

Zwei Arten von Messfehlern

LAURA PISKULIC, LILIANA RACCA, HEBE BOTTAI UND MERCEDES LEIVA, ARGENTINIEN

Zusammenfassung: In den Experimentalwissenschaften sind zwei Messfehler gut auseinanderzuhalten: Systematische Fehler und Zufallsfehler. In diesem Aufsatz wird ein operativer Zugang zu diesen Begriffen vorgestellt.

1 Notwendiges Material

Es werden vier Waagen verwendet: Zwei (B1 und B3) sind auf 0,1 mg genau, und die beiden anderen (B2 und B4) sind auf 0,01 mg genau. B1 und B2 sind richtig kalibriert, wohingegen B3 und B4 einen systematischen Fehler von +2 mg erzeugen. Es wird ein Massestück gewogen, das nach Angaben des Herstellers 500 mg wiegt.

2 Die Schüleraktivität

Die Schüler sollen in Gruppen das Massestück auf jeder der Waagen jeweils 0-mal vermessen. Hier die Ergebnisse und die graphische Aufbereitung:

Messung Nr.	Massen in mg			
	B1	B2	B3	B4
1	500,0	500,01	502,0	501,99
2	499,9	500,00	502,2	502,00
3	500,1	499,98	501,9	501,98
4	500,0	499,99	502,1	502,01
5	500,0	500,00	502,0	502,00
6	499,9	500,01	502,2	501,99
7	500,1	499,99	502,1	501,99
8	499,9	500,00	501,9	502,01
9	500,0	499,99	502,1	502,00
10	499,8	500,02	502,0	501,99

Tabelle 1

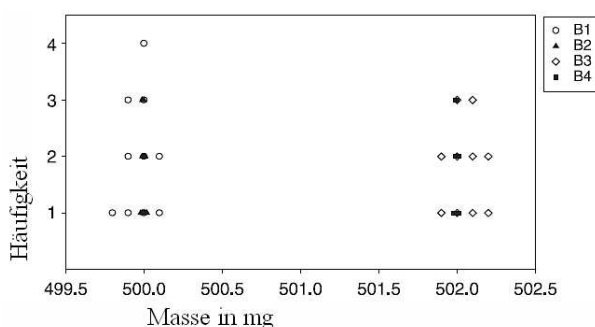


Bild 1

Anschließend berechnen die Gruppen Gesamtfehler, systematische Fehler (Kalibrierungsfehler der Waage) und zufällige Fehler. Dabei wird die Herstellerangabe (500 mg) als der wahre Wert angesehen (obwohl man bei wirklichen Messungen nie

so vorgehen könnte, da der wahre Wert unbekannt ist).

Der systematische Fehler ist bei B1 und B2 in der Nähe von Null und bei B3 und B4 in der Nähe von 2 mg.

Andererseits ist die Standardabweichung als Maß für das Ausmaß von Zufallsfehlern bei B2 und B4 kleiner als bei B1 und B3.

Zusammenfassend gilt also:

- Bei B2 sind der systematische und der Zufallsfehler bei Messungen beide klein.
- Bei B1 ist der systematische Fehler klein und der Zufallsfehler groß.
- Bei B3 sind beide Arten von Fehlern groß.
- Bei B4 ist der systematische Fehler groß und der Zufallsfehler klein.

Die Tabelle 2 zeigt die Berechnungen. Die Standardabweichungen wird aus den Zufallsfehlern berechnet. (Anmerkung des Heftherausgebers: Das Original ist hier fehlerhaft. Es ist hier die Standardabweichung mit dem Nenner n statt $n-1$ zu nehmen, da es sich um die Standardabweichung der Gesamtpopulation handelt und nicht um einen auf einer n -elementigen Stichprobe basierten Schätzer.)

3 Modellierung der Messwerte und Residuenanalyse

Man nimmt an, dass die Größe des systematischen und des Zufallsfehlers noch unbekannt ist. Die Messwerte werden üblicherweise durch die Gleichung

$$y = 500 + \varepsilon \quad \text{mit} \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

modelliert. Dabei beschreibt ε den Zufallsfehler, und σ^2 ist ein Maß für die Präzision; sie wird für alle 4 Waagen als gleich angenommen.

Die Schüler werden aufgefordert, dies Modell durch Residuenanalyse zu begutachten.

Bild 2 enthält die Residuenplots.

Sie zeigen: B1 und B2 haben offenbar keinen systematischen Fehler, wogegen B3 und B4 einen systematischen Fehler von +2 mg nahelegen.

	Masse	Gesamtfehler	Mittelwert	Systematischer Fehler	Zufallsfehler	Standard- abweichung
B1	500,0	0,0	499,97	-0,03	0,03	0,09
	499,9	-0,1			-0,07	
	500,1	0,1			0,13	
	500,0	0,0			0,03	
	500,0	0,0			0,03	
	499,9	-0,1			-0,07	
	500,1	0,1			0,13	
	499,9	-0,1			-0,07	
	500,0	0,0			0,03	
	499,8	-0,2			-0,17	
B2	500,01	0,01	499,999	-0,001	0,011	0,011
	500,00	0,00			0,001	
	499,98	-0,02			-0,019	
	499,99	-0,01			-0,009	
	500,00	0,00			0,001	
	500,01	0,01			0,011	
	499,99	-0,01			-0,009	
	500,00	0,00			0,001	
	499,99	-0,01			-0,009	
	500,02	0,02			0,021	
B3	502,0	2,0	502,05	2,05	-0,05	0,10
	502,2	2,2			0,15	
	501,9	1,9			-0,15	
	502,1	2,1			0,05	
	502,0	2,0			-0,05	
	502,2	2,2			0,15	
	502,1	2,1			0,05	
	501,9	1,9			-0,15	
	502,1	2,1			0,05	
	502,0	2,0			-0,05	
B4	501,99	1,99	501,996	1,996	-0,006	0,009
	502,00	2,00			0,004	
	501,98	1,98			-0,016	
	502,01	2,01			0,014	
	502,00	2,00			0,004	
	501,99	1,99			-0,006	
	501,99	1,99			-0,006	
	502,01	2,01			0,014	
	502,00	2,00			0,004	
	501,99	1,99			-0,006	

Tabelle 2

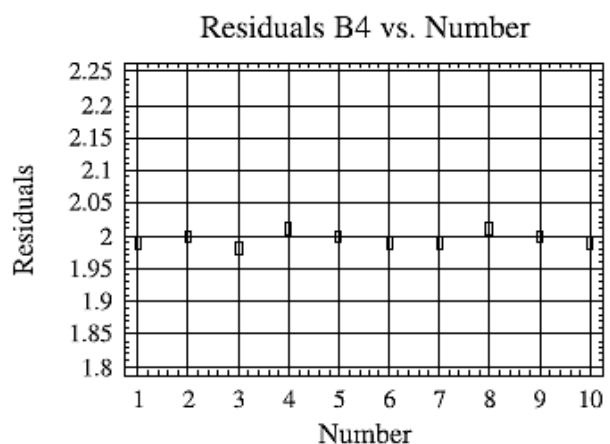
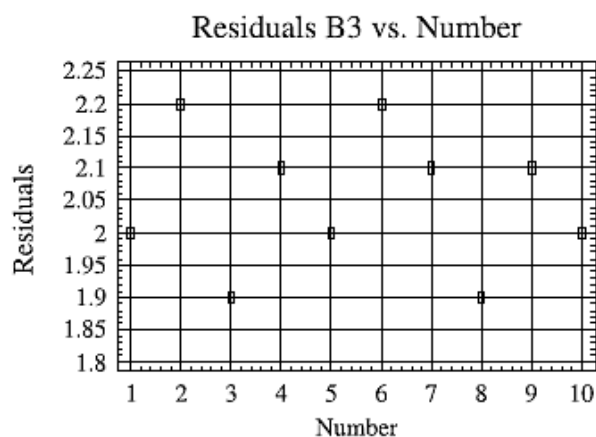
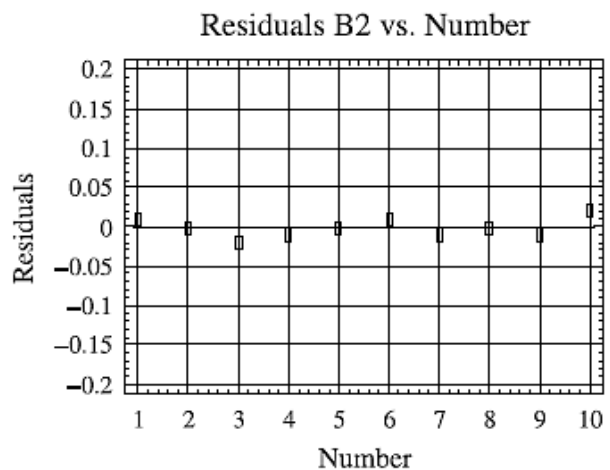
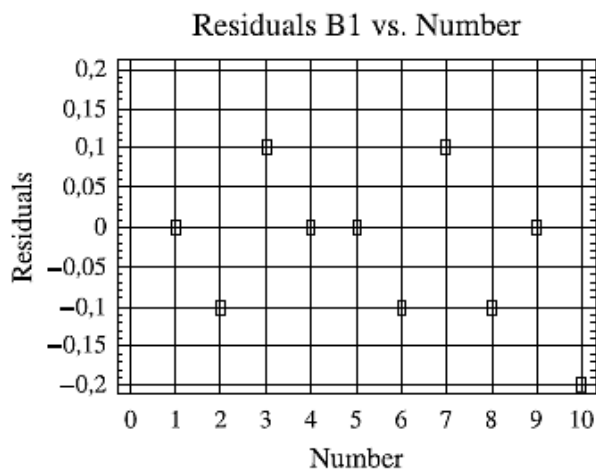


Bild 2

Auch die geringe Schwankung des Zufallsfehlers in B2 und B4 ist offensichtlich.

Da das erste Modell der Messwerte nicht global aufrecht erhalten werden kann, werden die Schüler aufgefordert, für jede Waage ein besseres Modell aufzustellen und seine Angemessenheit anschließend zu überprüfen.

Tabelle 3 zeigt die Ergebnisse:

Waage	Modellgleichung	
B1	$y = 500 + \varepsilon$	$\varepsilon \sim N(0, \sigma_1^2)$
B2	$y = 500 + \varepsilon$	$\varepsilon \sim N(0, \sigma_2^2)$
B3	$y = 500 + 2 + \varepsilon$	$\varepsilon \sim N(0, \sigma_1^2)$
B4	$y = 500 + 2 + \varepsilon$	$\varepsilon \sim N(0, \sigma_2^2)$

Tabelle 3

Aufgrund der Beschreibung der Waagen sollte man $\sigma_1 = 0,1 \text{ mg}$ und $\sigma_2 = 0,01 \text{ mg}$ wählen. Na-

türlich ist es wichtig, dass die Schüler den Bezug zu den Werten in Tabelle 2 herstellen.

4 Schlussbemerkung

Die hier vorgestellte Aktivität kann leicht auf den Biologie-, Chemie- oder Physikunterricht übertragen werden. Schüler sind in allen Phasen der Messung aktiv beteiligt: Von der Erhebung der Messwerte bis zur Analyse und Interpretation der Ergebnisse. Dadurch muss der Unterschied zwischen systematischem und Zufallsfehler deutlich vermittelt werden.

Bei der Übersetzung hat der Heftherausgeber die Originalquelle gekürzt und bearbeitet.

Originalquelle:

Accuracy and Precision in Measurements: Two Complementary Approaches. Teaching Statistics. Vol 28 (1), Spring 2006, 14 – 16.

Anschrift der Verfasser:

e-mail: mleiva@fbioyf.unr.edu.ar