Wie Wettanbieter Rendite und Risiko kontrollieren können – und Schüler dabei Einblick in finanzmathematische Methoden erhalten

MORITZ ADELMEYER, ZÜRICH

Zusammenfassung: *Wettanbieter laufen Gefahr, dass je nach Ausgang der Wettspiele die auszuzahlenden Gewinne höher sind als die eingenommenen Einsätze. Es werden zwei ganz unterschiedliche Möglichkeiten aufgezeigt, wie Wettanbieter Rendite und Risiko kontrollieren können. Die eine Art von Kontrolle ist probabilistisch und wird ähnlich bei der Verwaltung von Portfolios verwendet. Die andere Art ist deterministisch und wird ähnlich zur Absicherung von Optionen eingesetzt. Für die gezeigten Modellrechnungen reicht gymnasiale Mathematik aus. "Wetten aus Sicht des Anbieters" eignet sich daher, um Schülern Einblick zu geben in Methoden der modernen Finanzmathematik.*

1 "Wetten, mitfiebern, gewinnen. Jeden Tag."

Wetten ist inzwischen auch im deutschsprachigen Raum populär. Und das Angebot an Wettmöglichkeiten ist riesig, ganz besonders während sportlichen Grossanlässen wie etwa der Fussballeuropameisterschaft 2004 in Portugal. An diesem Turnier spielten in der Vorrundengruppe B Frankreich (FRA), England (ENG), Kroatien (CRO) und die Schweiz (SUI). Die staatliche Schweizer Wette *sporttip one* ([1]), welche die Überschrift dieses Abschnitts als Werbeslogan verwendet, stellte für die Woche vom 25. bis 31.05.04 die folgenden Quoten für den Sieger der Gruppe B:

Sieger	FRA	ENG	CRO	SUI
Quote	1.60	2.60	9.00	9.00

Die Quoten geben das Verhältnis zwischen der Auszahlung bei richtigem Tippen und dem Einsatz an:

$$\text{Quote} = \frac{\text{Auszahlung}}{\text{Einsatz}}$$

Wer etwa 50 € auf die Schweiz gesetzt hat, hätte $9.00 \cdot 50$ € = 450 € ausbezahlt erhalten, falls die Schweiz Gruppensieger geworden wäre. Er oder sie hätte dann netto 400 € gewonnen. Weil aber Frankreich den Gruppensieg errang, ging der Einsatz von 50 € verloren.

Dieses Risiko nimmt der Wettende aufgrund eines möglichen (hohen) Gewinns bewusst in Kauf. Anders sieht es aus Sicht des Wettanbieters aus. Unabhängig davon, wer Gruppensieger wird, muss er in der Lage sein, die Gewinne auszuzahlen. Dass dies problematisch sein kann, zeigt das folgende **Szenario 1**:

Sieger	FRA	ENG	CRO	SUI
Quote	1.60	2.60	9.00	9.00
Einsatz	0.35	0.425	0.10	0.125
Auszahlung	0.56	1.105	0.90	1.125

Szenario 1 geht davon aus, dass bei *sporttip one* in der besagten Woche Einsätze von 0.35 Geldeinheiten auf Frankreich, 0.425 auf England, 0.10 auf Kroatien und 0.125 auf die Schweiz getätigt werden. Dann nimmt der Wettanbieter insgesamt 1 Geldeinheit ein. Demgegenüber muss er bei einem Sieg von Frankreich 0.56 Geldeinheiten, von England 1.105, von Kroatien 0.90 und der Schweiz 1.125 auszahlen. In zwei der vier Fälle übersteigen die Ausgaben des Wettanbieters seine Einnahmen.

2 Gerechte und ungerechte Quoten

Wenn ein Zufallsergebnis mit Wahrscheinlichkeit p eintritt, so wird der Kehrwert von p als gerechte Quote q für das Wetten auf dieses Ergebnis bezeichnet:

$$\text{gerechte Quote} \quad q = \frac{1}{p}$$

Bei gerechten Quoten ist der Erwartungswert der Auszahlung gleich dem Einsatz:

$$\text{Einsatz } e \Rightarrow \text{ Auszahlung } a = q \cdot e$$
$$\Rightarrow \text{ erwartete Auszahlung } p \cdot a = p \cdot q \cdot e = e$$

Wettanbieter stellen Quoten, die kleiner sind als die gerechten Quoten. Um die Gerechtigkeit zu quantifizieren, wird ein Gerechtigkeitsfaktor γ eingeführt:

$$q = \frac{\gamma}{p} \quad \text{mit} \quad 0 \le \gamma \le 1$$

Der Gerechtigkeitsfaktor lässt sich aus den gestellten Quoten berechnen. Wenn bei einer Wette m verschiedene Ergebnisse möglich sind und für diese die Quoten $q_1, ..., q_m$ gestellt werden, so betragen die den Quoten zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeiten für die m Ergebnisse $p_1 = \gamma/q_1$, ..., $p_m = \gamma/q_m$. Aus $p_1 + ... + p_m = 1$ folgt dann

$$\gamma = \frac{1}{1/q_1 + ... + 1/q_m}.$$

Für die Quoten von *sporttip one* aus Abschnitt 1 betragen der Gerechtigkeitsfaktor $\gamma \approx 0.81$ und die Wahrscheinlichkeiten $p_1 \approx 0.51$, $p_2 \approx 0.31$ sowie $p_3 = p_4 \approx 0.09$.

3 Probabilistische Kontrolle: der Zufall wird es richten

In diesem Abschnitt wird davon ausgegangen, dass der Wettanbieter die Wahrscheinlichkeiten der Wettergebnisse von Experten schätzen lässt und aufgrund dieser Schätzwerte Quoten stellt, die während der ganzen Wettdauer fest bleiben. Es wird gezeigt, wie der Wettanbieter dann Rendite und Risiko mit Hilfe des Zufalls kontrollieren kann.

Annahme I (Angebot an Spielen, Festlegung der Quoten). Das Wettbüro bietet parallel n Wettspiele an. Es schätzt für jedes Spiel die Wahrscheinlichkeiten für die Spielergebnisse und stellt Quoten, die das γ-fache der gerechten Quoten betragen, wobei $0 < \gamma < 1$ ist. Die Quoten bleiben während der gesamten Wettdauer fest.

Annahme II (Unabhängigkeit der Ergebnisse). Die Ergebnisse der Wettspiele sind voneinander unabhängig.

Annahme III (Rechnerische Vereinfachungen). Jedes angebotene Wettspiel hat gleich viele mögliche Ergebnisse. Die Summe der Einsätze ist bei allen Spiel gleich 1 Geldeinheit.

Die Annahme I trifft für *sporttip one* weitgehend zu. Wie aus einem Artikel der Zeitschrift *Facts* vom 05.11.03 mit der Überschrift "Die Quotenleger" hervorgeht, ist bei *sporttip one* ein Sechserteam für das Schätzen der Wahrscheinlichkeiten zuständig ([2]). Pro Woche werden $n \approx 20$ Wetten angeboten. Der Gerechtigkeitsfaktor beträgt $\gamma \approx 0.8$. *sporttip one* behält sich zwar vor, Quoten im Laufe einer Woche auch zu ändern, macht davon aber kaum Gebrauch.

Es bezeichnen

n = Anzahl angebotener Wettspiele,
m = Anzahl möglicher Ergebnisse pro Wettspiel.

Für $1 \le i \le m$ und $1 \le j \le n$ bezeichnen weiter

p_{ij} = geschätzte Wahrscheinlichkeit für Ergebnis i im Spiel j, wobei $p_{ij} > 0$ und $p_{1j} + \dots + p_{mj} = 1$,

q_{ij} = Quote für Ergebnis i im Spiel j $= \gamma / p_{ij}$,

e_{ij} = Einsatz für Ergebnis i im Spiel j, wobei $e_{ij} > 0$ und $e_{1j} + \dots + e_{mj} = 1$,

a_{ij} = Auszahlung bei Ergebnis i im Spiel j $= q_{ij}\, e_{ij}$.

Um die Rendite und das Risiko des Wettanbieters probabilistisch abzuschätzen, werden folgende Zufallsgrößen betrachtet:

$$X_j = \text{Auszahlung im Spiel } j,$$
$$Y = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \text{mittlere Auszahlung pro Spiel}$$

Der Erwartungswert $E(Y)$ ist ein Maß für die Rendite des Wettanbieters. Je nachdem ob $E(Y) < 1$ oder $E(Y) > 1$ ist, erwartet der Anbieter einen Gewinn oder Verlust.

Die Standardabweichung $S(Y)$ ist ein Mass für das Risiko des Wettanbieters. $S(Y)$ erfasst die erwartete Abweichung von Y vom Erwartungswert $E(Y)$. Je grösser $S(Y)$ ist, desto eher besteht die Gefahr, dass der Anbieter Verlust macht.

Für den Erwartungswert $E(X_j)$ gilt

$$\begin{aligned} E(X_j) &= p_{1j}\, a_{1j} + \dots + p_{mj}\, a_{mj} \\ &= p_{1j}\, q_{1j}\, e_{1j} + \dots + p_{mj}\, q_{mj}\, e_{mj} \\ &= \gamma\, e_{1j} + \dots + \gamma\, e_{mj} \\ &= \gamma\,(e_{1j} + \dots + e_{mj}) = \gamma \end{aligned}$$

und für Varianz $V(X_j) = S(X_j)^2$ gilt

$$\begin{aligned} V(X_j) &= p_{1j}(a_{1j} - \gamma)^2 + \dots + p_{mj}(a_{mj} - \gamma)^2 \\ &= p_{1j}\left(\frac{\gamma\, e_{1j}}{p_{1j}} - \gamma\right)^2 + \dots + p_{mj}\left(\frac{\gamma\, e_{mj}}{p_{mj}} - \gamma\right)^2 \\ &= \frac{\gamma^2\, e_{1j}^{\;2}}{p_{1j}} - 2\gamma^2\, e_{1j} + p_{1j}\,\gamma^2 + \dots \\ &\quad + \frac{\gamma^2\, e_{mj}^{\;2}}{p_{mj}} - 2\gamma^2\, e_{mj} + p_{mj}\,\gamma^2 \\ &= \gamma^2\left(\frac{e_{1j}^{\;2}}{p_{1j}} + \dots + \frac{e_{mj}^{\;2}}{p_{mj}} - 2\,(e_{1j} + \dots + e_{mj}) \right. \\ &\quad \left. + (p_{1j} + \dots + p_{mj})\right) \\ &= \gamma^2\left(\frac{e_{1j}^{\;2}}{p_{1j}} + \dots + \frac{e_{mj}^{\;2}}{p_{mj}} - 1\right). \end{aligned}$$

Für das Wettspiel aus Szenario 1 betragen $E(X) \approx 0.81$, $V(X) \approx 0.071$ und $S(X) \approx 0.27$.

Der Erwartungswert $E(Y)$ beträgt

$$E(Y) = \frac{E(X_1) + \dots + E(X_n)}{n} = \frac{n\gamma}{n} = \gamma.$$

Weil aufgrund von Annahme II $X_1, \dots, X_n$ unabhängig sind, gilt für die Varianz $V(Y) = S(Y)^2$

$$V(Y) = \frac{V(X_1) + \dots + V(X_n)}{n^2}.$$

Wenn n = 20 Wettspiele angeboten werden, wenn für jedes Spiel der Gesamteinsatz 1 Geldeinheit beträgt und wenn für jedes Spiel wie in Szenario 1 $E(X_j) \approx 0.81$, $V(X_j) \approx 0.071$, $S(X_j) \approx 0.27$ betragen, so ist $E(Y) \approx 0.81$, $V(Y) \approx 0.0036$ und $S(Y) \approx 0.06$. Der Wettanbieter kann in diesem Fall die Spielausgänge gelassen abwarten: Seine erwartete mittlere Auszahlung pro Spiel beträgt 0.81 Geldeinheiten, wobei dieser Betrag erwartungsgemäß um 0.06 Geldeinheiten nach oben oder unten abweicht, was einer Auszahlung von 0.87 bzw. 0.75 Geldeinheiten entspricht. Alle diese Beträge liegen deutlich unter 1 Geldeinheit.

Zum Schluss dieses Abschnitts zeigen wir, dass das Risiko des Wettanbieters gegen null geht, wenn er immer mehr Spiele anbietet.

Annahme IV (Schranke für Wahrscheinlichkeiten). Es gibt eine gemeinsame untere Schranke für die Wahrscheinlichkeiten der Spielausgänge: Es gibt ein $\delta > 0$, so dass

$$p_{ij} \geq \delta \text{ für } 1 \leq i \leq m \text{ und } 1 \leq j \leq n.$$

Für Spiele mit vier Ausgängen wie in Abschnitt 1 stellt *sporttip one* erfahrungsgemäß keine Quoten größer als 20. Bei einem Gerechtigkeitsfaktor von $\gamma = 0.8$ ist daher $p_{ij} = \gamma / q_{ij} \geq \delta = 0.8/20 = 0.04$ für alle *i* und *j* .

Die Varianz von X_j kann mit Hilfe von δ abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} V(X_j) &= \gamma^2 \left(e_{1j}^{\,2} / p_{1j} + \dots + e_{mj}^{\,2} / p_{mj} - 1\right) \\ &\leq \gamma^2 \left(e_{1j} / \delta + \dots + e_{mj} / \delta - 1\right) \\ &= \gamma^2 \left(1/\delta - 1\right). \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass $e_{ij}^{\,2} < e_{ij}$ gilt wegen $0 < e_{ij} < 1$ und dass $e_{1j} + \dots + e_{mj} = 1$ ist. Weiter kann die Varianz von *Y* abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{V(X_1) + \dots + V(X_n)}{n^2} \\ &\leq \frac{n\gamma^2 \left(1/\delta - 1\right)}{n^2} = \frac{\gamma^2 \left(1/\delta - 1\right)}{n}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$V(Y) \to 0 \text{ und } S(Y) = \sqrt{V(Y)} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Fazit 1. Unter den Annahmen I bis III hängt der Erwartungswert von Y und damit die Rendite des Wettanbieters in einfacher Weise nur vom Gerechtigkeitsfaktor ab und ist daher gut kontrollierbar. Die Standardabweichung von Y und damit das Risiko des Wettanbieters dagegen hängt in komplizierter Weise zusätzlich von den geschätzten Wahrscheinlichkeiten für die Wettergebnisse sowie der Verteilung der Einsätze auf die Wettergebnisse ab und sind dementsprechend schlecht kontrollierbar. Unter Annahme IV gilt jedoch: Ein Wettanbieter kann sein Risiko dadurch klein halten, dass er gleichzeitig viele Spiele anbietet. Der Zufall wird es dann richten.

4 Deterministische Kontrolle: auch wer nichts wagt, kann etwas gewinnen

In Abschnitt 3 wurde unter den Annahmen I bis III die folgende Formel für die Varianz der Auszahlung X in einem einzelnen Spiel hergeleitet:

$$V(X) = \gamma^2 \left(\frac{e_1^{\,2}}{p_1} + \dots + \frac{e_m^{\,2}}{p_m} - 1 \right)$$

Die deterministische Kontrollstrategie, die in diesem Abschnitt vorgestellt wird, orientiert sich daran, dass $V(X) = 0$ ist, wenn gilt

$$e_i = p_i \text{ für } 1 \leq i \leq m.$$

Das heißt: *Das Risiko für den Wettanbieter verschwindet, wenn die Verteilung der Einsätze gleich der Verteilung der geschätzten Wahrscheinlichkeiten ist.* Diese Beobachtung hat eine interessante Implikation:

Wenn dem Wettanbieter die Wetteinsätze *zum Voraus* bekannt wären, so könnte er die Quoten *im Nachhinein* gemäss

$$q_i = \frac{\gamma}{e_i} \text{ für } 1 \leq i \leq m$$

stellen und würde dann einen sicheren Gewinn in Höhe von $1 - \gamma$ Geldeinheiten einstreichen, egal wie das Wettspiel ausgeht.

Nun muss aber der Wettanbieter zunächst Quoten stellen und erst danach kommen die Einsätze. Das ist zwar richtig, der Anbieter kann jedoch die Quoten im Laufe der Wettdauer ändern. Viele Anbieter machen das. Die folgende Tabelle zeigt die Quoten des Internetwettanbieters *sportwetten.de* ([3]) für das EM-Vorrundenspiel Lettland gegen Deutschland an drei aufeinanderfolgenden Tagen:

Lettland (LAT) – Deutschland (GER)	Sieg LAT	Unentschieden	Sieg GER
Quote am 16.06.04	6.75	3.90	1.50
Quote am 17.06.04	8.00	4.00	1.45
Quote am 18.06.04	9.25	4.10	1.40

Was mit der Änderung von Quoten etwa erreicht werden kann, zeigt das folgende **Szenario 2**:

	Sieger	FRA	ENG	CRO	SUI
Phase 1	W'keit	0.51	0.31	0.09	0.09
	Quote	1.60	2.60	9.00	9.00
	Einsatz	0.35	0.425	0.10	0.125
	Auszahlung	0.56	1.105	0.90	1.125
Phase 2	Quote	2.30	1.90	8.10	6.50
	Einsatz	0.40	0.40	0.10	0.10
	Auszahlung	0.92	0.76	0.81	0.65
	Gesamt-auszahlung	1.48	1.865	1.71	1.775

Szenario 2 baut auf Szenario 1 auf. Die Wettdauer ist neu in zwei Phasen unterteilt. In Phase 1 sind die Quoten und die Einsätze gleich wie bei Szenario 1.
Für Phase 2 ändert der Anbieter die Quoten. Er passt sie gemäss der Formel am Anfang dieses Abschnitts den Einsätzen in Phase 1 an. Die neue Quote für Frankreich beträgt dementsprechend 0.81 / 0.35 $\approx$ 2.30, diejenige für England 0.81 / 0.425 $\approx$ 1.90, usw.
Die Einsätze in Phase 2 wurden gegenüber Phase 1 so verändert, dass höhere Quoten zu höheren Einsätzen führen und umgekehrt tiefere Quoten zu tieferen Einsätzen. Wie in Phase 1 beträgt auch in Phase 2 der Gesamteinsatz eine Geldeinheit.
Der Wettanbieter nimmt über die gesamte Wettdauer zwei Geldeinheiten ein. Im Gegensatz zu Szenario 1 sind in allen vier Fällen die Ausgaben kleiner als die Einnahmen. Der Anbieter macht also in jedem Fall Gewinn.

Im Rest dieses Abschnitts wird gezeigt, dass unter idealisierten Voraussetzungen der Wettanbieter durch laufende Anpassung der Quoten an die Einsätze stets einen sicheren Gewinn wie in Szenario 2 erzielen kann.

Annahme V (Angebot von Spielen, Festlegung der Quoten). Das Wettbüro bietet nur ein Wettspiel an. Es unterteilt die Wettdauer in mehrere Phasen.
In der ersten Phase werden die Wahrscheinlichkeiten für die Spielausgänge geschätzt und Quoten gestellt, welche das γ-fache der gerechten Quoten betragen, wobei $0<\gamma<1$ ist.

In den weiteren Phasen wird für jeden Spielausgang eine Quote gestellt, die gleich dem γ-fachen des Kehrwerts des Einsatzes auf das betreffende Ergebnis in der vorangehenden Phase ist.

Annahme VI (Änderung der Einsätze). Für alle Spielausgänge sind die relativen Änderungen der Einsätze von einer Wettphase zur nächsten beschränkt.

Annahme VII (Rechnerische Vereinfachung). Die Summe der Einsätze ist in jeder Phase gleich 1 Geldeinheit.

Es bezeichnen

n = Anzahl Phasen, in welche die Wettdauer unterteilt ist,
m = Anzahl möglicher Ergebnisse pro Wettspiel.

Für $1 \le i \le m$ bezeichnet weiter

p_i = geschätzte Wahrscheinlichkeit für Ergebnis i, wobei $p_i > 0$ und $p_1 + \ldots + p_m = 1$,

sowie für $1 \le i \le m$ und $1 \le j \le n$

q_{ij} = Quote für Ergebnis i in Phase j,
e_{ij} = Einsatz für Ergebnis i in Phase j, wobei $e_{ij} > 0$ und $e_{1j} + \ldots + e_{mj} = 1$.

Gemäß Annahme V gilt

$$q_{i1} = \frac{\gamma}{p_i} \quad \text{für } 1 \le i \le m,$$
$$q_{ij} = \frac{\gamma}{e_{i\,j-1}} \quad \text{für } 1 \le i \le m \text{ und } 2 \le j \le n.$$

Die Annahme VI wird umgesetzt durch die Forderung, dass

$$\left| \frac{e_{ij} - e_{i\,j-1}}{e_{i\,j-1}} \right| \le \varepsilon$$

für ein $\varepsilon > 0$ und $1 \le i \le m, 2 \le j \le n$. Szenario 2 ist so konstruiert, dass die Forderung für $\varepsilon = 0.2$ zutrifft.

Um die Rendite und das Risiko des Wettanbieters deterministisch abzuschätzen, werden folgende Größen betrachtet:

a_i = Gesamtauszahlung bei Eintritt von Ergebnis i

Es gilt

$$\begin{aligned} a_i &= q_{i1}\, e_{i1} + q_{i2}\, e_{i2} + \ldots + q_{in}\, e_{in} \\ &= \frac{\gamma}{p_i} e_{i1} + \frac{\gamma}{e_{i1}} e_{i2} + \ldots + \frac{\gamma}{e_{i\,n-1}} e_{in} \\ &= \gamma \left(\frac{e_{i1}}{p_i} - 1 + \frac{e_{i2}}{e_{i1}} - 1 + \ldots + \frac{e_{in}}{e_{i\,n-1}} - 1 + n \right) \\ &= \gamma \left(\frac{e_{i1}}{p_i} - 1 + \frac{e_{i2} - e_{i1}}{e_{i1}} + \ldots + \frac{e_{in} - e_{i\,n-1}}{e_{i\,n-1}} + n \right). \end{aligned}$$

Die a_i können abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} a_i &\le \gamma \left(\left| \frac{e_{i1}}{p_i} - 1 \right| + (n-1)\varepsilon + n \right) \\ &\le \gamma \left(\max\left\{ \left| \frac{e_{11}}{p_1} - 1 \right|, \ldots, \left| \frac{e_{m1}}{p_m} - 1 \right| \right\} + n(1+\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Der Anbieter macht einen risikolosen Gewinn, wenn

$$a_i < n \text{ für } 1 \le i \le m.$$

Dies ist der Fall, wenn gilt

$$n > \frac{\max\left\{\left|\frac{e_{11}}{p_1} - 1\right|, \ldots, \left|\frac{e_{m1}}{p_m} - 1\right|\right\}}{\frac{1}{\gamma} - 1 - \varepsilon}.$$

Für Szenario 2 betragen $\gamma = 0.81$, $\varepsilon = 0.2$ und

$$\max\left\{\left|\frac{e_{11}}{p_1} - 1\right|, \ldots, \left|\frac{e_{41}}{p_4} - 1\right|\right\} \approx 0.39 .$$

Dementsprechend muss $n > 11$ sein. Das heißt: Wenn der Anbieter neben Phase 1 noch mindestens elf weitere Phasen anhängt, so wird er stets einen Gewinn erzielen, egal wie das Spiel ausgeht.

Fazit 2. Unter den Annahmen V bis VII kann der Wettanbieter einen sicheren Gewinn erzielen, wenn er die Quoten im Laufe der Wettdauer genügend oft geeignet ändert. Auch wer nichts wagt, kann so etwas gewinnen.

5 Bezüge zur modernen Finanzmathematik

Die beiden in den Abschnitten 3 und 4 vorgestellten Kontrollstrategien gehören zum Standardrepertoire des modernen Finanzmanagements.

Die probabilistische Kontrolle wird unter anderem bei der Verwaltung von Portfolios angewendet. Als Portfolio wird die Gesamtheit aller Anlagen bezeichnet, die ein Investor hält. Das Angebot an Anlagen wie etwa Anleihen, Aktien, Edelmetallen oder Währungen ist groß. Harry Markowitz entwickelte um 1950 ein Verfahren, wie ein Investor ein Portfolio zusammenstellen kann, das in Bezug auf Rendite und Risiko optimiert ist ([4]). Gemäß Markowitz kann ein Investor bei gleichbleibender Rendite sein Risiko verkleinern, in dem er erstens in seinem Portfolio hinreichend viele Anlagen hält und zweitens darauf achtet, dass die Kurse der gehalten Anlagen möglichst unkorreliert verlaufen. Letzterem entspricht beim Wetten die Annahme II betreffend die Unabhängigkeit der Ergebnisse der verschiedenen Wettspiele.

Die deterministische Kontrolle wird unter anderem zur Absicherung von Optionen eingesetzt. Eine Option ist ein Vertrag zwischen zwei Parteien über ein mögliches Geschäft in der Zukunft. Die eine Partei, der Inhaber der Option, erhält das Recht, ein bestimmtes Gut, zum Beispiel eine Aktie, zu einem späteren Zeitpunkt zu einem heute festgelegten Preis kaufen (Call-Option) bzw. verkaufen (Put-Option) zu dürfen. Die andere Partei, der Herausgeber der Option, hat die Pflicht, das Gut dem Inhaber der Option zu den festgelegten Bedingungen zu verkaufen (Call-Option) bzw. abzukaufen (Put-Option), wenn dieser das wünscht und seine Option ausübt. Für sein Recht muss der Inhaber der Option dem Herausgeber der Option bei Vertragsabschluss eine Prämie zahlen.

Optionen können als Wetten angesehen werden. Bei einer Call-Option zum Beispiel setzt der Inhaber der Option darauf, dass der Kurs des Guts über den vertraglich festgelegten Kaufpreis steigt. Wenn dies eintrifft, kann der Inhaber der Option das Gut zum tieferen Preis vom Herausgeber der Option kaufen und zum höheren Preis am Markt wieder verkaufen und so einen Gewinn erzielen. Als Einsatz für diese Wette zahlt der Inhaber der Option die Prämie.

Dazu ein Beispiel: Die Aktie ABC hat derzeit einen Kurs von 100 €. Frau XY möchte eine Wette darauf abschliessen, dass der Kurs der Aktie in nächster Zeit stark steigt. Sie erwirbt daher 100 Call-Optionen auf die Aktie ABC mit Ausübungspreis 110 € und Laufzeit drei Monate. Das heisst: Sie erhält das Recht, im Laufe der nächsten drei Monate 100 Aktie ABC zu je 110 € kaufen zu dürfen. Für dieses Recht zahlt Frau XY eine Prämie von 6 € pro Option. Ihr Wetteinsatz beträgt also 600 €.

Angenommen, Frau XY behält Recht und die Aktie ABC steigt auf zum Beispiel 120 €. Dann wird sie ihre Optionen ausüben, das heisst 100 Aktien ABC zu je 110 € kaufen. Frau XY wird die Aktien sogleich wieder an der Börse zum aktuellen Kurs von 120 € verkaufen. Sie nimmt so pro Option 10 € ein. Ihre Wettauszahlung beträgt dann 1000 €. Sie macht mit der Wette 400 € Gewinn.

Angenommen, Frau XY behält nicht Recht und die Aktie ABC sinkt auf zum Beispiel 80 €. Dann wird Frau XY ihre Optionen nicht ausüben. Ihr Wetteinsatz geht verloren, sie macht 600 € Verlust.

Fischer Black, Myron Scholes und Robert Merton entwickelten um 1970 eine Methode zur Prämienberechnung von Optionen ([5], [6]). Ihre Methode beruht darauf, dass der Herausgeber der Option sein Risiko kontrollieren kann, indem er während der Laufzeit der Option stets eine geeignete Menge des Guts hält. So wie der Sportwettenanbieter bei der deterministischen Kontrollstrategie die Quoten laufend den Einsätzen anpasst, muss der Optionenherausgeber die Menge des gehaltenen Guts laufend in geeigneter Weise dem Kurs des Guts anpassen. Wie für den Sportwettenanbieter ist es dann auch für den Optionenherausgeber möglich, niemals Verlust zu erleiden, wie auch immer der Kurs des Guts sich entwickelt.

Zur Illustration der Methode von Black, Scholes und Merton betrachten wir die Option von Frau XY. Wir zeigen in einem sehr einfachen aber prototypischen Modellszenario, dass der Herausgeber der Optionen durch Kauf einer geeigneten Anzahl Aktien ABC sicherstellen kann, dass er stets Gewinn macht. Unser stark vereinfachtes Szenario sieht so aus, dass der Kurs der Aktie ABC nur entweder auf 120 € steigt oder auf 80 € sinkt. (Dieses so genannte Einperioden-Binomialmodell kann zu einem realistischeren Modell ausgebaut werden. Vgl. dazu [7], [8].) Zur Absicherung der Optionen kauft der Herausgeber in diesem Szenario 25 Aktien ABC zu je 100 €. Er zahlt dafür 2500 €. Dann wartet er ab. (Um zu verstehen, warum er gerade 25 Aktien kauft, muss man tiefer in die dahinter liegende Theorie eindringen. Vgl. dazu [7], [8].)
Angenommen der Kurs der Aktie ABC steigt auf 120 € und Frau XY übt ihre Optionen aus. Dann kauft der Herausgeber 75 Aktien ABC an der Börse zum aktuellen Kurs von 120 € nach. Dafür zahlt er 9000 €. Er verkauft anschliessend seine insgesamt 100 Aktien ABC an Frau XY für 110 € pro Aktie. Er kassiert dafür 11000 €. Insgesamt gibt der Herausgeber 11500 € aus und nimmt 11600 € ein, macht also einen Gewinn von 100 €.
Angenommen der Kurs der Aktie ABC sinkt auf 80 € und Frau XY übt ihre Optionen nicht aus. Dann verkauft der Herausgeber seine 25 Aktien ABC an der Börse zum aktuellen Kurs von 80 €. Dafür kassiert er 2000 €. Insgesamt gibt der Herausgeber 2500 € aus und nimmt 2600 € ein, macht also auch in diesem Fall einen Gewinn von 100 €!
Zugegeben: Diese Gewinnrechnung scheint mysteriös zu sein. Dem ist aber nicht so. Das Ganze hat System und trug Scholes und Merton 1997 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ein.

6 Bezüge zur Schule

Es gibt eine Reihe von Gründen, finanzmathematische Themen im gymnasialen Mathematikunterricht aufzugreifen, unter anderem die vier nachfolgend ausgeführten.
1 Die Verbindung wirtschaftlicher und mathematischer Denkweisen ist spannend und fruchtbar – auch für die Schule. Gymnasiale Mathematik reicht aus, um theoretisch interessante und praktisch relevante Erkenntnisse zu gewinnen.
2 Das Anlagespektrum ist heute auch für Privatpersonen sehr breit. Aktien und Optionen bilden eine durchaus sinnvolle Ergänzung zu Spargeldern und Anleihen. Allerdings muss die Rendite und das Risiko dieser Anlagen richtig eingeschätzt und laufend kontrolliert werden.
3 Finanzmathematik ist eine vergleichsweise junge Disziplin. Es kann mitverfolgt werden, wie neue mathematische Methoden entwickelt werden und sich nach und nach etablieren – oder auch nicht.
4 Banken und Versicherungen sind neben Schulen und Hochschulen der wichtigste Arbeitgeber für Mathematikerinnen und Mathematiker.

"Wetten aus Sicht des Anbieters" eignet sich, um exemplarisch einen (ersten) Einblick zu geben in typische Methoden der modernen Finanzmathematik. Wetten sind den Schülerinnen und Schülern im Gegensatz zu Finanzinstrumenten wie Aktien oder Optionen wohlbekannt. Zudem bleiben die Berechnungen im Rahmen der (elementaren) gymnasialen Algebra und Stochastik.

Eine auf Lehrerinnen und Lehrer zugeschnittene Einführung in die mathematische Bewertung von Portfolios und Optionen sowie in weitere Themen der klassischen und modernen Finanzmathematik bietet [7]. Als Einführung für Schülerinnen und Schüler in Optionen aus wirtschaftlicher und mathematischer Sicht kann [8] dienen.

Dank

Der Autor dankt Daniel Stoffer, Zürich, für die Hilfe bei der Suche nach einem einfachen Erklärungsmodell für die deterministische Kontrollstrategie.

Literatur

[1] Informationen unter www.sporttip.ch.
[2] Der Artikel kann unter www.facts.ch gegen eine Gebühr von 3.50 Fr. herunter geladen werden.
[3] Informationen unter www.sportwetten.de.
[4] Markowitz, H. (1952): Portfolio Selection. Journal of Finance, 7, 77 – 91.
[5] Black F. und Scholes M. (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy, 81, 637 – 659.
[6] Merton, R. (1973): Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 141 – 183.
[7] Adelmeyer, M. und Warmuth, E. (2003): Finanzmathematik für Einsteiger. Wiesbaden: Vieweg Verlag.
[8] Adelmeyer, M. (2000): Call & Put – Einführung in Optionen aus wirtschaftlicher und mathematischer Sicht. Zürich: Orell Füssli Verlag.

Anschrift des Verfassers
Moritz Adelmeyer
Kantonale Maturitätsschule für Erwachsene Zürich
Schönberggasse 1
CH – 8001 Zürich
m.adelmeyer@bluewin.ch