Zur Verteilung der Mediane

JÖRG MEYER, HAMELN

Zusammenfassung: Es wird folgendes Analogon zum Satz von de Moivre Laplace gezeigt: Wenn man immer zu n Wurfergebnissen den Median bildet, so konvergiert die Verteilung bei einer hinreichend großen Seitenzahl des Würfels mit wachsendem n gegen die Normalverteilung.

1. Phänomene

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des arithmetischen Mittels bei n Würfen konvergiert für $n \to \infty$ bekanntlich gegen die Normalverteilung.

Die Frage nach der Gestalt der Grenzverteilung lässt sich variieren: Was ist, wenn man nicht das arithmetische Mittel nimmt, sondern den Median?

Die folgende Abb. 1 zeigt die relativen Häufigkeiten bei 200.000 Serien von jeweils $n = 11$ Würfen. Dabei wurde ein 300-seitiger Würfel verwendet, um eine größere Variabilität zu erzeugen.

Man wird beim Median vielleicht eine ähnliche Kurve wie beim arithmetischen Mittel erwarten mit einem ausgeprägten Maximum bei 150 und sehr geringen Häufigkeiten bei sehr großen und sehr kleinen Werten.

Die genauere Gestalt hingegen ist schlecht vorherzusagen, und sie überrascht auch.

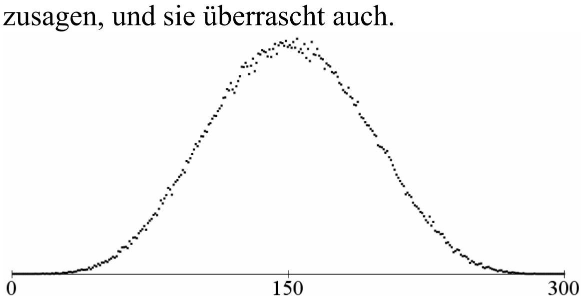

Abb. 1: Verteilung der Mediane bei zugrundeliegender Gleichverteilung

Die Kurve sieht tatsächlich ähnlich aus wie die beim arithmetischen Mittel. Wir werden in Abschnitt 4 unter Zuhilfenahme eines Computer-Algebra-Systems sehen, dass folgender Sachverhalt[1] gilt:

Wenn man immer zu n Wurfergebnissen den Median bildet, so konvergiert die Verteilung bei einer hinreichend großen Seitenzahl des Würfels mit wachsendem n gegen die Normalverteilung.

Interessant ist es, wenn man die Daten des Medians mit denen des arithmetischen Mittels vergleicht.

In Abb. 2 wurde zu jeweils $n = 11$ Wurfergebnissen das arithmetische Mittel (schmale Kurve mit hohem Maximum) und der Median gebildet. Es gab 200.000 Durchgänge.

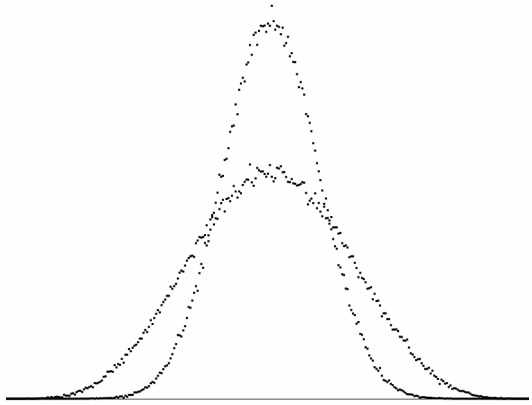

Abb. 2: Arithmetisches Mittel und Median

Man kann also sagen: Der Median streut viel stärker als das arithmetische Mittel[2].

(Die Graphiken habe ich übrigens mit der Programmiersprache Java 2 erzeugt. Es wäre schön, wenn es eine interaktive und intuitiv richtig zu bedienende Software gäbe.)

2. Die Verteilung der kleinsten Elemente

Um zu begründen, weswegen der Median zu einer Normalverteilung führt, betrachten wir zunächst einen einfacheren Fall:

In Abb. 3 wurde mit einem 300-seitigen verallgemeinerten Würfel 200.000-mal jeweils 11-mal gewürfelt und zu diesen $n = 11$ Wurfergebnissen der jeweils <u>kleinste</u> Wert genommen.

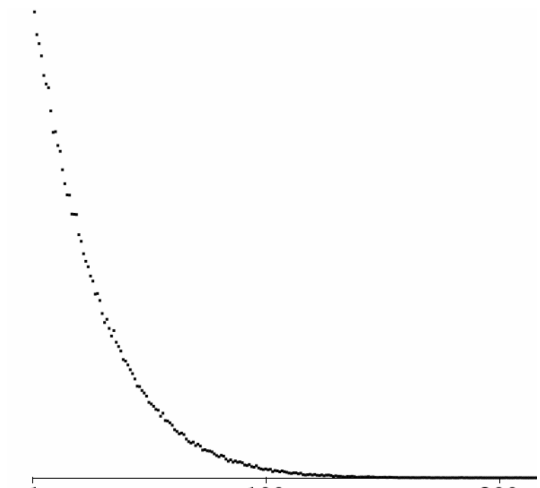

Abb. 3: Die Verteilung der kleinsten Elemente

Wie lässt sich Abb. 3 erklären?

Wir würfeln jeweils n-mal und bestimmen von den Wurfergebnissen das Minimum. Zur kumulativen Verteilung der Minima werden zwei Wege beschrieben:

1. Weg:

Wir betrachten wieder einen normalen Würfel mit 6 Seiten. Zunächst kann man sich überlegen, wie oft es vorkommen kann, dass das Minimum 1 ist. Das Ergebnis ist klar:

Es gibt $6^n - 5^n$ Möglichkeiten, das Minimum 1 zu erreichen. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem sechsseitigen Würfel nach n-maligem Würfeln das Minimum 1 zu erzielen, beträgt also

$$\mathrm{prob}_{6;\,n}(\mathrm{Min}=1)=\frac{6^n-5^n}{6^n}.$$

Dabei gibt der erste Index (6) von prob an, wie viele Seiten der Würfel hat, und der zweite Index (n), von wie vielen Wurfergebnissen das Minimum genommen wurde.

Nun wird man sich überlegen, wie oft man das Minimum 2 erreichen kann. Es ist einfacher zu beantworten, wenn man fragt, wie häufig es vorkommen kann, dass das Minimum 1 oder 2 ist. Die Antwort liegt auf der Hand: Es gibt $6^n - 4^n$ Möglichkeiten, das Minimum 1 oder das Minimum 2 zu erreichen. Daher ist

$$\mathrm{prob}_{6;\,n}(\mathrm{Min}\le 2)=\frac{6^n-4^n}{6^n}.$$

Das Schema setzt sich in natürlicher Weise fort und führt auf

$$\mathrm{prob}_{6;\,n}(\mathrm{Min}\le x)=\frac{6^n-(6-x)^n}{6^n}.$$

Wenn der Würfel W Seiten haben sollte, verallgemeinert sich die Formel zu

$$\begin{aligned}\mathrm{prob}_{W;\,n}(\mathrm{Min}\le x)&=\frac{W^n-(W-x)^n}{W^n}\\&=1-\left(1-\frac{x}{W}\right)^n\end{aligned}$$

mit $1\le x\le W$.

2. Weg[3]:

Wir gehen gleich von einem W-seitigen Würfel aus. Der Sachverhalt, dass von n Würfen das Minimum kleiner oder gleich x ist, lässt sich auch so beschreiben, dass mindestens ein Wurf zu einer Augenzahl führt, die kleiner oder gleich x ist.

Dies ist die erste Umstrukturierung des Phänomens, die für diesen Weg notwendig ist. Die zweite besteht darin, das n-malige Würfeln als eine Bernoulli-Kette zu beschreiben, allerdings mit ungewöhnlichen Wahrscheinlichkeitsbelegungen. So besteht die (von x abhängige) Erfolgswahrscheinlichkeit p darin, eine Augenzahl zu bekommen, die kleiner oder gleich x ist. Es ist also $p=\frac{x}{W}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}&\mathrm{prob}_{W;\,n}(\mathrm{Min}\le x)\\&\quad=\mathrm{prob}(\text{mindestens 1 Wurfergebnis }\le x)\\&\quad=1-\mathrm{prob}(\text{kein Wurfergebnis }\le x)\\&\quad=1-\binom{n}{0}\cdot p^0\cdot(1-p)^n\\&\quad=1-\left(1-\frac{x}{W}\right)^n\end{aligned}$$

Was man beim zweiten Weg an elementaren Überlegungen sparte, musste an Bemühungen zur Umstrukturierung hinein gesteckt werden. Dass die damit verbundene Abstraktion sich lohnt, wird in den folgenden Abschnitten noch viel deutlicher werden.

Aus der kumulativen Verteilung bekommt man die Einzelwahrscheinlichkeiten durch Differenzbildung:

$$\begin{aligned}&\mathrm{prob}_{W;\,n}(\mathrm{Min}=x)\\&\quad=\mathrm{prob}_{W;\,n}(\mathrm{Min}\le x)-\mathrm{prob}_{W;\,n}(\mathrm{Min}\le x-1)\\&\quad=\left(1-\frac{x-1}{W}\right)^n-\left(1-\frac{x}{W}\right)^n\end{aligned}$$

Die Berechnung der Differenz ist mühsam und auch unnötig, wenn W hinreichend groß ist. Es fällt nämlich auf, dass die besagte Differenz für große W im Wesentlichen ein Ableitungsterm ist. Daher ist es naheliegend, die diskrete Variable $x\in\{1;\ 2;\ \ldots;\ W\}$ durch die reelle Variable $y=\frac{x}{W}\in[0;\ 1]$ zu ersetzen und statt der obigen diskreten kumulativen Verteilung die interpolierende reelle Funktion $F_{n;\,1}$ mit

$$F_{n;\,1}(y)=\begin{cases}0 & \text{für } y<0\\ 1-(1-y)^n & \text{für } 0\le y\le 1\\ 1 & \text{für } 1<y\end{cases}$$

zu betrachten (der zweite Index 1 gibt an, dass es sich um die kumulative Dichte des Minimums handelt). Man kann auch sagen: Wir werden die diskrete Gleichverteilung auf {1; 2; ...; W} ersetzen durch die kontinuierliche Gleichverteilung auf $[0;\ 1]$.

Dabei ist die zu $F_{n;1}$ gehörige kontinuierliche Dichte gegeben durch

$$f_{n;1}(y) = \frac{d}{dy} F_{n;1}(y)$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{für } \; y < 0 \\ n \cdot (1-y)^{n-1} & \text{für } \; 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{für } \; 1 < y \end{cases}$$

Für wachsende n nähern sich die Kurven zu $f_{n;1}$ immer mehr der Hochachse an. Daher wird man, um zu einer sinnvollen Aussage über die Grenzverteilung zu kommen, standardisieren. Hier orientieren wir uns an der Vorgehensweise beim arithmetischen Mittel und verwenden Erwartungswert und Standardabweichung[4]. Diese beiden Parameter ergeben sich mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems zu $\mu = \frac{1}{n+1}$ und $\sigma = \frac{\sqrt{\frac{n}{n+2}}}{n+1}$. Abb. 4 zeigt den entsprechenden Derive-Code.

```
n :∈ Integer (0, ∞)

                     n - 1
f(n, y) := n·(1 - y)

       1
μ := ∫   y·f(n, y) dy
       0

        1
μ = ───────
     n + 1

       1
σ := ∫   (y - μ)² ·f(n, y) dy
       0

                n
σ = ─────────────────────
                       2
     (n + 2)·(n + 1)
```

Abb. 4: Erster Derive-Code

Eigentlich müsste man μ und σ noch mit n indizieren. Bei der Standardisierung hat man dann für $0 \le \sigma \cdot z + \mu \le 1$ die Zuordnung

$$z = \frac{y-\mu}{\sigma} \mapsto \varphi_n(z) := \sigma \cdot n \cdot \left(1 - (\sigma \cdot z + \mu)\right)^{n-1};$$

für $\sigma \cdot z + \mu \notin [0;\, 1]$ sei $\varphi_n(z) = 0$.

In Abb. 5 gehört die dünne Kurve zu $n = 10$, die mittlere zu $n = 20$ und die obere dicke zu $n = 100$.

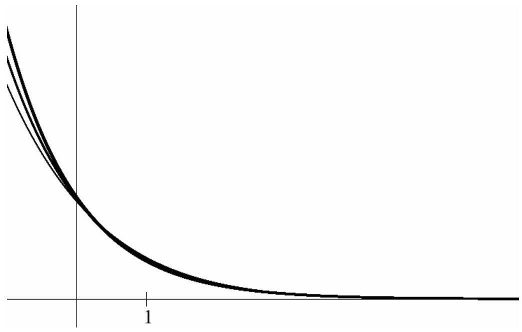

Abb. 5: Einige Dichtefunktionen

Man vermutet nach dem optischen Eindruck Konvergenz. Dies lässt sich mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems leicht nachweisen; man bekommt $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(z) = e^{-z-1}$ (Abb. 6).

```
          ⎛   n   ⎞
         √⎜───────⎟
          ⎝ n + 2 ⎠
σ := ─────────────────
          n + 1

φ(n, z) := σ·f(n, σ·z + μ)

                   -z - 1
lim φ(n, z) = ê
n→∞
```

Abb. 6: Zweiter Derive-Code

Dabei ist $z \ge -1$. Die sich für $n \to \infty$ ergebende Grenzdichte gehört zur Exponentialverteilung.

3. Die Verteilung der zweitkleinsten Elemente

In Abb. 7 wurde mit einem 300-seitigen verallgemeinerten Würfel 200.000-mal jeweils $n = 11$-mal gewürfelt und von den Wurfergebnissen der jeweils zweitkleinste Wert genommen.

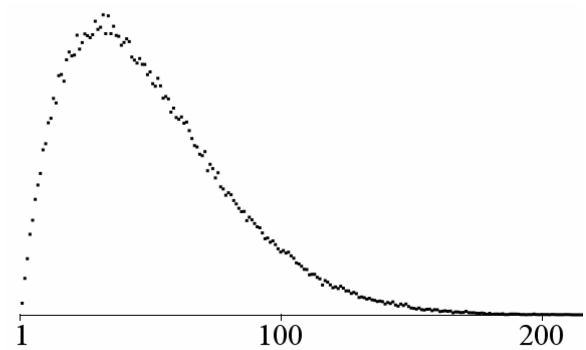

Abb. 7: Verteilung der zweitkleinsten Werte

Wir würfeln jeweils n-mal, ordnen die so erhaltene Stichprobe zu $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ und fragen uns, wie a_2 verteilt ist. Die entsprechende Frage für a_1 führte zur Verteilung der Minima. Beide Wege des letzten Abschnitts lassen sich analogisieren:

Weg 1:

Wie oft kann es vorkommen, dass $a_2 = 1$ ist? Es ist übersichtlicher, danach zu fragen, wie häufig es vorkommen kann, dass $a_2 \neq 1$ ist. Dafür gibt es die folgenden Möglichkeiten:

Man würfelt keine einzige Eins. Dafür hat man 5^n Möglichkeiten.

Man würfelt genau eine Eins und $n-1$ Nichteinsen. Die Eins kann an n Stellen stehen, und die Nichteinsen können die Werte 2 bis 6 annehmen. Hier gibt es also $n \cdot 5^{n-1}$ Möglichkeiten.

Zusammenfassend gilt: Es gibt $6^n - n \cdot 5^{n-1} - 5^n$ Möglichkeiten, $a_2 = 1$ zu erreichen. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem sechsseitigen Würfel nach n-maligem Würfeln als zweitkleinsten Wert die „Eins" zu erzielen (das Minimum muss dann auch 1 betragen), so groß wie

$$\text{prob}_{6;\,n}\left(a_2 = 1\right) = \frac{6^n - n \cdot 5^{n-1} - 5^n}{6^n}.$$

Nun wird man sich überlegen, wie oft man $a_2 = 2$ erreichen kann. Es ist einfacher, sich zu überlegen, wie häufig $a_2 \leq 2$ bzw. $a_2 > 2$ vorkommen kann. Dann nämlich kann man die obige Argumentation fast kopieren. Dazu nennen wir die Wurfergebnisse „1" und „2" „gut" und die anderen Wurfergebnisse „schlecht". Dann gibt es für das Ereignis $a_2 > 2$ folgende Möglichkeiten:

Keines der n Wurfergebnisse ist „gut". Dafür hat man 4^n Möglichkeiten.

Genau ein Wurfergebnis ist „gut", und $n-1$ sind „schlecht". Das „gute" Ergebnis kann an n Stellen stehen und die Werte 1 bis 2 annehmen. Ferner gibt es 4^{n-1} Möglichkeiten, genau $n-1$ „schlechte" Ergebnisse zu erzielen. Dies führt insgesamt auf $2 \cdot n \cdot 4^{n-1}$ Möglichkeiten.

Zusammenfassend gilt: Es gibt $6^n - 2 \cdot n \cdot 4^{n-1} - 4^n$ Möglichkeiten, $a_2 \leq 2$ zu erreichen. Damit ist

$$\text{prob}_{6;\,n}\left(a_2 \leq 2\right) = \frac{6^n - 2 \cdot n \cdot 4^{n-1} - 4^n}{6^n}.$$

Das Schema setzt sich fort und führt auf

$$\text{prob}_{6;\,n}\left(a_2 \leq x\right) = \frac{6^n - x \cdot n \cdot (6-x)^{n-1} - (6-x)^n}{6^n}$$

bzw. für $1 \leq x \leq W$ auf

$$\text{prob}_{W;\,n}\left(a_2 \leq x\right) = 1 - n \cdot \frac{x}{W} \cdot \left(1 - \frac{x}{W}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{x}{W}\right)^n$$

Weg 2:

$$\begin{aligned}
&\text{prob}_{W;\,n}\left(a_2 \leq x\right) \\
&= \text{prob}\left(\text{mindestens 2 Wurfergebnisse } \leq x\right) \\
&= 1 - \text{prob}\left(\text{kein Ergebnis } \leq x\right) \\
&\qquad - \text{prob}\left(\text{1 Ergebnis } \leq x\right) \\
&= 1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n - \binom{n}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{n-1} \\
&= 1 - \left(1 - \frac{x}{W}\right)^n - n \cdot \frac{x}{W} \cdot \left(1 - \frac{x}{W}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Man sieht, dass Weg 2 wesentlich klarer und durchsichtiger ist, dass also Abstraktion Einsicht erzeugt hat. Gleichwohl sollte man bei den kleinsten Elementen nicht gleich den Weg 2 ansteuern, weil nämlich einerseits Weg 1 heuristisch näher liegt und weil zweitens der große Vorteil, den Weg 2 bietet, sonst gar nicht erfahren werden kann.

Um zur Wahrscheinlichkeitsverteilung zu kommen, lassen wir wieder W groß sein, schreiben $\frac{x}{W} = y \in \mathbb{R}$ und ersetzen den obigen Term der kumulativen Verteilung für $0 \leq y \leq 1$ durch

$$F_{n;\,2}(y) = 1 - n \cdot y \cdot (1-y)^{n-1} - (1-y)^n.$$

Für die zugehörige kontinuierliche Dichte ist dann

$$f_{n;\,2}(y) = \frac{d}{dy} F_{n;\,2}(y) = \begin{Bmatrix} 0 & \text{für} & y < 0 \\ n \cdot (n-1) \cdot y \cdot (1-y)^{n-2} & \text{für} & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{für} & 1 < y \end{Bmatrix}$$

Analoge Rechnungen wie beim Minimum führen zum Ergebnis, dass (nach Standardisierung) die Grenzdichte (Abb. 8) für große n gegeben ist durch

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(z) = 2 \cdot e^{-z \cdot \sqrt{2} - 2} \cdot \left(z + \sqrt{2}\right).$$

Dabei ist $z > -\sqrt{2}$.

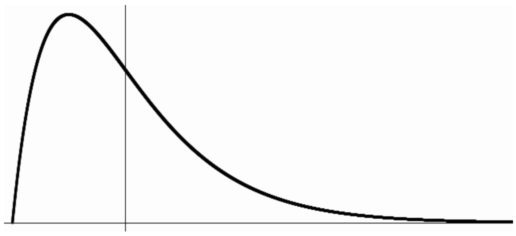

Abb. 8: Grenzdichte des zweitkleinsten Elements

Es handelt sich bei der Grenzverteilung um eine Gamma-Verteilung[5].

4. Die Verteilung der mittleren Elemente

Die Methoden für den kleinsten und den zweitkleinsten Wert lassen sich auf den mittleren Wert übertragen:

Wir würfeln jeweils $n = 2 \cdot m + 1$ mal und bestimmen von den Wurfergebnissen den Median. Wie sind diese verteilt?

Ordnet man die Stichprobe zu $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$, so ist der Median durch a_{m+1} gegeben.

Hier ist das Beschreiten von Weg 1 schon recht aufwändig; der 2. Weg liefert

$$\begin{aligned} &\text{prob}_{W;\,n}\left(a_{m+1} \le x\right) \\ &= \text{prob}\left(\text{mindestens m+1 Ergebnisse } \le x\right). \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{x}{W}\right)^{k} \cdot \left(1 - \frac{x}{W}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Für große W und $\frac{x}{W} = y \in \mathbb{R}$ führt dies für $0 \le y \le 1$ auf

$$F_{n;\,m+1}(y) = \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} \cdot y^{k} \cdot (1-y)^{n-k}.$$

Für $0 \le y \le 1$ gilt dann für die zugehörige kontinuierliche Dichte

$$\begin{aligned} f_{n;\,m+1}(y) &= \frac{d}{dy} F_{n;\,m+1}(y) \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} \cdot k \cdot y^{k-1} \cdot (1-y)^{n-k} \\ &\quad - \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} \cdot y^{k} \cdot (n-k) \cdot (1-y)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} \binom{n}{k+1} \cdot (k+1) \cdot y^{k} \cdot (1-y)^{n-k-1} \\ &\quad - \sum_{k=m+1}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot y^{k} \cdot (n-k) \cdot (1-y)^{n-k-1} \\ &= \binom{n}{m+1} \cdot (m+1) \cdot y^{m} \cdot (1-y)^{m} \end{aligned}$$

Der Erwartungswert beträgt

$$\mu = \int_0^1 y \cdot f_{n;\,m+1}(y) \cdot dy = \frac{1}{2},$$

wie man mit einem Computer-Algebra-System leicht sieht und wie es auch zu erwarten ist. Die Standardabweichung hat den Wert

$$\sigma = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot m + 3}}.$$

Die Standardisierung überlässt man dem Computer-Algebra-System. Die sich anschließende Grenzwertbildung liefert $\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2 \cdot \pi}}$ als Term der Grenzfunktion. Als Grenzverteilung erhält man daher tatsächlich die Normalverteilung.

Auch wenn man nicht von einer Gleichverteilung ausgeht, ist unter sehr allgemeinen Voraussetzungen die Grenzverteilung der Mediane normal[6].

5. Schlussbemerkung

Bei den hier behandelten Ordnungs-Verteilungen wird deutlich, wie stochastische und analytische Elemente bei der Argumentation verteilt sind:

Um die (kumulativen) Ordnungs-Verteilungen überhaupt zu gewinnen, ist stochastisches Denken notwendig; dies kann kombinatorischer Natur sein (1. Weg) oder auch darin bestehen, das n-malige Würfeln als Bernoulli-Kette mit speziellen Einzelerfolgs-Wahrscheinlichkeiten zu beschreiben (2. Weg).

Die Ermittlung der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten bzw. von deren Dichten dagegen ist reine Analysis; hier muss nur differenziert werden.

Um die Grenzverteilungen zu bekommen, muss standardisiert werden; dies ist eine Idee, die eher der Stochastik zuzuordnen ist.

Die Grenzübergänge sind dann wiederum reine Analysis und von Stochastik unabhängig, sie wurden hier an ein Computer-Algebra-System delegiert.

Anmerkungen

1. Dies hat - mit ganz anderen Methoden - Laplace als erster bewiesen; vgl. etwa Hald [1998]; S. 448 f.

2 Hat der Würfel W Seiten und würfelt man jeweils n-mal, so hat das arithmetische Mittel nach Pfanzagl [²1991] (S. 279) die Varianz $\approx \frac{W^2}{12 \cdot n}$ und der Median nach Pfanzagl (S. 181) die Varianz $\approx \frac{W^2}{3 \cdot n}$.

Die Standardabweichung der vom Median herrührenden Normalverteilung findet sich etwa bei Pfanzagl (S. 293). – Hier soll es aber nur darum gehen, warum die Mediane zur Normalverteilung führen.

3 Nach Dehling/Haupt [2003]; S. 195; hier modifi-

ziert und kommentiert.

[4] Andere Vorgehensweisen werden etwa in Pfanzagl [^{2}1991] (Kap. 12) geschildert. Sie sind zum Teil rechnerisch einfacher, müssen aber erst einmal motiviert werden.

[5] Zur Definition und zum Zusammenhang mit anderen Verteilungen siehe etwa Lehmann [2002]; S. 149 f.

[6] Vgl. etwa Pfanzagl [^{2}1991]; S. 181 oder S. 293.

Literatur

Dehling, Herold / Haupt, Beate [2003]: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Berlin usw.: Springer Verlag.

Hald, Anders [1998]: A history of mathematical statistics from 1750 to 1930. New York usw.: John Wiley.

Lehmann, Günter [2002]. Statistik. Heidelberg usw.: Spektrum Akademischer Verlag.

Meyer, Jörg [2004]: Schulnahe Beweise zum zentralen Grenzwertsatz. Hildesheim: Franzbecker Verlag.

Pfanzagl, Johann [^{2}1991]: Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin usw.: Walter de Gruyter Verlag (Original 1988).

Jörg Meyer
Schäfertrift 16
31789 Hameln
J.M.Meyer@t-online.de

Fathom - Ein interaktives Werkzeug zur Stochastik - Testversion kostenlos verfügbar

ROLF BIEHLER

Die Software Fathom steht in einer deutschen Betaversion kostenlos zum Testen an deutschen Schulen und Hochschulen bis zum 15.03.2006 zur Verfügung:
(http://www.mathematik.uni-kassel.de/~fathom).
Die Software ist voll funktionsfähig, die Menüs sind in deutscher Sprache, der Großteil der Dokumentation ist noch in Englisch.

Im Februar 2006 erscheint eine Version mit voller deutscher Dokumentation und Materialien für den unterrichtlichen Einsatz bei Springer Heidelberg. Die Software kann bis dahin frei an Schüler und Studierende weitergegeben werden und im Unterricht erprobt werden.

Die Software, die erfolgreich an zahlreichen amerikanischen Highschools und Colleges eingesetzt wird(http://www.keypress.com/fathom/), ist ein universelles Werkzeug für den Stochastikunterricht.

Anwendungen in folgenden Themenbereichen sind möglich: Beschreibende Statistik und Explorative Datenanalyse, stochastische Simulation von Zufallsexperimenten, Beurteilende Statistik (traditionelle Verfahren, Resampling Methoden), Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Anpassung von Funktionen an Daten, Regression und Korrelation

Fathom unterstützt das Lernen von Stochastik durch die leichte Möglichkeit dynamische Visualisierungen und interaktive Arbeitsblätter herzustellen. Fathom ist ein relativ einfach zu erlernendes Werkzeug, das nach neuesten didaktischen und softwareergonomischen Erkenntnissen gestaltet wurde. Moderne computergestützte Anwendungen der Stochastik lassen sich leicht auch auf Schulniveau realisieren.

Mehr Materialien finden sich auf der Homepage http://www.mathematik.uni-kassel.de/~fathom.

Kontakt: Prof. Dr. Rolf Biehler
(biehler@mathematik.uni-kassel.de;
fathom@mathematik.uni-kassel.de)