der die monatliche Verzinsung eines Guthabens von der Gewinnziehung der Aktion Mensch abhängt. Schüler untersuchen, warum der geschätzte und der berechnete Erwartungswert für den monatlichen Gewinn-Bonus auseinander klaffen.

1 Die Gewinn-SparCard

Seit Mai 2004 bietet die Postbank eine besondere Art der Verzinsung an, die sogenannte Gewinn-SparCard. Neben dem Basiszins gibt es einen zusätzlichen Zins, den sogenannten Gewinn-Bonus, der von den beiden Endziffern der monatlichen Hauptziehung der Aktion Mensch (Tab. 1) abhängt.

Beispielsweise erhält ein Sparer mit einem Guthaben von 6000 Euro jeden Monat den Basiszins von 1,20%. Da im April 2004 die Endziffer 03 gezogen wurde, wurden dem Sparer für diesen Monat zusätzliche Bonuszinsen in Höhe von 0,25% gutgeschrieben. Damit ergab sich ein Gesamtzins von 1,45%. Um der Sparform eine zusätzliche Attraktivität zu verleihen, spendet die Postbank für jeden Euro des Gewinn-Bonus, der am Jahresende gutgeschrieben wird, einen Cent an die Aktion Mensch.

Gewinn-Bonus

Endziffer der Gewinnzahl Hauptziehung Aktion Mensch	Gewinn-Bonus p.a. rückwirkend für den Ziehungsmonat
00 - 20	0,25 %
21 - 40	0,50 %
41 - 60	1,25 %
61 - 80	1,80 %
81 - 98	2,25 %
99	3,75 %

Tabelle 1: Konditionen für den Gewinn-Bonus (Quelle: www.postbank.de/)

Diese Spende wird von der Postbank getragen und hat keinen Einfluss auf die Zinssumme des Sparers.

2 Schätzung und Berechnung des Erwartungswerts

Die neue Sparform der Postbank wurde im Stochastikunterricht einer 10. Klasse behandelt. Dazu haben die Schüler eine Kopie des Faltblatts erhalten, mit dem die Postbank für die Gewinn-SparCard