Hat Gregor Mendel seine Daten „frisiert" ?

HELMUT WIRTHS, OLDENBURG

***Zusammenfassung**: In Niedersachsen wird im Biologieunterricht der 10. Klasse Vererbung behandelt. Dabei werden auch die Mendelschen Gesetze betrachtet. In Klasse 9 und 10 werden im Mathematikunterricht mit den Bausteinen „Rückwärtiges Schließen im Baumdiagramm" und „Binomialverteilung/Alternativtests" mathematische Voraussetzungen geschaffen, um Mendels Datenmaterial zu untersuchen. Eine Erweiterung und Vertiefung dieser Diskussion kann in der gymnasialen Oberstufe erfolgen und findet dort auch großes Interesse. So kann an diesem Beispiel fächerübergreifender Unterricht praktiziert werden, über dessen mathematische Möglichkeiten hier berichtet wird.*

1 Einleitung

Der Augustinermönch Johann Gregor Mendel (1822 -1884) veröffentlichte 1865 in Brünn eine Arbeit mit dem Titel „Versuche über Pflanzen-Hybriden", in der er seine Beobachtungen über das Verhalten von sieben unterschiedlichen Merkmalen bei Kreuzungen der Erbse und deren folgenden Generationen in Zahlenverhältnissen ausdrückte. Diese später als Mendelsche Gesetze bekannt gewordenen Regeln lauten:

1. Uniformitätsgesetz: Werden zwei reinerbige Eltern, die sich in einem Merkmal unterscheiden, gekreuzt, so sind alle Nachkommen in der 1. Tochtergeneration unter sich gleich (uniform).

2. Spaltungsgesetz: Werden Individuen der ersten Tochtergeneration untereinander gekreuzt, erhält man in der zweiten Tochtergeneration eine Aufspaltung in bestimmten Zahlenverhältnissen, bei dominant-rezessivem Erbgang im Verhältnis 3:1.

3. Unabhängigkeitsgesetz: Werden die Individuen, die sich in mehr als einem Merkmal reinerbig unterscheiden, gekreuzt, werden die Merkmale unabhängig voneinander vererbt und dabei nach dem Spaltungsgesetz verteilt.

In der Öffentlichkeit wurden Mendels Gesetze zunächst nicht beachtet. War seine Idee, Statistik in der Biologie anzuwenden, zu neu für die damalige Zeit? Erst 1900 wurden Mendels Gesetze durch die Botaniker Carl Correns (Deutschland), Hugo de Vries (Holland) und Erich von Tschermak-Seysenegg (Österreich) wieder belebt. Es ist auch die Rede von „unabhängiger Wiederentdeckung". R.A. Fisher, einer der Väter der klassischen Testtheorie, hat 1936 eine Diskussion eröffnet, die bis heute anhält. Fisher behauptete, dass Mendel einen Assistenten gehabt haben müsse, der in Kenntnis der Gesetze die Beobachtungsergebnisse korrigiert hat, um so zu einer besseren Übereinstimmung mit der Theorie zu kommen. Fishers Vermutungen wurden mehrfach zurückgewiesen. Man warf ihm vor, von falschen oder inadäquaten Voraussetzungen in seiner Modellierung ausgegangen zu sein.

Wenn im Biologieunterricht der 10. Klasse die Mendelschen Gesetze behandelt werden, können im Mathematikunterricht der 10. Klasse und der gymnasialen Oberstufe die bekannten Daten unter verschiedenen Gesichtspunkten analysiert werden. Damit soll auch die „Datenkompetenz" der Lernenden gestärkt werden. Der Mathematikunterricht gelangt mit der Kritik an der Modellierung an einen Punkt, an dem der Biologe die Diskussion dann unbedingt wieder aufgreifen und fortführen muss. Ich strebe hier überhaupt nicht an, Fishers Methoden wieder zu beleben, so interessant das sein mag. Mein Interesse besteht darin, unterschiedliche Gesichtspunkte zur Auswertung der Mendelschen Daten bereitzustellen, dabei mit elementaren Mitteln der Schul-Stochastik zu arbeiten, die jeder Mathematikunterricht benutzen und zur Verfügung stellen sollte.

2 Die Daten

Gregor Mendel führte um 1860 Kreuzungsversuche mit Erbsen durch. Er kreuzte dabei Individuen einer Art, die sich in einem Merkmal unterscheiden und hierfür reinrassig sind. Die Nachkommen (1. Tochtergeneration) wurden wieder untereinander gekreuzt. Er untersuchte, wie oft verschiedene Merkmalsausprägungen in der 2. Tochtergeneration auftraten.

Die ersten Versuchsreihen lieferten bei dominant-rezessivem Erbgang folgende Ergebnisse,:

(1) Gestalt der Samen: Von 7324 Samen waren 5474 rund oder rundlich und 1850 kantig.
(2) Färbung der Samen: Von 8023 Samen waren 6022 gelb und 2001 grün.
(3) Farbe der Samenschalen: Von 929 Samen hatten 705 violettrote Blüten und graubraune Samenschalen und 224 weiße Blüten und weiße Samenschalen.

Soweit die Daten aus Griesel/Postel(2003). Weitere Versuche zur Färbung der Samen werden bei Lambacher(1988) und bei Ineichen(1984) angegeben.

Wir betrachten in den folgenden Überlegungen vor allem Mendels Beobachtungen zur Gestalt der Samen. Die Auswertung zu den anderen Beobachtungen kann analog erfolgen und bleibt den Leserinnen und Lesern als Übung überlassen.

3 Standortbestimmung

Die Lernenden der 10. Klasse und auch die des Leistungskurses der gymnasialen Oberstufe haben bereitwillig meinen Impuls aufgegriffen, sich mit Gregor Mendel zu beschäftigen. Sie haben Material aus dem Biologieunterricht, aus Büchern und auch aus dem Internet zusammengetragen. Alle hatten eine Bemerkung aus dem Biologieunterricht in Erinnerung, es könne etwas faul an den Daten sein, weil diese zu gut zur Theorie passen. Aber auf meine Frage, wie wir denn untersuchen wollen oder woran wir erkennen können, ob Daten zu gut zu einer Theorie passen, und vor allem, ob sie zu gut passen, kamen zwar Gesichtspunkte wie zum Beispiel „Wir müssen bewerten, ob der Abstand von Messwerten zu Theoriewerten zu gering ist." oder „ob die Wahrscheinlichkeit zu klein ist". Sie wurden aber alle von den Schülerinnen und Schülern verworfen. „Damit können wir doch keine Datenmanipulation feststellen." Doch es breitete sich keine Ratlosigkeit aus, weil wir kein Kriterium finden können, das uns bei der Entscheidung hilft, ob die Daten „frisiert" sind oder nicht. Schließlich formuliert Linda einen neuen Impuls: „Theorie und Messwerte passen gut zusammen. Ich möchte sehen, was sich alles aus Mendels Daten entnehmen lässt." Und Jonas fügt verschmitzt lächelnd an: „Vielleicht, wer weiß, finden wir doch noch Hinweise, ob die Daten „frisiert" sind oder nicht". Die Lernenden im Leistungskurs sehen es genauso, wie es die Schülerinnen und Schüler der 10. Klasse ausgedrückt haben. Ich bin in beiden Lerngruppen nicht traurig oder gar enttäuscht über diese Änderung der Blickrichtung; denn ich halte es für wichtig, dass Lernende die Vielfalt der stochastischen Methoden kennen, einschätzen und sinnvoll anwenden können. Also formuliere ich als Arbeitsauftrag, es sollen Gesichtspunkte zur Auswertung der Mendelschen Daten entwickelt werden. Die Lernenden setzen sich in Gruppen zusammen. Für mich ist es interessant, welche Gesichtspunkte die einzelnen Gruppen interessieren. Es entwickeln sich unterschiedliche Sichtweisen, die dann im Plenum vorgestellt und diskutiert werden. Diese Gesichtspunkte werden in den folgenden Abschnitten der Reihe nach vorgestellt.

4 Beurteilung der Abweichung

In den Lerngruppen werden zunächst die drei Bedingungen einer Bernoullikette diskutiert:

1. Es handelt sich um einen 7324-stufigen Zufallsversuch. Diese Voraussetzung wird akzeptiert.
2. Wir unterscheiden immer nur zwischen zwei Ergebnissen, nämlich kantig und nicht-kantig. Kann man in der Praxis beim Auswerten der Beobachtungen immer so scharf unterscheiden? Ein ernstes Problem, aber gegen die mathematische Modellierung erheben sich keine Einwendungen.
3. Die Wahrscheinlichkeit für kantige Samen ist immer konstant. Im Modell beträgt sie 0,25. Können wir diese Bedingung der Unabhängigkeit bei der Vererbung voraussetzen? Hier muss der Biologielehrer helfen, und wir geben ihm diesen Impuls zurück. Wir nehmen diese Voraussetzung zunächst einmal als gegeben an.

Wir wollen die Auswertungen also im Modell einer Binomialverteilung durchführen. Wir merken uns die geäußerten Bedenken und wollen am Ende der Unterrichtsreihe auf diese Probleme bei der Kritik an der Modellierung wieder zurückkommen.

Ausgangspunkt der Überlegungen einer Gruppe ist, dass Gregor Mendel eine Theorie hat. Die Lernenden fragen, ob das Beobachtungsergebnis zu dieser Theorie passt, oder ob die Theorie geändert werden muss. Wie kann ich das Beobachtungsergebnis $k = 1850$ kantige Samen beurteilen, wenn $p = 0{,}25$ und $n = 7324$ vorgegeben sind?

Die absolute Abweichung des beobachteten Ergebnisses 1850 vom Erwartungswert $1831 = 7324 \cdot 0{,}25$ beträgt 19. Die Beobachtung liegt sehr nahe am Erwartungswert. Wie müssen wir diese geringe Abweichung bewerten? Viele Schüler berechnen spontan gerne Einzelwahrscheinlichkeiten. Sie erhalten zum Beispiel für $P(X = 1850)$, wobei die Zufallsgröße X die Anzahl der kantigen Samen zählt, 0,0094. Mendel hat also ein Ergebnis erhalten, das in noch nicht einmal 1 % aller Fälle eintritt, das also sehr selten ist. Im Vergleich mit $P(X = 1831) = 0{,}01076$, der größten Wahrscheinlichkeit dieser Verteilung, oder auch mit anderen Einzelwahrscheinlichkeiten, sehen die Lernenden auch, wie sich die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 auf einzelne der in diesem Fall 7325 verschiedenen Ergebnisse aufteilt. Die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse sind höchstens 0,01076, also sind alle Ergebnisse sehr selten. Wir halten in der Diskussion fest, dass Einzelwahrscheinlichkeiten uns hier nicht weiterhelfen, und dass selten oder sogar sehr selten kein

Grund ist, auf Datenmanipulation oder auf eine gute Übereinstimmung von Theorie und Beobachtung zu schließen.

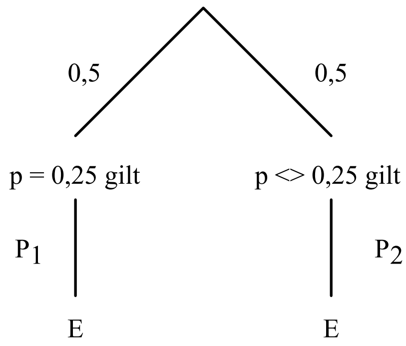
Das gilt auch für die Überlegungen einer anderen Gruppe. Dort werden die drei Versuchsreihen betrachtet. Die Lernenden stellen sich dies als dreistufigen Versuch vor und stellen die Ergebnisse durch einen Weg in einem dreistufigen Baumdiagramm dar. Für die drei Merkmale (Gestalt und Färbung der Samen sowie Farbe der Samenschalen) erhalten sie nach den in 2 aufgeführten Daten: $P \approx 2{,}4 \cdot 10^{-6}$. Die Unabhängigkeit der Versuche wird wieder angesprochen, jetzt nicht in Bezug auf die Vererbung von Generation zu Generation, sondern darauf, ob zwischen den einzelnen Experimenten vielleicht Abhängigkeiten bestehen. Der Biologielehrer bekommt hier gutes Futter für seinen Unterricht.

Eine andere Gruppe fragt: „Welche Abweichungen sind normal, bei welchen müssen wir misstrauisch werden?“ Hier entwickeln die Lernenden die Idee, einen Bereich um den Erwartungswert abzustecken, in dem wir die Ergebnisse hauptsächlich erwarten. Die Lernenden sehen diesen Bereich symmetrisch um den Erwartungswert herum. Zunächst sind die Mitglieder dieser Gruppe enttäuscht, sie haben nur eine Idee, aber kein Ergebnis wie die anderen. Aber im Plenum zeigt sich, was sich aus dieser Idee entwickeln lässt. Wir addieren die Einzelwahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse dieses Bereichs und fragen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir eine Abweichung von höchstens 19 vom Mittelwert 1831 erhalten, wenn $p = 0{,}25$ und $n = 7324$ ist. Mit unseren TI-Rechnern erhalten wir unter Verwendung des Befehls „biniwkt“ (in der deutschen Version) $P(1812 \le X \le 1850) \approx 0{,}40$. Das bedeutet, dass rund 40 % aller Daten in diesem Bereich liegen, aber fast 60 % eine noch größere Abweichung von μ haben. Die Abweichung 19 liegt also sehr dicht am Erwartungswert, Fisher behauptet „zu dicht“. Für eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von 90 % oder mehr müssen wir also noch sehr viel mehr Einzelwahrscheinlichkeiten, deren Ergebnisse weiter von μ entfernt liegen als 1850, hinzunehmen. Damit ist eine erste Klärung auch ohne einen ausführlichen klassischen Alternativtest bereits erfolgt. Wesentliches Ergebnis dieser Diskussion ist, dass wir zu Bereichswahrscheinlichkeiten übergehen müssen, wenn wir Ereignisse als außergewöhnlich selten einstufen und damit in Frage stellen wollen.

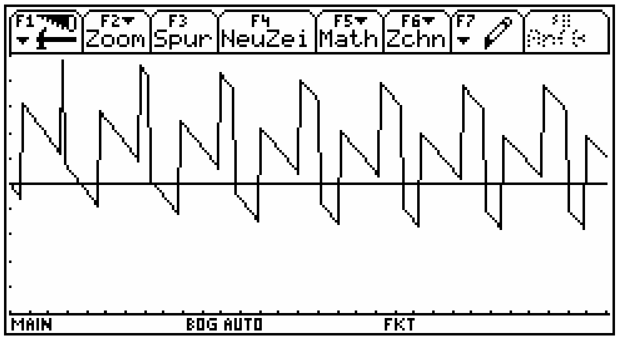
In der gymnasialen Oberstufe haben wir eine weitere Möglichkeit der Beurteilung. Will man die absolute Abweichung relativ bewerten, nimmt man als Vergleichsmaßstab die Standardabweichung σ. Den Radius r einer $r \cdot \sigma$-Umgebung um den Mittelwert μ, bei der der beobachtete Wert auf dem Rand der Umgebung liegt, berechnet man über die Gleichung $r = \left| \frac{k - n \cdot p}{\sigma} \right|$. Man erhält für $k = 1850$, $n = 7324$ und $p = 0{,}25$: $r \approx 0{,}5127$. Und jetzt kommt unsere Sicherheitsvorstellung ins Spiel. Wenn ich eine Sicherheit von 99 % haben will, muss ich wesentlich größere Abweichungen als 19 als rein zufällig unter $p = 0{,}25$ entstanden tolerieren, und zwar bis zum 2,58-fachen von σ. Das Beobachtungsergebnis 1850 liegt mitten in solchen Umgebungen. Damit weiß ich, dass der klassische Alternativtest immer nur zur Beibehaltung von $p = 0{,}25$ führt, und dass ich bei starkem Sicherheitsbedürfnis jede Sicherheitswahrscheinlichkeit, wie groß auch immer ich sie fordere, auf meiner Seite habe. Genau diese Einsicht ist mir wichtiger als das rein schematische Ausführen eines klassischen Alternativtests. „War Fisher vielleicht sauer, weil er mit seinen neu entwickelten Testverfahren Mendel nichts anhaben konnte?“ Interessant ist die Frage von Lukas schon. Schließlich wähle ich für einen Alternativtest gern Ergebnisse, die etwas mehr als 2σ vom Mittelwert μ, aber weniger als 3σ entfernt sind. Die Nullhypothese wird dann bei einem Signifikanzniveau von 5 % verworfen, muss aber bei einem 1 %-Niveau beibehalten werden. So kann man die Problematik des klassischen Alternativtests deutlich machen.

5 Testen nach Bayes

Einige in meiner Lerngruppe haben längst ganz andere Überlegungen angestellt. Testen nach Bayes ist eine sinnvolle Fortsetzung der mit dem Baustein „Rückwärtiges Schließen im Baumdiagramm“ der neuen niedersächsischen Richtlinien in Klasse 9 gemachten Erfahrungen. Die Lernenden vertrauen diesem Verfahren, weil es die ihnen wichtige Frage beantwortet, welche Wahrscheinlichkeiten den Hypothesen zugeordnet werden können. Schauen wir uns an, welche Erfahrungen sie gemacht haben. Es gibt zwei Hypothesen: H_1: $p = 0{,}25$ sowie H_2: $p \neq 0{,}25$. Im folgenden Baumdiagramm werden die Überlegungen dargestellt:



Stellen wir uns einen neutralen Gutachter vor, der vor der Umfrage, also a priori beide Hypothesen gleich bewertet. Dies wird in der ersten Stufe des obigen Baumdiagramms dargestellt. Nun erfährt der Gutachter, dass 1850 von 7324 Samen kantig sind. Wie er auf dieses Ergebnis hin (a posteriori) die beiden Hypothesen bewertet, wird nun dargestellt. Die Wahrscheinlichkeit P_1, dass 1850 von 7324 Samen kantig sind, falls deren Anteil p = 0,25 ist, ist: $P_1 = \binom{7324}{1850} \cdot 0{,}25^{1850} \cdot 0{,}75^{5474} \approx 0{,}0094$. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit P_2, dass 1850 von 7324 Samen kantig sind, falls p variabel und p $\neq 0{,}25$ ist: $P_2 = \binom{7324}{1850} \cdot p^{1850} \cdot (1-p)^{5474}$. Im obigen Baumdiagramm wird die gerade beschriebene Situation dargestellt: Es ist ein Ereignis E („1850 von 7324 Samen sind kantig“) eingetreten, dessen Wahrscheinlichkeit $P(E) = 0{,}5 \cdot P_1 + 0{,}5 \cdot P_2$ beträgt. Der Pfad mit der Hypothese H_1 hat an dieser Wahrscheinlichkeit den Anteil $\frac{0{,}5 \cdot P_1}{0{,}5 \cdot P_1 + 0{,}5 \cdot P_2} = \frac{P_1}{P_1 + P_2}$, der Pfad mit der Hypothese H_2 den Anteil $\frac{P_2}{P_1 + P_2}$. Stellen wir uns eine Waage mit zwei Waagschalen vor. A priori war die Waage im Gleichgewicht. A posteriori neigt sie sich auf die Seite des größeren Gewichts. Und welche das sein wird, lesen wir am Graphen ab, den wir uns von einem graphikfähigen Taschenrechner darstellen lassen (alle Bildschirmgraphen wurden mit dem Voyage 200 erstellt):



Auf der x-Achse lassen wir alle Wahrscheinlichkeiten p im Intervall [0,23;0,27] auftragen, auf der y-Achse $P = \frac{P_1}{P_1 + P_2} = P(H_1)$. Das Maximum des Graphen liegt an der Stelle $p = \frac{1850}{7324} \approx 0{,}25259$. Es gilt $P(H_1) \approx 0{,}53274$. Entsprechend errechnet man $P(H_2) \approx 0{,}46726$. Wer den sowohl im Zähler als auch im Nenner von $\frac{P_1}{P_1 + P_2}$ bzw. $\frac{P_2}{P_1 + P_2}$ vorkommenden Binomialkoeffizienten wegkürzt, erlebt bei diesem Problem eine unangenehme Überraschung. Der Taschenrechner verweigert den Dienst, die Quotientenberechnung endet mit einer Fehlermeldung. Die Erklärung liegt auf der Hand: $0{,}25^{1850} \cdot 0{,}75^{5474}$ ist so klein, dass der Taschenrechner die Potenzprodukte im Zähler und im Nenner auf 0 rundet und ein Quotient $\frac{0}{0}$ ist eben nicht definiert. Wenn das Berechnen der Binomialwahrscheinlichkeiten so programmiert ist, dass sich die beiden Tendenzen (Runden auf Null bei den Potenzen, Overflow beim Binomialkoeffizienten) kompensieren, gelingt es, die Binomialwahrscheinlichkeit auch für einen solch großen Stichprobenumfang exakt auszurechnen. Weitere Informationen zu diesem Problem wie auch zu dessen Lösung findet man in Wirths(1998). Die entsprechende Funktion der TI-Rechner „binewkt“ (bei der Spracheinstellung auf „Deutsch“) erfüllt diese Anforderungen. Im Anhang wird die Eingabe für y_1 beim Voyage 200 angegeben[1]. Und dann gelingen sowohl das Berechnen der Wahrscheinlichkeiten als auch das Plotten des Graphen.

Wenn ich eine Wette auf eine Wahrscheinlichkeit p $\neq 0{,}25$ abschließen will gegen einen Partner, der auf p = 0,25 setzt, dann habe mich meine beste Chance, wenn ich mich für $p = \frac{1850}{7324}$ entscheide. Dann stehen die Chancen in etwa 53:47 für mich. Meine

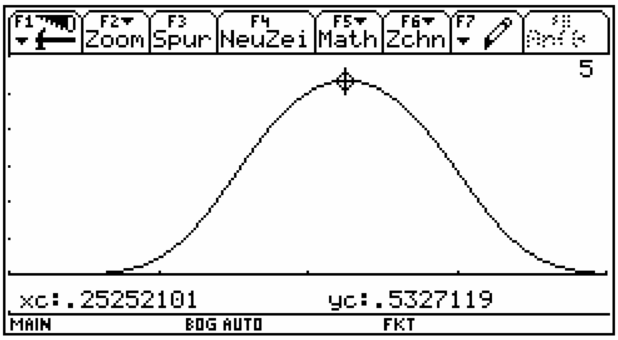
[1] Siehe die Anmerkungen am Ende des Aufsatzes

Schülerinnen und Schüler kommentieren dieses Ergebnis: „Da kann man doch genauso gut eine leicht unsymmetrische Münze werfen und die Münze entscheiden lassen, ob wir p = 0,25 oder p = $\frac{1850}{7324}$ wählen.“ Solch ein Ergebnis befriedigt sie gar nicht. Aber warum sollen wir in solch einer Situation die einfach zu interpretierende und zu handhabende Wahrscheinlichkeit 0,25 gegenüber einer „unbequemeren“ Dezimalzahl, die vielleicht nach jedem neuen Experiment wieder modifiziert werden muss, überhaupt aufgeben?

6 Kann man aus den Daten Theorie entwickeln?

Die Überlegungen des letzten Abschnitts können bereits in Klasse 10 gemacht werden. Wenn in der gymnasialen Oberstufe die Lernenden mit σ-Umgebungen um μ vertraut sind, können wir noch einen anderen Gesichtspunkt einbringen. Wir setzen nun aber voraus, dass Mendel noch keine Theorie hatte, auch wenn das den historischen Fakten nicht entspricht. Wir fragen, welche möglichst einfache Wahrscheinlichkeit Mendel seiner Theorie zugrunde legen kann, wenn man von seinen Beobachtungsergebnissen ausgeht. Welche Wahrscheinlichkeiten p sind mit k = 1850 und n = 7324 verträglich, wenn ich eine sehr große Sicherheitswahrscheinlichkeit, zum Beispiel 0,99, fordere?

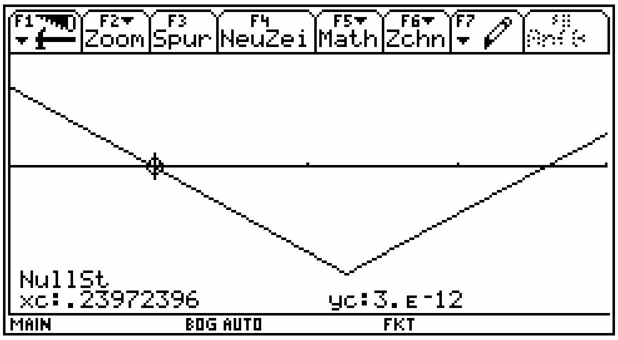
Die σ-Regeln besagen, dass die Sicherheitswahrscheinlichkeit für eine 2,58σ-Umgebung um μ in etwa 0,99 beträgt. Aber statt σ-Regeln anzuwenden, nutzen wir die Fähigkeiten unseres graphikfähigen Taschenrechners aus, Sicherheitswahrscheinlichkeiten nicht nur berechnen, sondern auch graphisch darstellen zu können. Wenn wir einen TI-84 Plus, TI-89 oder Voyage 200 einsetzen, gelingt dies in angemessener Zeit, während man beim TI-83 und TI-92 auf den Graphen viel zu lange warten muss und allenfalls eine Wertetafel bekommt.



Im obigen Bild werden die Sicherheitswahrscheinlichkeiten für Wahrscheinlichkeiten des Konfidenzintervalls gezeichnet. Auf der x-Achse sind alle p aus dem Intervall [0,239; 0,270] abgetragen. Die Skalierungspunkte unten im Bild markieren Abstände von 0,001. Auf der y-Achse werden die zu p gehörenden Sicherheitswahrscheinlichkeiten der 2,58·σ-Umgebungen um μ aufgetragen. Hier wird

der Bereich zwischen 0,9895 und 0,9905 dargestellt. Die Punkte am linken Rand markieren einen Abstand von 0,0001.

Wir möchten alle Wahrscheinlichkeiten p berechnen, in deren r·σ-Umgebung um μ das beobachtete Ergebnis k = 1850 liegt. Wir stellen als Ansatz zur Berechnung des Vertrauensintervalls (Konfidenzintervalls) für die unbekannte Wahrscheinlichkeit p mit k = 1850, n = 7324 und r = 2,58 (für die geforderte Sicherheitswahrscheinlichkeit von 99 %) $\left|1850 - 7324p\right| \le 2{,}58 \cdot \sqrt{7324 \cdot p \cdot (1-p)}$ als Ungleichung auf. Sie besitzt als Lösungen alle p ∈ [0,239724; 0,265914]. Man kann in einer leistungsstarken Lerngruppe die Betragsungleichung Schritt für Schritt nach p auflösen. In einem Grundkurs gehe ich anders vor und gebe beim TI-Rechner ein: $y_1 = \left|1850 - 7324x\right| - 2{,}58\sqrt{7324 \cdot x \cdot (1-x)}$. Damit der Rechner den Term korrekt wiedergibt, muss ich als Variable x nehmen, die für die Wahrscheinlichkeit p steht. Dann lasse ich mir den Graphen von y_1 für x zwischen 0,23 und 0,27 plotten.



Nun setze ich die Rechnerroutinen zur Bestimmung der Nullstellen ein und erhalte das oben angegebene Intervall für p, optisch klar erkennbar im Graph als der Bereich, in dem y_1 unterhalb der x-Achse verläuft. An diesem Konfidenzintervall für p sehen wir, welche Alternativwahrscheinlichkeiten bei gleich großem Sicherheitsbedürfnis gelten und auch, welche nicht gelten können. $p = \frac{1}{4}$ ist der einfachste Bruch mitten im Konfidenzintervall. Den sollte Gregor Mendel für seine Theorie wählen und erst dann aufgeben, wenn neue Experimente eine Änderung zwingend erforderlich machen.

Zusätzlich wurde die Gerade mit $y = 0{,}99$ eingezeichnet. Wir sehen, dass und wie die Sicherheitswahrscheinlichkeiten um 0,99 schwanken. Im Anhang wird in den Anmerkungen der Term angegeben, der bei y_1 eingegeben wird.

7 Abschluss

Die Daten aus Lambacher (1988) und Ineichen (1984) über die Versuche zur Farbe der Samen werden in diesen Schulbüchern mit einem Arbeitsauftrag zur Bestimmung von relativen Häufigkeiten versehen. Bei Ineichen wird den Lernenden auf Seite 68 mit der Bemerkung „relative Häufigkeiten, die eine auffallende Stabilität zeigen" auch ein interessanter Kontext aufgezeigt, in den die gesamte Auswertung der Tabelle gestellt werden kann. Daher soll auf diese Möglichkeit, die bereits mit dem niedersächsischen Baustein „Prognosen" dann unterrichtet werden kann, wenn die Lernenden mit Brüchen und Dezimalzahlen umgehen können, hier auch noch explizit hingewiesen werden.

Ich habe mich entschieden, elementare Methoden einzusetzen, die derzeit überall von der 10. Klasse bis zum Abitur unterrichtet werden können, und die auch nach einer Verkürzung der Schulzeit von 13 auf 12 Schuljahre weiter zum Standardrepertoire eines jeden Stochastikunterrichts gehören sollten. Daher verzichte ich hier auf den Chi-Quadrat-Test, obwohl er historisch gesehen gerade an den Mendelschen Daten ausgefeilt und erprobt worden ist. Aber wer den Chi-Quadrat-Test einsetzt, sollte bedenken, dass die Anweisung des amerikanischen Biometrikers J. A. Harris, zum Auswerten muss man „nur eine einfache Aufgabe bewältigen: Chi-Quadrat ausrechnen und den Wert für P in Eldertons Tabelle nachschlagen" (zitiert nach Gigerenzer(1999), S. 173) vielleicht für Anwender reicht. In einer allgemeinbildenden Schule muss man mehr tun als nur ein Kochrezept befolgen, und das vielleicht auch nur unverstanden. Hier ist Einsicht, Durchblick und Überblick gefordert.

Hat Gregor Mendel seine Daten „frisiert"? Es ist nicht belegt, dass ihm jemand beim Auszählen über die Schulter geblickt hat. Und Fishers datenmanipulierender Assistent gehört wohl auch ins Reich der Phantasie. Die Frage hat meine Lerngruppen die ganze Zeit beschäftigt, auch wenn in den vorigen Abschnitten nichts davon erwähnt wird. Natürlich wird ein Statistiker misstrauisch, wenn beobachtete Daten zu gut mit der Theorie übereinstimmen, vor allem dann, wenn die Daten im Sinne eines „experimentum crucis" die Theorie stützen und nicht ins Wanken bringen sollen. Wenn von 8023 Samen 2001 grün sind, ist das sehr nahe an den erwarteten Werten, ein „Fast-Volltreffer", wie meine Schülerinnen und Schüler formuliert haben. Fishers Misstrauen ist den Lernenden verständlich. Wer würde also nicht solch eine Frage zumindest als Arbeitshypothese stellen und mathematische Verfahren daran erproben wollen?

Wir können Gregor Mendel nicht mehr befragen. Aber wir können nachlesen, wie er mit seinen Daten umgeht. Im Internet[2] finden wir seine Arbeit „Versuche über Pflanzenhybriden" als Quellentext. Hier finden wir Mendels Auswertung von 7 Versuchen. Er gibt die Verhältnisse mit 2,96:1, 3,01:1, 3,15:1, 2,95:1, 3,14:1 bzw. 2,84:1 an. In unserer Sprache berechnet er damit also relative Häufigkeiten. Auf der anderen Seite finden wir, dass Mendel vom Durchschnittverhältnis 3:1 redet. „Es gilt das ohne Ausnahme für alle Merkmale, welche in die Versuche aufgenommen waren." Hier findet für mich die Modellbildung bei Gregor Mendel statt; denn diesen Mittelwert, von Mendel Durchschnittsverhältnis genannt, kann ich in der Theorie als Wahrscheinlichkeit interpretieren. Gregor Mendel gibt auch an, wie weit seine Beobachtungswerte variieren, er gibt extreme Verteilungen, die eben nicht der Theorie entsprechen an, und schreibt, dass auch solche Versuche „wichtig für die Feststellung der mittleren Verhältniszahlen" sind. Die sorgfältige Beschreibung und Dokumentation seiner Versuche erwecken nicht den Eindruck, hier sei etwas manipuliert worden. Mendels Darstellung lässt bei Lernenden Fragen über Einzelheiten und Grundlagen seiner Versuche aufkommen. Der Biologielehrer hat reichlich Gelegenheit zur Klärung.

In unseren mathematischen Untersuchungen haben wir gesehen, auf welch schwankendem Boden („wie auf Moorboden", so die Lernenden) wir uns bewegen, wenn wir Gregor Mendels Daten auswerten und die Ergebnisse unserer Untersuchung interpretieren wollen. Den Standpunkt „Die beobachteten Werte sind nahe an den erwarteten Werten." können wir ohne Skrupel einnehmen, sogar eine Verschärfung auf „sehr nahe". Aber sind die beobachteten Werte tatsächlich „zu nahe an den erwarteten Werten"? Dies jedenfalls ist die Behauptung von Sir Ronald Fisher. Wie kann man das „zu nahe" nachweisen? Wir haben keine Möglichkeit gefunden, dem nachzugehen. „War Fisher vielleicht sauer, weil er mit seinen neu entwickelten Testverfahren Mendel nichts anhaben konnte?" Die Frage von Lukas kommt wieder ins Gespräch. Wenn wir eine der Hypothesen „Gregor Mendel hat manipuliert" oder „Gregor Mendel hat nicht manipuliert" annehmen und verteidigen wollen, müssen wir uns nach Gefühl und Laune entscheiden. Wir haben keine überzeugenden Gründe gefunden, um Gregor Mendel beschuldigen zu können, im Sinne von „corriger la fortune" die kantigen Samen gezählt oder die anderen Daten erhoben zu haben, zum Glück für Gregor Mendel. Für ihn spricht auch die sorgfältige und ausführliche Beschreibung und Dokumentation seiner Versuche und Ergebnisse, wobei er auch Einzelergebnisse darstellt, die für sich allein genommen nicht die Theorie unterstützen.

Aber der Verdacht, Gregor Mendel könne doch manipuliert haben, baut einen Spannungsbogen auf, der eine ansonsten staubtrockene Angelegenheit geheimnisvoll und spannend erscheinen lässt, und die Phantasie der Lernenden anregt, so dass sie bereitwillig Gelerntes erproben wollen und dabei auch Neues entdecken können.

Wer sich näher mit Gregor Mendel, seinem Werk und der Diskussion über sein Schaffen, die bis heute anhält, informieren will, findet auch im Internet interessantes Material. Ich nenne zwei weitere sehr informative Seiten:
http://ipp.boku.at/pz/men_vo.htm
http://mendel.imp.univie.at/mendeljsp/biography/biography.jsp

[2] siehe in den Anmerkungen

Literatur

Fisher, R. A. (1936): Has Mendels work been rediscovered? Annals of Science 1936, 1:115-137

Gigerenzer, G. u. a. (1999): Das Reich des Zufalls. Heidelberg: Spektrum 1999

Griesel/Postel (2003): Elemente der Mathematik, LK Stochastik. Hannover: Schroedel 2003

Ineichen, R. (1984): Stochastik. Göttingen: Vandenhoeck&Ruprecht 1984

Lambacher u. a. (1988): Stochastik Leistungskurs. Stuttgart: Klett 1988

Wirths, H. (1998): Binomialwahrscheinlichkeiten mit dem Computer. SiS 1/1998, S. 43-54

Anmerkungen

1. Beim Testen nach Bayes wird $y_1 = \frac{\text{tistat.binewkt}(7324, X, 1850)}{\text{tistat.binewkt}(7324, X, 1850) + \text{tistat.binewkt}(7324, 0.25, 1850)}$ beim Voyage 200 zum Zeichnen des in Abschnitt 5 abgebildeten Graphen eingegeben.
2. Die Sicherheitswahrscheinlichkeit $P(\mu - 2{,}58\cdot\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\cdot\sigma)$ wird durch die Anweisung tistat.biniwkt(7324, X, RundGrö(7324*X - 2.58* $\sqrt{7324 * X * (1-X)}$),
   Vorkomma(7324*X + 2.58* $\sqrt{7324 * X * (1-X)}$)) berechnet.
   Dieser Term wurde im Voyage 200 bei y_1 zum Zeichnen des letzten Graphen in Abschnitt 6 eingegeben.
3. Unter der Adresse http://www.biologie.uni-hamburg.de/b-online/d08_mend/mendel.htm finden wir Gregor Mendels Arbeit „Versuche über Pflanzenhybriden“.

Anschrift des Verfassers

Helmut Wirths
Cäcilienschule Oldenburg
Haarenufer 11
26122 Oldenburg
e-mail: helmut.wirths@uni-oldenburg.de

Presse-ΣΠΛΙΤΤΕΡ (1)

18. März 2004

Araber heiratete 58 Frauen: Scheidung per Los

Riad. Saleh el Sajari (64), Geschäftsmann in Saudi-Arabien, hat in den vergangenen 50 Jahren insgesamt 58 Frauen geheiratet. Da ihm das islamische Gesetz „nur“ vier Ehefrauen gleichzeitig erlaubt, zieht er jedes Mal, wenn er eine Neue findet, ein Los, um zu entscheiden, welche der vier Angetrauten er für die neue Ehe verstoßen soll. Der Zeitung „Al-Sharq Al-Awsat“ berichtete der ehemalige Schäfer, seine älteste Frau sei 40, die jüngste 13 Jahre alt.