Die Augensumme zweier Würfel voraussagen:

Alles nur eine Frage von Glück oder Pech?

Unterrichtsversuch zur Förderung von Wahrscheinlichkeitsüberlegungen im Mathematikunterricht der 2. Grundschulklasse mit einer geschlechterdifferenzierenden Auswertung

WOLFRAM WEUSTENFELD, LUDWIGSBURG

***Zusammenfassung**: Der folgende Unterrichtsversuch zeigt auf, dass bereits Grundschulkinder der 2. Klasse ein an natürlichen Häufigkeiten orientiertes Verständnis dafür entwickeln können, welche Augensummen beim Tippspiel mit zwei Würfeln „wahrscheinlich häufiger" bzw. „wahrscheinlich seltener" auftreten werden. Dabei sind Mädchen und Jungen in gleicher Weise in der Lage, ihre Intuition für Wahrscheinlichkeiten und für das Gesetz der großen Zahlen auszubauen und gewinnbringend anzuwenden.*

1. Einleitung

Nach einem unserer Unterrichtsversuche zur Häufigkeitsverteilung der Augensummen zweier Würfel in der 2. Klasse kam eine Schülerin zu mir und erklärte mir, dass sie „das mit der Sieben" heute Nachmittag mit ihrer Mutter noch einmal ausprobieren wolle. Auf meine interessierte Frage, was sie genau vorhabe, erklärte sie mir, dass sie zuhause 30-mal mit zwei Würfeln werfen wolle und ihrer Mutter vorschlagen werde, dass sie bei jeder gewürfelten Sieben eine Süßigkeit erhalte. Angetan von dieser aus dem Unterricht erwachsenen Spielidee konnte ich mir die pädagogische Nachfrage nicht verkneifen, warum sie gerade die Zahl Sieben als geeignet für dieses Spiel ansehe. Worauf sie mich verschmitzt anlächelte: „Na, die Sieben hat doch die meisten Möglichkeiten, wie man sie würfeln kann!"

Diese spontan vorgetragene Spielidee macht deutlich, dass die Schülerin die Inhalte unseres Unterrichtversuches so gut verstanden hat, dass sie sie sogar kreativ in einen neuen Kontext einbinden konnte. Während bei einem Würfelspiel mit einem einzigen regelmäßigen, ungezinkten 6er-Würfel jede Zahl zwischen 1 und 6 gleichwahrscheinlich auftreten kann, ist tatsächlich beim Würfelspiel mit zwei Würfeln die Wahrscheinlichkeit der Augensumme Sieben höher als die jeder anderen Augensumme. Ursächlich hierfür sind die unterschiedlichen Häufigkeiten der Augensummen zwischen Zwei und Zwölf. So gibt es z.B. sechs verschiedene Möglichkeiten, wie man mit zwei Würfeln eine Sieben würfeln kann, aber nur je eine Möglichkeit, eine Zwei oder Zwölf zu würfeln.[1]

Es war Ziel unserer Unterrichtsversuche in acht 2. Klassen in Stuttgart und Umgebung, den Schülerinnen und Schülern diesen Sachverhalt der Wahrscheinlichkeitsrechnung in möglichst einprägsamer Weise nahe zu bringen. Dabei wollten wir den Zweitklässlern nicht nur ein bloßes Faktenwissen vermitteln, sondern sie darüber hinaus in die Lage versetzen, dieses Faktenwissen in spielerischen Kontexten anzuwenden, um hierdurch die Relevanz und Merkfähigkeit des mathematischen Inhalts zu erhöhen.

Die oben angesprochene Schülerin macht durch ihre eigenständige Spielidee in besonderer Weise deutlich, dass sie dieses Lernziel erreicht hat. Doch stellt sie keineswegs eine Ausnahme dar, wie die Auswertungsergebnisse unserer Unterrichtsversuche zeigen. Nahezu Dreiviertel der 191 Zweitklässler tippten in einem Vorhersagespiel am Ende des Unterrichts auf die Sieben als die Zahl, die in 1000 Spielrunden mit zwei Würfeln am häufigsten gewürfelt werden würde. Mehr als Zweidrittel aller Kinder kreuzen darüber hinaus bei einer Auswahl von drei Alternativen die richtige Begründung für ihre Zahlenwahl an: „weil es viele Möglichkeiten gibt, diese Zahl zu würfeln" (vgl. Kap. 4).

Um unser Lernziel zu erreichen, sollten die Schülerinnen und Schüler zunächst mithilfe einer geeigneten Repräsentation die Häufigkeitsverteilung der Augensumme zweier Würfel erarbeiten und danach in einer konkreten Tippspielsituation zu strategischem Denken angeregt werden. Die Erkenntnis, dass die konkreten Würfelergebnisse im Tippspiel auffällig ungleichmäßig ausfallen, sollten die Kinder dazu anregen, nach den Ursachen für dieses „Phänomen" zu suchen, und sie schließlich dazu bringen, die zuvor erarbeitete

[1] Die Sieben ergibt sich aus: 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1, die Zwei und die Zwölf nur aus 1+1 bzw. 6+6.

Häufigkeitsverteilung in eine sinnvolle Begründung einzubeziehen. Die Tippspielsituation sollte zudem die Motivation für diese „Ursachenforschung“ verstärken, da ein begründetes Wissen um „wahrscheinlich häufiger“ auftretende Augensummen die eigenen Gewinnchancen erhöhen kann.

Dieser Abfolge entsprechen die *drei Hauptphasen* unseres Unterrichtsversuchs:

1.) Erarbeitungsphase: Das Häufigkeitsdiagramm der Augensumme zweier Würfel wird mithilfe eines Säulendiagramms aus zweifarbigen Paaren magnetischer Würfelseiten erarbeitet.

2.) Tippspielphase: Die Zweitklässler machen spielerisch die Erfahrung des ungleichmäßigen Auftretens der verschiedenen Augensummen. Ihr „Gewinnenwollen“ regt ihr strategisches Denken an: Welche Zahlen sind günstiger als andere?

3.) Verknüpfungsphase: Die Erfahrungen aus Phase 2 werden zusammengefasst und möglichst durch die Zweitklässler selbst mit den Ergebnissen aus Phase 1 verknüpft. Die neu gewonnenen Erkenntnisse werden in Transferübungen vertieft.

Als Instrument der Lernerfolgskontrolle setzten wir im Unterrichtsversuch zwei Abfragekarten ein, die jede Schülerin und jeder Schüler für sich allein ausfüllen musste. Die erste Karte wurde am Ende der Tippspielphase, die zweite, umfangreichere Karte am Ende des gesamten Unterrichtsversuchs bearbeitet. Hierbei erhielten Mädchen und Jungen die Abfragekarten in verschiedenen Farben, so dass wir bei allen Fragen eine geschlechterdifferenzierende Auswertung vornehmen konnten.
Eine geschlechterdifferenzierende Auswertung ist deshalb sinnvoll, weil ab der Pubertät Geschlechterunterschiede im Mathematikverständnis festgestellt werden können, die sich durch Phänomene des Selbstkonzepts und des Selbstvertrauens begründen lassen (vgl. STANAT/ KUNTER 2001). In der Grundschule wurden dagegen bisher keine nennenswerten Geschlechterunterschiede im Mathematikverständnis festgestellt. Auch unsere Auswertung bestätigt diesen Tatbestand: Die beteiligten Mädchen und Jungen der 2. Klasse sind durchschnittlich etwa gleich erfolgreich beim Verstehen und Anwenden der behandelten probabilistischen Inhalte. Dies ist in unseren Augen ein durchaus erfreuliches Ergebnis, da wir hierdurch bekräftigt sehen, dass die Geschlechterunterschiede im Mathematikverständnis im Wesentlichen eine Konsequenz sozialer Konstrukte sind.

2. Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Grundschule?

Da in der Grundschule die Behandlung von Themen, die in den Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehören, noch längst nicht selbstverständlich ist, soll hier kurz auf die grundsätzliche Frage eingegangen werden, inwiefern überhaupt Themen der Wahrscheinlichkeitsrechnung Inhalte der Grundschulmathematik sein können und sollten.
Im neuen Bildungsplan zum Mathematikunterricht in der Grundschule des Landes Baden-Württemberg wird die Förderung stochastischen Verstehens unter der Überschrift „Daten und Sachsituationen“ behandelt. Es fällt auf, dass der Lehrplan an keiner Stelle den Begriff „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ verwendet und die Lerninhalte vorwiegend im Bereich der beschreibenden Statistik liegen. Die neuen Bildungspläne der weiterführenden Sekundarstufen des Landes Baden-Württemberg sprechen frühestens ab der 7. Klasse von „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ und sehen parallel hierzu auch erst ab der 7. Klasse die begriffliche Einführung von absoluten und relativen Häufigkeiten, von Laplace-Wahrscheinlichkeiten und anderen wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffen vor. Die späte Verwendung des Begriffs „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ in den neuen Lehrplänen des Landes Baden-Württemberg ist sicherlich dem hohen kognitiven Anspruch des definitionsorientierten Konzepts von Wahrscheinlichkeit geschuldet, für das Grundschüler noch nicht die notwendige kognitive Reife mitbringen. Einen intuitiven Zugang zu probabilistischen Zusammenhängen besitzen Kinder allerdings bereits ab dem 5. Lebensjahr, wie beispielsweise Studien von FISCHBEIN (vgl. FISCHBEIN/ PAMPU/ MANZAT 1970; FISCHBEIN 1975) oder von FALK (vgl. FALK/ FALK/ LEVIN 1980; FALK 1982) belegen, bei denen Kinder ab 5 Jahren relativ subtile Häufigkeitsvergleiche erfolgreich durchführen konnten. Auch HAWKINS und KAPADIA (vgl. 1984) konstatierten ein frühes Verständnis von probabilistischen Verhältnissen und klassifizierten es vor allem als „frequentistisches Verständnis“ oder als „subjektives Verständnis von wahrgenommenen Häufigkeiten“. In diesem Kontext lässt sich der Wahrscheinlichkeitsbegriff als ein Entwicklungsphänomen begreifen (vgl. auch NEUBERT 1995), dessen Grundlagen bereits in der Grundschule erarbeitet werden können und auch erarbeitet werden sollten. Denn wird der Einstieg in die Behandlung probabilistischer Zusammenhänge auf die Sekundarstufe verschoben, besteht die Gefahr, dass die frühen probabilistischen Intuitionen der Kinder schwin-

den (vgl. auch HAWKINS/ KAPADIA 1984) und die Sekundarschüler auf keine kontinuierlich gereiften Heuristiken zurückgreifen können, die ihnen den definitionsorientierten Zugang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung erleichtern könnten. Darüber hinaus kann ein frühes Verständnis probabilistischer Zusammenhänge auch mathematikübergreifend in Algebra und Geometrie gewinnbringend aufgegriffen werden. So stellen beispielsweise Häufigkeitsverhältnisse eine adäquate Motivation bzw. Anwendung arithmetischer Bruchzahlkalküle dar (vgl. MARTIGNON/ WASSNER 2005) und können geometrisch als Verhältnisbeziehungen von Strecken und Teilstrecken veranschaulicht werden. Im Sinne eines spiralförmigen Curriculums sollten daher die intuitiven Zugänge der Grundschulkinder altersgemäß aufgegriffen und in einfache Heuristiken verwandelt werden, deren begründete Wirksamkeit von den Kindern ebenfalls altersgemäß verstanden und versprachlicht werden sollte. Eine zentrale Grundlagenkompetenz, die bereits Grundschulkinder in aufsteigendem Schwierigkeitsgrad erlernen können, ist dabei der vergleichende Umgang mit (natürlichen) Häufigkeiten und der Vergleich von verschiedenen Verhältnissen. In exemplarischen Unterrichtsexperimenten zeigen MARTIGNON und WASSNER (vgl. 2005), wie eine solche verhältnisvergleichende Kompetenz spiralförmig in der Grundschule ausgebildet und in der Sekundarstufe fortgeführt werden kann.

3. Beschreibung des Unterrichtsversuchs

Unser Unterrichtsversuch steht im Kontext der Unterrichtsexperimente von MARTIGNON und WASSNER (vgl. 2005) und wurde im Frühjahr 2006 als eigenständige Versuchseinheit in acht 2. Klassen in fünf Grundschulen in Stuttgart und Umgebung durchgeführt (N = 191). Die Dauer des Unterrichtsversuchs betrug zwischen 80 und 85 Minuten. Durchführende und verantwortliche Lehrperson war der Autor dieses Artikels, der in den Gruppenarbeitsphasen von fünf Studierenden unterstützt wurde. Die Aufgabe der Studierenden bestand vor allem darin, die Zweitklässler beim Durchlesen und Verstehen der Abfragekarten zu unterstützen, die die Grundlage der quantitativen Erfolgskontrollauswertung bildeten.

Inhaltlich greift der Unterrichtsversuch die Kenntnisse zu Zerlegungs- und Tauschaufgaben aus der 1. Klasse auf und setzt den Umgang mit dem Zahlenstrahl und die Klärung des Begriffes „Nachbarzahlen“ voraus. Der Ablauf lässt sich, wie genannt, in die Erarbeitung des Häufigkeitsdiagramms, die Tippspielphase und die reflektierte Verknüpfung der Spielerfahrung mit dem Häufigkeitsdiagramm unterteilen.

3.1 Die Erarbeitung des Häufigkeits-Säulendiagramms

In der ersten Unterrichtsphase sollten die Schülerinnen und Schüler das Häufigkeitsdiagramm der Augensummen zweier Würfel in der Form eines „Treppenstufen-Säulendiagramms“ aus Paaren verschiedenfarbiger Würfelseiten erarbeiten (siehe Abb.1). Dieses Repräsentationsformat schien uns aus mehreren Gründen vorteilhaft gegenüber anderen Darstellungsformen: Zum einen vermeiden wir durch die Verwendung *konkreter Würfelseiten* Verständnisbarrieren, die bei abstrakteren Darstellungsweisen (siehe z.B. Abb.2) auftreten können, und machen deutlich, dass die aufgeführ-

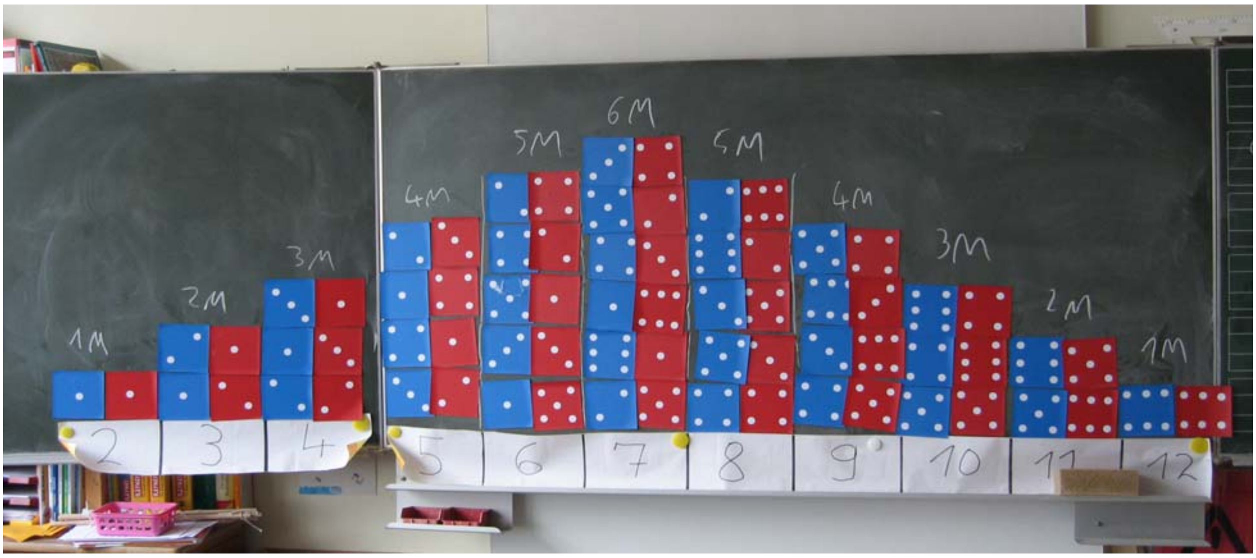


Abb. 1 - Eingängiges Repräsentationsformat: Die Häufigkeitsverteilung der Augensumme zweier Würfel als horizontales Säulendiagramm aus magnetischen Würfelflächen.

ten Zerlegungsmöglichkeiten der Zahlen Zwei bis Zwölf von den Würfeln abhängen und nicht allgemein zu verstehen sind. Zum anderen verwenden wir bei der *waagerechten Anordnung* der „Zerlegungstürme“ (im Gegensatz z.B. zu Abb. 3) den Zahlenstrahl als anschauliches und bekanntes Ordnungsinstrument, machen die Schüler mit dem Säulendiagramm als einer sehr häufig verwendeten Diagrammdarstellungsweise vertraut und bereiten sie in Hinblick auf spätere Jahrgänge auf die Darstellung von Funktionen in Graphen vor (z.B. Gaußsche Glockenkurve). Darüber hinaus war es unser Ziel, die Schüler anhand des Häufigkeitsdiagramms mit den Fachbegriffen „Häufigkeit“ und „Säulendiagramm“ vertraut zu machen.

Durchführung und didaktische Beobachtungen

Zu Beginn des Unterrichts ging es zunächst darum, durch exemplarisches Würfeln mit zwei verschiedenfarbigen Schaumstoffwürfeln den Begriff „Augensumme“ zu klären und den Zahlenraum abzugrenzen, der mit zwei Würfeln gewürfelt werden kann. Während Zwölf als größtmögliche Augensumme keine Schwierigkeiten bereitete, glaubten einige Kinder, dass man mit zwei Würfeln auch eine Eins würfeln könne. Indem wir sie aufforderten, ihre Vermutung durch konkretes Legen der Würfel zu überprüfen, kamen sie schnell zu dem Schluss, dass „ein Würfel keine leere Seite hat“. Die Augensummen Zwölf und Zwei wurden nun durch zweifarbige Paare magnetischer Würfelseiten über einen an der Tafel befestigten Zahlenstrahl angebracht (vgl. Abb.1).[2]

2	1:1					
3	1:2	2:1				
4	1:3	3:1	2:2			
5	1:4	4:1	2:3	3:2		
6	1:5	5:1	2:4	4:2	3:3	
7	1:6	6:1	2:5	5:2	3:4	4:3
8	2:6	6:2	3:5	5:3	4:4	
9	3:6	6:3	4:5	5:4		
10	4:6	6:4	5:5			
11	5:6	6:5				
12	6:6					

Abb. 2 - Häufigkeitstabelle, abstrakt und vertikal (im Unterrichtsversuch nicht verwendet)

In einem zweiten Schritt wurden die Kombinationsmöglichkeiten der Augensumme Drei, der

[2] Da wir die magnetischen Würfelflächen bisher nicht im Handel vorgefunden haben, haben wir sie mit relativ geringem Aufwand aus größeren Magnetplatten und 252 Klebepunkten selbst hergestellt.

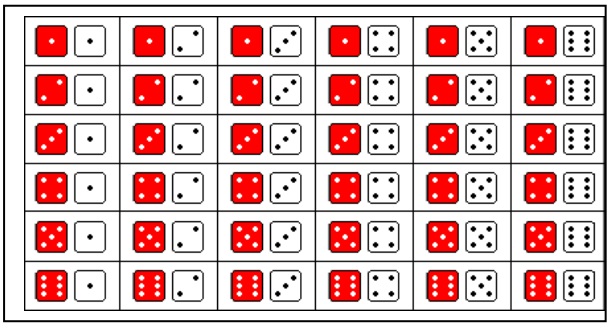


Abb.3 - Häufigkeiten sind nur diagonal ablesbar (im Unterrichtsversuch nicht verwendet)

Augensumme Vier und der Augensumme Elf erarbeitet und über dem Zahlenstrahl visualisiert. Hierbei war es für die Grundschüler ein wichtiger Schritt zu verstehen, dass das kommutative „Tauschen“ von *ungleichen* Summanden (z.B. „$1_{(rot)} + 2_{(blau)}$“ in „$2_{(rot)} + 1_{(blau)}$“) stets zu einer weitere kombinatorischen Möglichkeit der gleichen Augensumme führt. Da die Einsicht in die Verschiedenheit dieser Kombinationsmöglichkeiten für das weitere Verständnis grundlegend war, haben wir auf eine deutliche Erklärung wert gelegt und diese durch konkretes Legen der Schaumstoffwürfel unterstützt: Würfelt man zunächst mit dem *roten* Würfel eine 1 oder eine 2, so sind dies zwei völlig unterschiedliche Ereignisse. Eine 3 als Augensumme ergibt sich genau dann, wenn man mit dem blauen Würfel den jeweils fehlenden Differenzbetrag dazuwürfelt.[3]

In einem dritten Schritt wurden dann die Zerlegungsmöglichkeiten der Zahlen 5 bis 10 in sechs Kleingruppen erarbeitet und die Ergebnisse anschließend selbstständig von den Gruppenteilnehmern an die Tafel übertragen (Abb. 4).

Jede der sechs Gruppen war dabei für eine eigene Augensumme verantwortlich und erhielt den Arbeitsauftrag, alle möglichen Kombinationen „ihrer“ Augensumme mit einem roten und einem blauen Würfel zu legen und die Ergebnisse jeweils direkt als Paar farbiger Würfelseiten in ein vorbereitetes Tabellenblatt einzutragen.

Nachdem jede

Kleingruppe ihre Ergebnisse an die Tafel übertragen hatte, haben wir zunächst im gemeinsamen Unterrichtsgespräch die Anzahl der Zerlegungen pro Augensumme gezählt und über die jeweiligen

[3] Bei der Augensumme 4 machten einige Schüler den Vorschlag, dass man auch zur Kombination 2+2 eine Vertauschungsmöglichkeit finden könne und vertauschten zur Illustration lediglich die Positionen, an denen die Würfel lagen. Doch dadurch, dass wir die Schüler vor und nach einer Positionsvertauschung aufforderten zu erklären, was eine „rote 2“ und eine „blaue 2“ bedeuten, wurde ihnen recht schnell klar, dass die Lage der Würfel zueinander keine Bedeutung hatte.

Säulen geschrieben. Auf unsere sichernde Rückfrage, was diese notierten Zahlen bedeuten, bekamen wir in allen Klassen von mehreren Zweitklässlern die Antwort, dass diese Zahl die verschiedenen Möglichkeiten angebe, wie man eine bestimmte Augensumme würfeln könne. Dadurch dass die Kinder unseren Ausdruck „Möglichkeiten“ ganz selbstverständlich und in korrekter Weise aufnahmen und verwendeten, wurde uns bestätigt, dass er altergemäß und selbsterklärend ist. Um die Schüler aber darüber hinaus mit dem mathematischen Fachbegriff in Berührung zu bringen, führten wir an dieser Stelle den Begriff „Häufigkeit“ ein und erklärten ihn auf unser Beispiel bezogen als die „Anzahl der Möglichkeiten, wie man eine Augensumme würfeln kann“.

Abb. 4 - Übertragung der Gruppenergebnisse

Danach sollten die Schüler das entstandene Diagramm als Ganzes beschreiben, um so einen Gesamtüberblick über das bisher Erarbeitete zu erhalten und sich die wesentlichen Eigenschaften des Säulendiagramms besser einprägen zu können. Sie verglichen das Diagramm mit einer auf- und absteigenden Treppe, mit der Seitenansicht einer Pyramide oder mit einer Stadt aus unterschiedlich hohen „Wolkenkratzern“. Auch hier fanden wir es angemessen, die Schüler mit dem entsprechenden Fachbegriff „Säulendiagramm“ in Berührung zu bringen, der an die Tafel angeschrieben wurde. Auf eine genaue Definition des Begriffs haben wir verzichtet und ihn stattdessen in die Hausaufgabe aufgenommen, um so den Umgang mit ihm geläufiger zu machen (vgl. Abb.8). In den auf unseren Unterrichtsversuch folgenden Unterrichtsstunden sollen dann die Begriffe „Häufigkeit“ und „Säulendiagramm“ erneut angesprochen und ihr Verständnis mithilfe weiterer Beispiele vertieft werden (vgl. Kap 3.5).

3.2 Die Tippspielphase

In der 2. Phase unseres Unterrichtsversuches wollten wir die Zweitklässler in einem Vorhersagewettspiel die Erfahrung machen lassen, dass bei etwa 30 Spielrunden die gewürfelten Augensummen nicht in etwa gleichverteilt, sondern *auffällig ungleichmäßig* verteilt ausfallen. Das Wettspiel sollte über Spaß und Spannung hinaus einen klaren Anwendungsbezug für das erarbeitete Häufigkeitsdiagramm liefern und somit erkenntnisfördernd wirken: Der starke Antrieb, gewinnen zu wollen und richtig zu „tippen“, sollte die Schüler dazu anregen, wahrscheinlichkeitsorientierte Strategien zu entwickeln.

Durchführung und didaktische Beobachtungen

Zu Beginn der Spielphase fanden sich die Schülerinnen und Schüler in denselben Kleingruppen zusammen, in denen sie auch die Zerlegungsmöglichkeiten erarbeitet hatten. In unserem Unterrichtsversuch haben wir die Einteilung der Gruppen so gewählt, dass nach Möglichkeit jeweils ein Team von zwei Mädchen („M“) und ein Team von zwei Jungen („J“) gegeneinander antreten konnten, um später anhand des Spielprotokolls auswerten zu können, ob Mädchen und Jungen ein auffällig anderes Tippverhalten an den Tag legen. Die Spielregeln wurden zunächst frontal im Unterrichtsgespräch erklärt und anhand einiger exemplarischer Spielrunden verdeutlicht. Dann erhielt jede Kleingruppe einen Würfelbecher mit zwei Würfeln und einen Spielplan, der zugleich als gut einsehbares Spielverlaufsprotokoll diente.

Spielregeln:

Am Anfang einer jeden Runde sollen sich das Jungenteam und das Mädchenteam (oder z.B. Team „A“ und Team „B“) jeweils unter sich auf eine Augensumme einigen, vor der sie glauben, dass sie im nächsten Wurf gewürfelt wird. Der jeweilige Tipp der Mädchen und der Jungen wird dann auf dem Spielplan unter einem Zahlenstrahl durch die Buchstaben „M“ und „J“ festgehalten. Nun wird gewürfelt und die geworfene Augensumme wird am Zahlenstrahl umkreist. Hat eines der beiden Teams die richtige Zahl vorhergesagt, erhält es 2 Spielpunkte. Hat ein Team nur knapp daneben gelegen und auf eine Nachbarzahl der gewürfelten Zahl getippt, so erhält es 1 Spielpunkt. Alle schlechteren Tipps gehen leer aus. Die erreichten Spielpunkte werden dann pro Runde neben dem Zahlenstrahl in eine Tabelle notiert. Insgesamt kann 30-mal an 30 verschiedenen Zahlenstrahlen gespielt werden und abschließend werden alle Spielpunkte eines Teams zusammengezählt, um das Siegerteam festzustellen. Um direkte Nachahmung beim Tippen zu vermeiden, dürfen beide Teams in einer Runde nicht auf dieselbe Zahl tippen. Das Recht, als Erster zu tippen, wechselt aus Gerechtigkeitsgründen von Runde zu Runde zwischen Jungenteam und Mädchenteam.

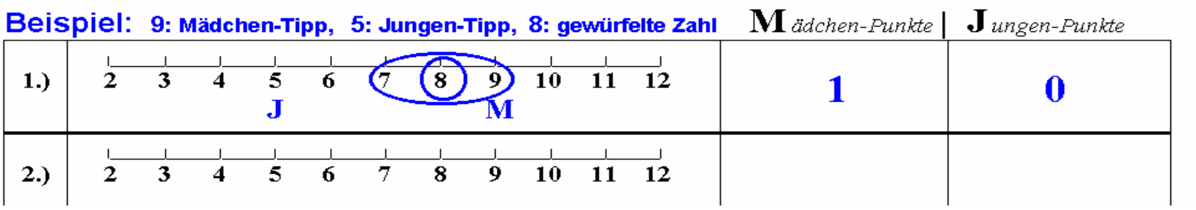


Abb. 5 - Auswertungsbeispiel auf dem Spielbogen

Bei der Konzeption dieses Vorhersagewettspiel haben wir darauf geachtet, dass allein die Berücksichtigung der Häufigkeitsverteilung einen sinnvollen strategischen Vorteil bietet und keine weiteren Faktoren die strategische Bedeutung der Häufigkeitsverteilung verwässern.[4] Immerhin hat ein Tipp auf die Sieben durch die Nachbarzahlenregel eine Gewinnwahrscheinlichkeit von (5+6+5)/36 bzw. 4/9, also von fast 1/2. Dafür nahmen wir in Kauf, dass nicht in jeder Runde Punkte verteilt werden konnten, was allerdings der Begeisterung und dem Ehrgeiz, mit dem das Spiel in allen Kleingruppen unseres Unterrichtsversuches gespielt wurde, keinen Abbruch tat.

Nach der Bestimmung des jeweiligen Siegerteams forderten wir die Schüler auf, sich noch einmal den Spielverlauf und die gewürfelten Augensummen auf dem Spielplan anzuschauen und teilten dann unsere erste Abfragekarte aus. Sie war mit einem einzelnen Zahlenstrahl versehen und musste von jedem Kind selbst ausgefüllt werden. Der Abfragetext der Karte lautete: „Stell dir vor, du spielst dieses Spiel 1000-mal. Du darfst aber in jeder Runde nur auf dieselbe Zahl tippen. Auf welche Zahl tippst du, wenn du möglichst oft gewinnen willst?“ 50% der Mädchen und 36,8% der Jungen tippten bereits bei dieser Abfragekarte auf die 7 als die günstigste Zahl. Das entspricht einem Durchschnitt von 44% aller beteiligten Kinder.

[4] Lediglich bei den Augensummen Zwei und Zwölf kommt neben der geringen Häufigkeit noch ein weiterer verschärfender Faktor zum Tragen: Zwei und Zwölf haben jeweils nur *eine* Nachbarzahl. Viele Zweitklässler erkannten dies während des Spiels sehr schnell und machten ihre Mitschüler darauf aufmerksam. Eine mögliche Spielvariante, die diesen Faktor ausschließt, besteht darin, Zwei und Zwölf als „Spiel-Nachbarzahlen“ festzulegen.

3.3 Verknüpfung der Spielerfahrungen mit dem Häufigkeitsdiagramm und Vertiefung durch Transferbildung

Das Ziel der 3. Phase des Unterrichtsversuches war, das von den Schülern erarbeitete „Treppenstufen-Säulendiagramm“ mit den Erfahrungen des Wettspiels zu verbinden. Sie sollten möglichst selbstständig zu dem Schluss kommen, dass das Auftreten einer bestimmten Augensumme im Spiel umso wahrscheinlicher ist, je größer die Anzahl der Möglichkeiten ist, wie man diese Augensumme würfeln kann – anschaulich gesprochen: je höher die jeweilige Häufigkeits-Säule ist.

Darüber hinaus sollten die Schüler die gewonnene Erkenntnis in zwei Transferübungen anwenden und übertragen, um so das Erlernte zu vertiefen und als Anwendungswissen zu sichern.

Zum Abschluss sollten die Schüler eine weitere Abfragekarte in Einzelarbeit bearbeiten, damit wir den Lernerfolg in unserem Unterrichtsversuch besser quantifizieren konnten.

Durchführung und didaktische Beobachtungen

Während die 2. Phase des Unterrichtsversuchs in den Kleingruppen stattgefunden hatte, war die überwiegende Sozialform der 3. Phase das fragend-entwickelde Unterrichtsgespräch.

Da die Schüler zum Ende der 2. Phase aufgefordert worden waren, sich rückblickend den Spielverlauf und die gewürfelten Zahlen anzuschauen, konnte nun nach einer kurzen Würdigung der erreichten Spielpunkte unmittelbar an die Erfahrungen der Schüler angeknüpft werden. Zunächst sollten die Schüler die Augensummen nennen, die sehr selten oder nie gewürfelt worden waren, und danach Augensummen, die sehr häufig vorgekommen waren. Bei nahezu allen Gruppen in den untersuchten Klassen wurden die Zwei und die Zwölf als sehr seltene Augensummen und die Zahlen Sechs, Sieben oder Acht als häufige Augensummen genannt. Geringe Abweichungen von dieser Grundtendenz gab es selbstverständlich auch, die sich allerdings in der Summe aller Gruppenergebnisse einebneten.

Da die Häufigkeiten von Zwei oder Zwölf einerseits und die Häufigkeiten von Sechs, Sieben oder

Acht andererseits die größten Differenzen aufweisen, bot sich auch bei der Frage nach der Ursache für das ungleichmäßige Auftreten der Augensummen ein direkter Vergleich dieser Augensummen an: Die zentrale Lehrerfrage „Warum sind denn bei fast allen Gruppen die Sechs, Sieben oder Acht so viel häufiger gewürfelt worden als die Zwei oder Zwölf?“ impliziert, dass nicht allein der reine Zufall für das ungleichmäßige Auftreten der Augensummen verantwortlich sein kann und bestärkt die Schüler darin, nach rationalen Begründungszusammenhängen zu suchen. Dass die Schüler hierbei auf das erarbeitete Häufigkeitsdiagramm, das sichtbar an der Tafel hängt, zurückgreifen, scheint nahe liegend. Dennoch ist es ein echter Erkenntnisfortschritt, wenn die Schüler den probabilistischen Ursache-Wirkung-Zusammenhang durchschauen und die Anzahl der Darstellungsmöglichkeiten einer Augensumme mit der Häufigkeit ihres Auftretens beim Würfeln in Verbindung bringen. Implizit wird erkannt, dass jede der 36 Kombinationsmöglichkeiten die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, gewürfelt zu werden und dass eine höhere Häufigkeitssäule eine höhere Chance darstellt, diese Augensumme zu würfeln.
Dieser Erkenntnisfortschritt, der sich ein wenig salopp als „Aha-Erlebnis“ bezeichnen lässt, war im Unterrichtsgeschehen zunächst an einer großen Anzahl von Kindern spürbar, die aufgeregt die richtige Antwort gaben. Des Weiteren konnten sehr viele Kinder bei der direkten Transferfrage „Welche Zahl würdet ihr wählen, wenn ihr 1000-mal würfelt und in jeder Runde auf *dieselbe* Zahl tippen müsst?“ nicht nur die Sieben als die strategisch günstigste Augensumme benennen, sondern darüber hinaus auch den Grund für ihre Wahl angeben: „ … weil die Sieben die meisten Möglichkeiten hat, wie man sie würfeln kann“ (siehe Einleitung). Auch bei Einschränkung dieses gedanklichen Spieles auf lediglich zwei Augensummen, die gewählt werden dürfen – beispielsweise Drei und Neun – wählten die Schüler die Augensumme mit der größeren Wahrscheinlichkeit und begründeten dies korrekt mit der höheren Anzahl von Darstellungsmöglichkeiten (z.B.: „Die Drei hat nur zwei Möglichkeiten, wie man sie würfeln kann, die Neun aber vier Möglichkeiten. Deshalb würde ich die Neun nehmen.“).

Transferexperiment: Wahrscheinlichkeit der Augensumme zweier zweiseitiger „Talerwürfel“

In einem weitergehenden Transferexperiment wollten wir überprüfen, ob die Zweitklässler in der Lage waren, ihre Erkenntnisse über günstige und ungünstige Augensummen auf die vergleichbare Spielsituation mit zwei Zweierwürfeln zu übertragen. Zu diesem Zweck beklebten wir eine Seite von zwei größeren Schokoladentalern jeweils mit zwei Punkten („Augen“) und die andere Seite jeweils mit einem Punkt („Auge“), wobei wir auch hier wie bei den „Sechserwürfeln“ für jeden Taler eine eigene Farbe wählten. Zur Illustration würfelten wir einige Male mit den „Talerwürfeln“ und ließen die Schüler dann den Zahlenraum der Augensummen dieser beiden Würfel bestimmen. In einem zweiten Schritt sollten sie dann angeben, auf welche Weise sich die drei möglichen Augensummen Zwei, Drei oder Vier würfeln lassen.

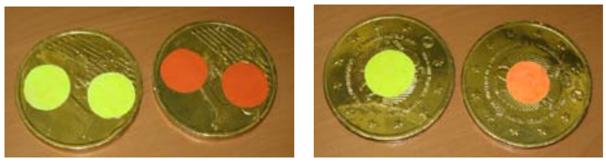


Abb. 6 - Vorder- und Rückseite des gelben und des roten Zweierwürfels

In der Hälfte der untersuchten Klassen ließen wir die Schüler ihre Antworten in einem kleinen Säulendiagramm mithilfe von Magneten und weißen Papierkreisen visualisieren.

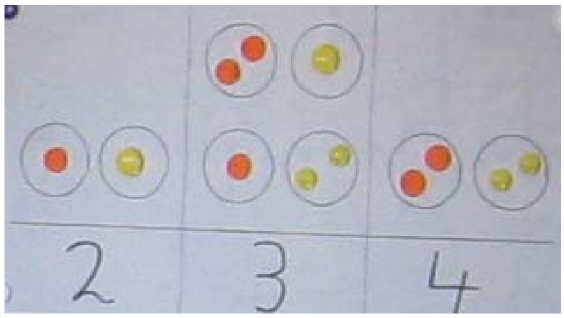


Abb. 7 - Säulendiagramm zum Zweierwürfel aus Papierkreisen und Magneten

Danach fragten wir die Schüler (wie zuvor beim Spiel mit den normalen „Sechserwürfeln“), welche Augensumme sie wählen würden, wenn Sie nun tausendmal mit den beiden Zweierwürfeln würfeln dürften und in allen Runden auf dieselbe Zahl tippen müssten.
Im Unterschied zu dem bekannten Tippspiel gelte hier die Nachbarzahlenregelung allerdings nicht, erklärten wir den Schülern, und somit brächte nur eine genaue Vorhersage Punkte ein.
In der folgenden stichprobenartigen Abfrage wählten erstaunlich viele Zweitklässler die Drei als die Zahl, die ihnen in 1000 Runden am häufigsten einen Gewinn einbringen sollte, und fast alle diese Schüler argumentierten in der anschließenden „Begründungsrunde“ wahrscheinlichkeitsorientiert: „… weil es bei der Drei zwei Möglichkeiten gibt, wie sie gewürfelt werden kann und bei der Zwei und der Vier nur eine.“

Um quantifizierbare Aussagen über den Lernerfolg *aller* Schüler in den acht untersuchten Klassen machen zu können, baten wir die Schüler zum Ende dieser Unterrichtsphase, eine weitere Abfragekarte auszufüllen, deren Inhalt im folgenden Auswertungskapitel (Kap. 4) erläutert wird.

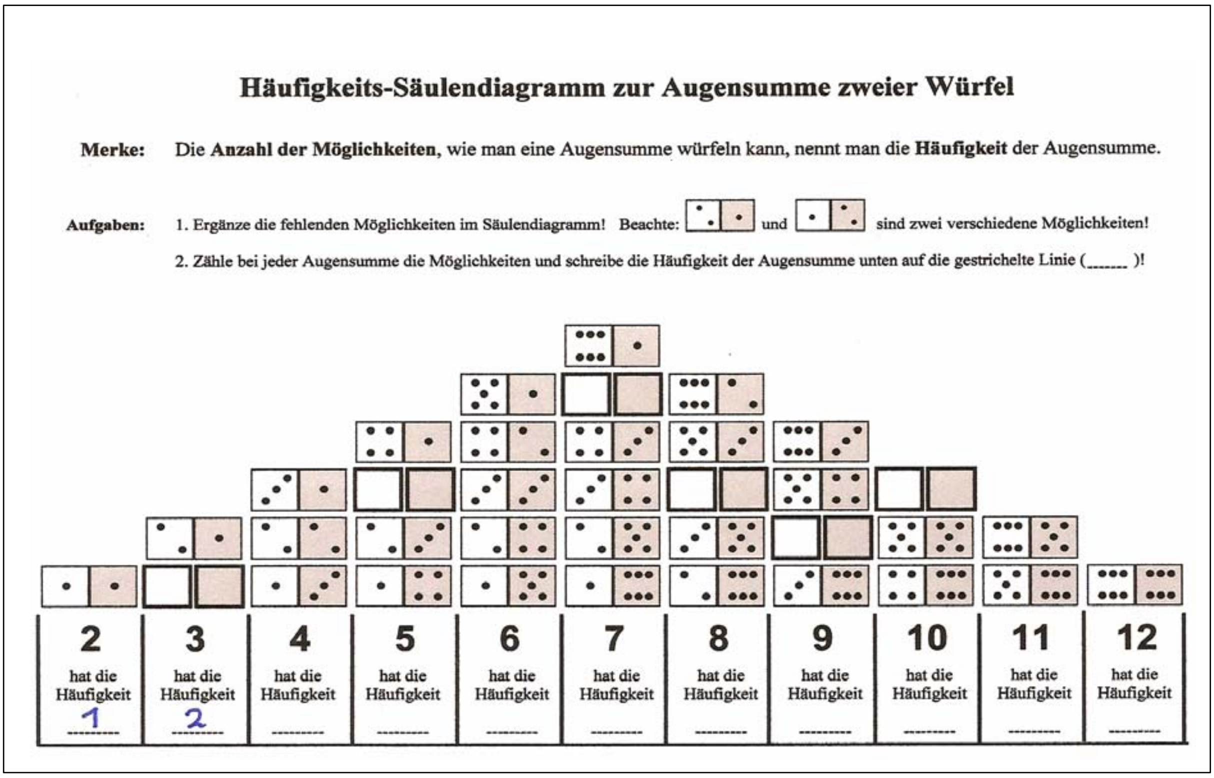


Abb. 8 - Hausaufgabenblatt

Hausaufgabe: Individuelle Bearbeitung des Häufigkeits-Säulendiagramms als Wiederholung

Zum grundsätzlichen Ablauf unseres Unterrichtsversuches lässt sich fragen, warum wir das Tippspiel nicht an den Anfang unseres Unterrichts gestellt haben und das daraus resultierende Problembewusstsein über das ungleichmäßige Auftreten der Würfelergebnisse dazu genutzt haben, erst in einem zweiten Schritt das Häufigkeitsdiagramm zu erarbeiten. Ein solches Vertauschen der Erarbeitungsphase und der Spielphase ist grundsätzlich denkbar, doch empfiehlt es sich unserer Ansicht nach in der Grundschule nicht. Denn in der Grundschule würde dann aufgrund der langen Erarbeitungszeit des Häufigkeitsdiagramms das spontane Erkennen der Zusammenhänge, das angesprochene „Aha-Erlebnis“ im Anschluss an Spielerfahrungen fast unmöglich gemacht. Ein solches „Aha-Erlebnis“ stellt aber als sprunghafter Erkenntnisfortschritt ein besonderes individuelles Erfolgserlebnis dar, das der Einprägsamkeit des Lernstoffes in besonderer Weise dienlich ist.

Zum Abschluss des Unterrichts teilten wir den Schülern ein Hausaufgabenblatt mit einem unvollständigen Häufigkeitsdiagramm zweier normaler Würfel aus (Abb. 8). Sie erhielten den Arbeitsauftrag, die leeren Würfelseiten im Diagramm zu ergänzen und die Häufigkeiten der Augensummen unter deren jeweiligen Säulen zu notieren. Hierzu enthielt das Arbeitsblatt eine an den Zusammenhang gebundene Erklärung des Begriffs Häufigkeit.

Der Unterrichtsablauf im Überblick

Der folgende tabellarische Unterrichtsplan gibt einen Überblick über die genannten drei Hauptphasen und ihre jeweiligen Unterphasen und gibt Auskunft über die jeweilige Dauer, die angewandte Sozialform und die verwendeten Hilfsmittel.

Phase	Dauer	Inhalt	Sozialform	Hilfsmittel
1	2 ´	**Vorbereitung und Beginn** Vorbereitung: Zahlenstrahl verdeckt an Tafel anbringen Begrüßung und Vorstellung unseres Teams	Sitzkreis	- breiter Felder-Zahlenstrahl
1.a	7 ´	**Einführung (Augensumme und Zahlenraum)** - Beispielhaft würfeln und zusammenzählen lassen, Begriff „Augensumme" klären - Zahlenraum bestimmen durch größtmögliche und kleinstmögliche Augensumme → Schüler Summen legen lassen - Paare 1+1 und 6+6 über Zahlenstrahl anbringen	Unterrichts-gespräch	- großer blauer und großer roter Würfel, - magnetische Würfelseiten
1.b	6 ´ (15)	**1. Teil der Erarbeitung des Häufigkeitsdiagramms** Welche Möglichkeiten gibt es, eine ... zu würfeln? Zunächst mit den Zahlen: 3 , 11 , 4 → Schüler legen lassen	Unterrichts-gespräch	- Zahlenstrahl, - magnetische Würfelseiten
1.c	10 ´	**2. Teil der Erarbeitungsphase (Gruppenarbeit)** - 6 Kleingruppen erarbeiten die Möglichkeiten, wie man mit zwei Würfeln eine ... würfeln kann. Pro Gruppe eine Zahl: 5 , 6 , 7 , 8 , 9 oder 10 - Ergebnisse werden jeweils parallel auf Tabellenblatt gemalt - Ergebniskontrolle durch Gruppenbetreuer oder Lehrkraft	Gruppen-arbeit (mit Gruppen-betreuer)	- Kleine Würfel (zweifarbig), - Stifte (zweif.), - leere Tabelle für Ergebnis-sicherung
1.d	10 ´ (35)	**Ergebnissammlung der Erarbeitungsphase** - Ergebnisse werden durch die Kleingruppen nacheinander an die Tafel übertragen (jeweils 2 Gruppen) - Jeweilige Anzahl der Möglichkeiten über Säulen notieren und Fachbegriff „Häufigkeit" einführen: „Anzahl der Möglichkeiten, wie man eine Augensumme würfeln kann" - Beschreiben lassen: Wie sieht Gesamtergebnis aus? Einführung des Begriffs „Säulendiagramm"	Unterrichts-gespräch	- magnetische Würfelseiten
2.a	3 ´	**Einführung in die Spielphase** Erklärung des Tipp-Spieles im U-Gespräch anhand von Bsp.	Unterrichts-gespräch	
2.b	15 ´	**Spielphase in Kleingruppen** - „Spielleiter" (Betreuer oder ausgewähltes Kind) macht Eintragungen auf dem Spielplanblatt (hier auch Spielregeln) - Kinder sollen den gesamten Spielplan einsehen können, um sehen zu können, welche Zahlen bereits gewürfelt wurden - Kinder auffordern, Spielverlauf anzuschauen	Gruppen-arbeit (mit Gruppen-betreuer)	- Spielplan-blätter, - zwei kleine Würfel, - Würfelbecher
2.c	2 ´ (55)	**1. Kartenabfrage (nur bei Unterrichtsversuch)** In der Kleingruppe bearbeitet jedes Kind für sich die 1. Abfragekarte (klein); Mädchen beige und Jungen blaue Karten	Gruppen-Arbeit mit Gruppenbetr.	- 1.Abfragekarte
3.a	8 ´	**Verknüpfung der Erfahrungen aus d. Spielphase mit den Ergebnissen aus d. Erarbeitungsphase /Direkter Transfer** - Welche Zahl kam nie oder sehr selten? Welche sehr häufig? → Gründe nennen und am Diagramm verdeutlichen lassen - Direkter Transfer: Welche Zahl würdet ihr wählen, wenn ihr 1000-mal würfelt und immer dieselbe Zahl wählen müsst?	Unterrichts-gespräch	- Treppenstufen-histogramm an der Tafel
3.b	12 ´ (75)	**Vertiefender Transfer: Augensumme von Zweierwürfeln** - beispielhaftes Werfen der Goldtaler, Augen zusammenzähl. - Was ist die kleinst-, was die größtmögliche Augensumme? - Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine 2 / 4 / 3 zu würfeln? → Kleines Diagramm von S. an der Tafel erstellen lassen - Welche Zahl würdet ihr wählen, wenn ihr 1000-mal spielt?	Unterrichts-gespräch	- Zwei Goldtaler als Zweierwürfel (mit 1-Auge-Seite u. 2-Augen-Seite) - Papierkreise u. Magnete (2 Farb.)
3.c	5 ´ (80)	**2. Kartenabfrage / Erfolgskontrolle / Hausaufgaben** - 1000-Spielrunden-Frage zu zwei 6er- und zwei 2er-Würfel - Multiple-Choice-Frage zur Begründung der Zahlenwahl - HA: Vervollständigen eines unvollständigen Häufigkeits-Säulendiagramms (normaler Würfel) auf ausgeteilter Kopie	Einzelarbeit (Anleitung durch Gruppen-betreuer)	- 2.Abfragekarte - HA-Blatt

Abb. 9 - Tabellarischer Unterrichtsablauf

3.5 Übertragung in „alltägliche" Unterrichtsbedingungen und Anregungen zur Fortführung

Eine Lehrperson, die unseren Unterrichtsversuch in den eigenen „Unterrichtsalltag" überführen möchte, hat nicht das Glück, auf fünf betreuende Studierende zurückgreifen zu können – hat dafür allerdings die Möglichkeit, diesen Unterrichtsversuch auf mehrere Unterrichtstunden zu strecken. Die Anwesenheit der fünf Studierenden war streng genommen nur dazu notwendig, die experimentellen Bedingungen unseres Unterrichtsversuchs zu sichern. Alle wesentlichen Schritte des Unterrichts können selbstverständlich auch ohne die betreuenden Studierenden durchgeführt werden. So kann z.B. in der Erarbeitungsphase ein strukturiertes Vorgehen in der Kleingruppe vereinbart und an einem Beispiel geübt werden oder es können für die Eintragungen im Tippspielplan einzelne Schüler verantwortlich gemacht werden. Das Ausfüllen der ersten Abfragekarte könnte ganz entfallen und die Bearbeitung der zweiten Abfragekarte kann im Rahmen eines eigenständigen Arbeitsauftrages oder auch mündlich erfolgen. Inhaltlich sollte allerdings nicht auf die 1000-Runden-Frage verzichtet werden, weil hierdurch der Zugang zu Wahrscheinlichkeiten durch das Gesetz der großen Zahlen motiviert wird. Bei einer hohen Anzahl von Würfen wird die Ergebnismenge die zugrunde liegende Häufigkeitsverteilung eher widerspiegeln als bei einer niedrigen Anzahl von Würfen.

Die Unterrichtssequenz „Die Augensumme zweier Würfel voraussagen" kann als Einstieg in eine Unterrichtseinheit zu Sachsituationen, Zufall und Wahrscheinlichkeiten verwendet werden. Daran anknüpfend lässt sich das Konzept des Säulendiagramms durch enaktives Konstruieren von Säulendiagrammen vertiefen und mit dem Modell der Urne als Zufallsgenerator verbinden: Jede einzelne Säule des Diagramms kann durch einen Steckwürfelturm in einer zugeordneten Farbe nachgebaut werden. So lässt sich z.B. die Augensummen-Säule der Sieben durch einen Steckwürfelturm aus sechs roten Steckwürfeln nachbauen und die Augensummen-Säule der Vier aus drei gelben Steckwürfeln. Insgesamt werden hierfür Steckwürfel in 11 verschiedenen Farben für mehrere Kleingruppen benötigt. Nachdem das Säulendiagramm durch Steckwürfeltürme nachgebaut worden ist, kann eine Legende erstellt werden, die deutlich macht, welche Farbe welcher Augensumme entspricht. Werden nun die Steckwürfeltürme auseinander genommen und die einzelnen Steckwürfel in eine Urne gesteckt, so dient die Urne als Lostrommel bzw. Zufallsgenerator, bei der die verschiedenen Farben eine *unterschiedliche* Ziehungswahrscheinlichkeit haben. Da bei unserem obigen Beispiel 6 von 36 Steckwürfeln rot sind (relative Häufigkeit), ist es wahrscheinlicher, einen roten Steckwürfel aus der Urne zu ziehen als einen gelben oder einen andersfarbigen. In einer weiteren Sequenz kann der Bezug zum Augensummendiagramm fallengelassen werden und stattdessen können neue Säulendiagramme entstehen, wenn die farbigen Steckwürfel für bestimmte Eigenschaften oder Vorlieben der Schülerinnen und Schüler der Klasse stehen. So kann ein Lieblingsobst-Säulendiagramm (rot = Apfel, gelb = Banane etc.) oder ein Schuhgrößen-Säulendiagramm aus Steckwürfeln erstellt werden und im Anschluss wie oben in das Urnenmodell überführt werden. Durch Kombination der Steckwürfel zu Zweiereinheiten kann dann auch z.B. die Frage geklärt werden, ob es wahrscheinlicher ist, einen Apfelliebhaber mit Schuhgröße 33 oder einen Bananenliebhaber mit Schuhgröße 36 aus der Urne (bzw. der Klasse) zu ziehen. Zentraler Inhalt bleibt in allen Sequenzen die Verbindung von beschreibender Statistik und Wahrscheinlichkeiten.

4. Inhalt und Auswertung der Abfragekarten

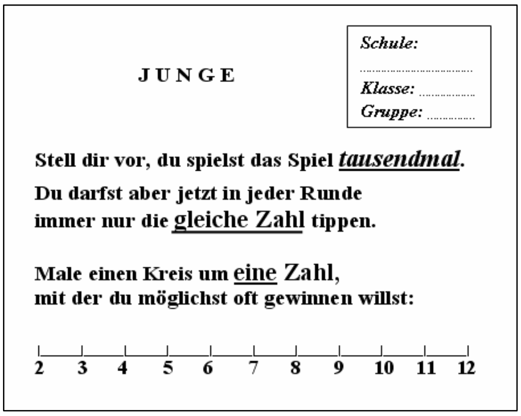
Die folgenden quantitativen Auswertungsergebnisse beruhen auf den beiden Abfragekarten, die für Mädchen und Jungen in verschiedenen Farben ausgeteilt wurden und von allen 191 Zweitklässlern allein ausgefüllt werden mussten. Das Bearbeiten der Karten wurde von Gruppenbetreuern begleitet, die zusammen mit den Kindern den Text durchlasen und etwaige Fragen klärten. Die erste Karte wurde am Ende der Tippspielphase, die zweite umfangreichere Karte am Ende des gesamten Unterrichtsversuchs bearbeitet.

4.1 Erkenntnisinteresse und Inhalt der Abfragekarten

Mit Hilfe der Abfragekarten wollten wir folgende Fragen klären:

1.) Wie viele Kinder haben bereits nach der Spielphase die Vermutung, dass die Sieben die günstigste Augensumme für Voraussagen ist?

2.) Wie viele Kinder haben am Ende des Unterrichts - nach der unterrichtlichen Verknüpfung von Spielerfahrung und Häufigkeitsdiagramm - eine Vorstellung davon, dass die Sieben die günstigste Augensumme für Voraussagen ist? Ist eine Steigerung zu 1.) erkennbar?


JUNGE

Schule: ....
Klasse: ....
Gruppe: ....

Stell dir vor, du spielst das Spiel *tausendmal*.
Du darfst aber jetzt in jeder Runde
immer nur die gleiche Zahl tippen.

Male einen Kreis um eine Zahl,
mit der du möglichst oft gewinnen willst:

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Abb. 10 - Erste Abfragekarte

3.) Wie viele Kinder können die Wahl ihrer bevorzugten Vorhersagezahl durch Wahrscheinlichkeitsüberlegungen begründen, die an der Häufigkeitsverteilung orientiert sind?

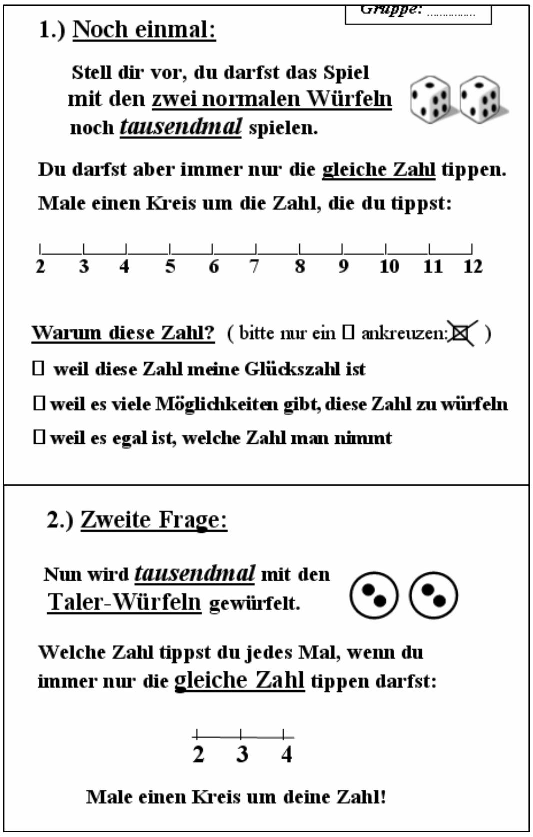
4.) Wie viele Kinder können ihre Einsichten aus dem Tippspiel mit zwei normalen „Sechserwürfeln“ auf ein gleichartiges Tippspiel mit zwei „Zweierwürfeln“ übertragen und sind somit zu einem echten Transfer ihrer neu gewonnenen Erkenntnisse in der Lage?

Zu den Fragen 1.) und 2.) konstruierten wir, wie bereits oben beschrieben, eine hypothetische Spielsituation, in der die Schüler das bereits bekannte Tippspiel tausendmal spielen sollten, aber nun in allen Runden auf dieselbe Tippzahl setzen mussten: „Male einen Kreis um eine Zahl, mit der du möglichst oft gewinnen willst“ heißt es auf der ersten Abfragekarte. Diese Spielsituation verweist durch die Vorgabe „tausendmal“ auf das probabilistische *Gesetz der großen Zahlen*, zumal die Zahl Tausend für Schüler der 2. Klasse eine immens hohe Zahl darstellt. Um mögliche Steigerungen im Unterrichtsverlauf quantifizieren zu können, baten wir die Zweitklässler auf beiden Abfragekarten, sich dieses 1000-Runden-Spiel mit zwei „normalen“ Würfeln vorzustellen.
Zur Frage 3, der Begründung ihrer Zahlenwahl, konnten wir die Schüler aus Zeitgründen keine eigenen Texte verfassen lassen, sondern entschieden uns für eine Multiple-Choice-Vorgabe von drei Alternativen, die die Schüler ausschließlich auf der zweiten Abfragekarte am Ende des Unterrichts bearbeiten sollten. Auf die Frage „Warum diese Zahl?“, direkt im Anschluss an das hypothetische 1000-Runden-Spiel, konnten die Schüler zwischen den folgenden vorgegebenen Antwortalternativen wählen:

[] *weil diese Zahl meine Glückszahl ist,*
[] *weil es viele Möglichkeiten gibt, diese Zahl zu würfeln,*
[] *weil es egal ist, welche Zahl man nimmt.*

In der richtigen zweiten Antwortalternative haben wir bewusst die quantifizierende Formulierung „viele“ gewählt und nicht etwa den Superlativ „die meisten“. Zum einen wollten wir eine andere Formulierung als im Unterricht verwenden und zum anderen vermeiden, dass allein der Superlativ als Steigerungsform Schülerantworten anzieht.

Um quantifizierbare Aussagen zu unserer vierten Frage (Transfer „Zweierwürfel“) machen zu können, baten wir die Schüler auf der zweiten Abfragekarte darüber hinaus, sich auf ein weiteres hypothetisches Tippspiel mit tausend Runden einzulassen. In diesem Fall sollten sie mit zwei Zweierwürfeln spielen und sich zwischen den Zahlen 2, 3 und 4 für die Zahl entscheiden, die als Voraussagetipp in allen tausend Runden die größten Gewinnaussichten hat.


Gruppe: ....

1.) Noch einmal:

Stell dir vor, du darfst das Spiel
mit den zwei normalen Würfeln
noch *tausendmal* spielen.

Du darfst aber immer nur die gleiche Zahl tippen.
Male einen Kreis um die Zahl, die du tippst:

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Warum diese Zahl? (bitte nur ein □ ankreuzen: ☒)
□ weil diese Zahl meine Glückszahl ist
□ weil es viele Möglichkeiten gibt, diese Zahl zu würfeln
□ weil es egal ist, welche Zahl man nimmt

2.) Zweite Frage:

Nun wird *tausendmal* mit den
Taler-Würfeln gewürfelt.

Welche Zahl tippst du jedes Mal, wenn du
immer nur die gleiche Zahl tippen darfst:

2 3 4

Male einen Kreis um deine Zahl!

Abb. 11 - Zweite Abfragekarte

4.2 Auswertungsdaten und Interpretation

Im Anschluss an das 15-minütige Tippspiel wurden die Zweitklässler von den Gruppenbetreuern aufgefordert, sich noch einmal den *Verlauf* des Tippspiels anzuschauen, bevor sie dann die erste Abfragekarte ausfüllen sollten. 36,8 % aller Jungen (N = 87) und sogar die Hälfte aller Mädchen (N = 104) wählten daraufhin die Sieben als die günstigste Vorhersagezahl im 1000-Runden-Spiel

und entschieden sich damit für die Augensumme mit der höchsten Wahrscheinlichkeit.
Nachdem im Unterricht die Spielerfahrung der Schüler mit dem Häufigkeitsdiagramm verknüpft wurde, konnten diese Werte noch deutlich gesteigert werden: Nahezu doppelt so viele Jungen (72,4%) entschieden sich am Ende des Unterrichts für die Sieben und auch die Mädchen konnten ihren Wert um etwa die Hälfte auf 73,4% steigern. Damit liegen am Ende des Unterrichts Mädchen und Jungen fast gleichauf und insgesamt sind nahezu Dreiviertel aller Schülerinnen und Schüler am Unterrichtsende in der Lage, die Sieben als die günstigste Augensumme für Vorhersagen im 1000-Runden-Spiel zu erkennen. Dieser hohe Wert und die deutliche Steigerung zwischen erster und zweiter Abfragekarte sind deshalb beachtlich, da zwischenzeitlich das Zweierwürfelspiel durchgeführt wurde und damit ein unreflektiertes Echo richtiger Schülerantworten erschwert wurde.

78,8% aller Mädchen und 69,0% aller Jungen tippen bereits auf der ersten Abfragekarte auf eine der drei häufigsten Augensummen Sechs, Sieben oder Acht. Dies macht deutlich, dass es Kindern der 2. Klasse nicht schwer fällt, Erfolg versprechende, wahrscheinlichkeitsorientierte Heuristiken auszubilden. Warum allerdings zu diesem Zeitpunkt des Unterrichtsversuches prozentual mehr Mädchen als Jungen auf die Sieben (bzw. die 6, 7 oder 8) tippen, bleibt eine interessante Frage, die wir nicht im Sinne eines grundsätzlichen Geschlechterunterschiedes interpretieren wollen. Es ist denkbar, dass die Mädchen unserer Unterrichtsversuche genauere Beobachterinnen des Spielverlaufs waren oder aber, dass mehr Mädchen als Jungen bereits unabhängig von der Besprechung im Unterricht einen Zusammenhang zwischen dem bearbeiteten Häufigkeitsdiagramm und den Spielergebnissen erkannten.

Der weitere Verlauf des Unterrichts führt zu einer deutlichen Steigerung bei der Wahl der Sieben als günstigster Vorhersagezahl und ebnet die beobachteten Geschlechterunterschiede auf sehr hohem Niveau ein. Wir interpretieren diese Steigerung als einen echten Erkenntnisfortschritt bei der überwiegenden Anzahl der betroffenen Kinder. Wer verstanden hat, dass die Häufigkeit einer Augensumme ihr Auftreten im Spiel beeinflusst, wird wohl kaum nur eine zweitbeste Vorhersagezahl (6 oder 8) wählen. So lässt sich aus der deutlich gestiegenen Wahl der 7 schließen, dass eine große Anzahl der Zweitklässler am Ende des Unterrichts in der Lage ist, eine über Erfahrungswerte hinausgehende, gewinnbringende Tippspielstrategie zu entwickeln, die auf begründete Häufigkeits- und Wahrscheinlichkeitsüberlegungen beruht.

Gestützt wird diese Einschätzung durch die Auswertung der Multiple-Choice-Antworten, mit denen die Zweitklässler ihre favorisierte Vorhersagezahl begründen. Mehr als 2 von 3 Kindern (68,6%) kreuzen hier die richtige Antwort an: „*weil es viele Möglichkeiten gibt, diese Zahl zu würfeln*“. Dieser hohe Wert, der zwischen Mädchen und Jungen nur leicht differiert, lässt darauf schließen, dass eine deutliche Mehrheit der Kinder die Bedeutung der Häufigkeit von Augensummen verstanden hat und anzuwenden weiß.
Dass dieses Verständnis nicht nur auf die Spielsituation mit normalen Würfeln beschränkt ist, wird eindrucksvoll durch die Auswertung des letzten Items unterstrichen. Mehr als 4 von 5 Kindern (82,7%) wählen die 3 als die Augensumme, von der sie sich beim Zweierwürfelspiel in 1000 Runden den größten Erfolg versprechen.

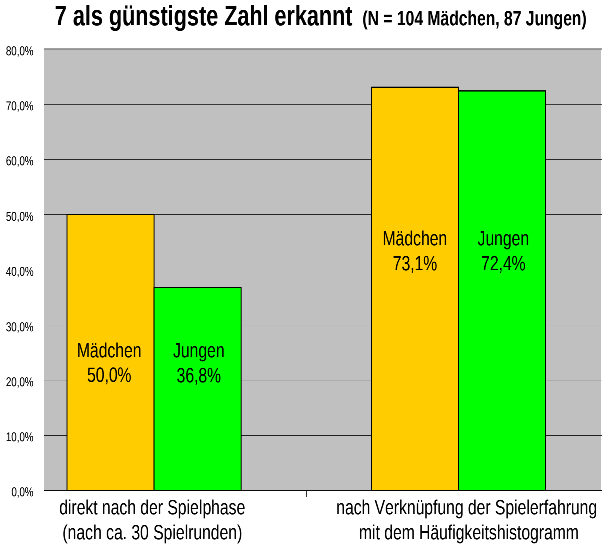


Abb. 12

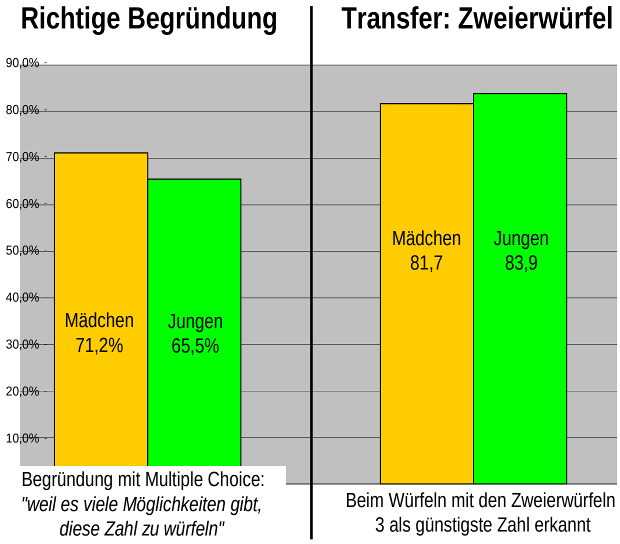


Abb. 13

Auch wenn in Rechnung gestellt werden muss, dass das Transferspiel direkt vor der Bearbeitung der zweiten Abfragekarte durchgeführt wurde, ist doch ein unmittelbares Echo richtiger Schülerantworten durch die zuvor geforderte Bearbeitung der beiden anderen Fragen erschwert worden. So interpretieren wir das hohe Ergebnis als einen deutlichen Beleg dafür, dass es einer überwiegenden Mehrheit der Schülerinnen und Schülern gelingt, die Bedeutung der höheren Häufigkeit einer Augensumme auf das Tippspiel mit den Zweierwürfeln zu übertragen.

5. Fazit

Die Auswertungsergebnisse der Abfragekarten bestätigen auf erfreuliche Weise unsere subjektive Einschätzung des Unterrichtsgeschehens: Wir hatten fast durchgehend den Eindruck, dass der Unterricht den Zweitklässlern Spaß machte und eine große Mehrheit zu einem echten Erkenntnisfortschritt im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung führte. Es war beeindruckend zu erleben, mit welch wachem Engagement die Zweitklässler das Säulendiagramm erarbeiteten und mit welcher Begeisterung sie das Tippspiel spielten. Jungen wie Mädchen waren darauf aus, richtige Vorhersagen zu machen. Sie wollten gewinnen und eben dieses Ziel motivierte sie dazu, nach Erfolg versprechenden Strategien zu suchen und dem Zufall in die Karten schauen zu wollen.

So wurde durch das Tippspiel zum einen das Erkenntnisinteresse der Schüler geweckt und zum anderen wurden zugleich Erfahrungswerte geschaffen, die immerhin 142 von 191 Kinder dazu nutzen konnten, auf eine der drei wahrscheinlichsten Augensummen (6, 7 oder 8) als favorisierte Vorhersagezahl zu tippen. Dass jedoch Stochastik in der Grundschule nicht bei einer bloßen Auswertung von Erfahrungswerten stehen bleiben muss, wurde uns eindrücklich durch den weiteren Verlauf des Unterrichtsversuches bestätigt. Sobald im Unterrichtsgespräch der Zusammenhang zum erarbeiteten Häufigkeitsdiagramm hergestellt worden war, griffen die meisten Schülerinnen und Schüler diese Erklärung dankbar auf und konnten nun rational und erfahrungsunabhängig begründen, warum die 7 eine sehr viel günstigere Vorhersagezahl ist als beispielsweise die 2 oder 11. Wirklich überrascht waren wir, wie spontan und wie leicht es einer großen Mehrheit der Zweitklässler gelang, dieses neue Wissen und seine Bedeutung für die persönlichen Gewinnchancen aus dem Zusammenhang des bisherigen Tippspiels zu lösen und auf das Spiel mit den Zweierwürfeln zu übertragen.[5]

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass unser Unterrichtsversuch in sieben von acht Klassen seine Ziele erreicht hat. Lediglich in einer Klasse konnten keine zufrieden stellenden Ergebnisse erzielt werden und die Werte der Abfragekarten lagen weit hinter denen der anderen Klassen zurück. So gelangten hier beispielsweise nur 6 von 26 Kindern zu der Erkenntnis, dass die 7 die günstigste Vorhersagezahl ist, was weniger als einem Drittel des Durchschnittswertes ent-

[5] Dass dies nicht selbstverständlich ist, verdeutlicht das Beispiel eines Jungen, der im Zweierwürfelspiel die Augensumme 4 mit der Begründung favorisierte, dass diese im Spiel mit den normalen Würfeln doch auch günstiger gewesen sei als die 2 oder 3.

spricht. Dieses auffällig schlechte Abschneiden ist allerdings in direktem Zusammenhang zu einer außergewöhnlich schwierigen Lernsituation in dieser Klasse zum Zeitpunkt unseres Besuches zu sehen, die höchstwahrscheinlich auch jeden anderen Lernprozess erheblich behindert hätte.

Berechnet man die Durchschnittswerte der Abfrageergebnisse ohne diese besondere Klasse, so ergibt sich für die übrigen sieben Klassen ein noch positiveres Bild: Von nun insgesamt 165 Kindern sind am Ende des Unterrichts 133 davon überzeugt, dass die 7 im 1000-Runden-Spiel die größten Gewinnchancen hat (80,6%). 124 Schülerinnen und Schüler begründen die Wahl ihrer Vorhersagezahl mit der hohen Anzahl von Möglichkeiten, wie man diese würfeln könne (75,2%) und sogar 143 der 165 Kinder (86,7%) sind der Ansicht, dass im Zweierwürfel-Transferspiel die 3 die erfolgversprechenste Augensumme ist.

Insgesamt verdeutlichen die fast durchgängig guten Ergebnisse, dass der spielerische und begründete Umgang mit Wahrscheinlichkeiten ein lohnender Unterrichtsinhalt des Mathematikunterrichts der Grundschule ist, auf den im Sinne eines „Spiralcuriculums“ in der Sekundarstufe sinnvoll aufgebaut werden kann.

Literatur

Biehler, R.; Hartung, R. (2006): Die Leitidee Daten und Zufall. In: Blum, W.; Drücke-Noe, C.; Hartung, R. ; Köller, O. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret, Berlin, S. 68ff.

Eichler, B. (2003): Was ist Wahrscheinlichkeit? Individuelle Unterrichtskonzepte von Lehrerinnen und Lehrern. In: Mathematikunterricht, 3. Jg., S. 69-82.

Falk, R. (1982): Children´s Choice behaviour in Probabilistic Situations. In: Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics, Scheffield, Vol. 2, S. 714-726.

Falk, R.; Falk, R.; Levin, J. (1980): A Potential for Learning Probability in Young Children. In: Educational Studies in Mathematics, 11. Jg., S. 181-204.

Fischbein, E. (1975): The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children. Dordrecht.

Fischbein, E.; Pampu, I.; Minzat, I. (1970): Comparison of Ratios and the Chance Concept in Children. In: Child Development, 41. Jg., S. 377-389.

Hawkins, A.; Kapadia, R. (1984): Childrens´s Conceptions of Probability – A Psychological and Pedagogical Review. In: Educational Studies in Mathematics, 15. Jg., S. 349-377.

Martignon, L.; Wassner, C. (2005): Schulung frühen stochastischen Denkens von Kindern. In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 8. Jg., H. 2, S.202-222.

Neubert, B. (1995): Stochastik im Mathematikunterricht der Grundschule? In: Sachunterricht und Mathematik in der Primastufe (SMP), 23. Jg., H. 1, S. 35-39.

Stanat, P.; Kunter, M. (2001): Geschlechterunterschiede in Basiskompetenzen. In: Baumert, J.; Klieme, E.; Neubrand, M.; Prenzel, M.; Schiefele, U.; Schneider, W.; Stanat, P.; Tillmann, K.-J.; Weiß, M.(Hrsg.): PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen, S. 249-269.

Wollring, B. (1994): Fallstudien zu frequentistischen Kompetenzen von Grundschulkindern in stochastischen Situationen - Kinder rekonstruieren verdeckte Glücksräder. In: Maier, H.; Voigt, J. (Hrsg.): Verstehen und Verständigung (IDM-Reihe: Untersuchungen zum Mathematikunterricht). Köln, S. 144-181

Anschrift des Verfassers:

Wolfram Weustenfeld
Institut für Mathematik und Informatik
Pädagogische Hochschule Ludwigsburg
Reuteallee 46
71634 Ludwigsburg
martignon@ph-ludwigsburg.de