Gezinkte und ungezinkte Würfel, Magnetplättchen und Tinkercubes: Materialien für eine Grundschulstochastik zum Anfassen

LAURA MARTIGNON, LUDWIGSBURG UND STEFAN KRAUSS, KASSEL

Einleitung

Stochastik in der Grundschule?

30 Jahre Diskussion in Deutschland

Dass der Umgang mit elementaren Konzepten der beschreibenden Statistik wie einfachen Säulendiagrammen, Stichproben und Mittelwerten in der Grundschule erlernt werden soll und kann, scheint inzwischen in Deutschland etabliert zu sein. Was aber die Einführung von Grundelementen der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Grundschule anbelangt, hat sich im Laufe der Jahre eine gewisse Skepsis entwickelt. Dabei hatten bereits in den siebziger Jahren nicht nur statistische, sondern auch probabilistische Ideen Eingang in die Didaktik der Primarstufe (Grundschule) gefunden, wie z.B. aus *Richtlinien für Mathematik* von Nordrhein-Westfalen aus dem Jahre 1975 hervorgeht. Dort wurden Aktivitäten zu Begriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgeschlagen (Koßwig, 1975) wie z.B. das Anordnen und Klassifizieren von Stichproben (Kinder der Klasse nach Alter, Gewicht, Körpergröße, Schuhgröße etc.), das Bestimmen der möglichen Ausgänge einfacher Zufallsversuche (Werfen mit zwei Würfeln und Beachten der Augensumme) und das Vergleichen von zufälligen Ereignissen nach ihrer Wahrscheinlichkeit. Auch Spiele, die man im Hinblick auf Fragestellungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gut einsetzen kann, wurden in den *Richtlinien* positiv bewertet: „Ihre Bedeutung für die Motivation, die Förderung des kreativen Verhaltens und des sozialen Lernens sind unbestritten“. Bereits vor dreißig Jahren hatte Arthur Engel faszinierende Bücher zu einem „vertikalen“ Programm für Stochastik in der Primar- und Sekundarstufe (siehe z.B. Zufall und Strategie, 1974) geschrieben und bunte, handliche Materialien für stochastische Spiele in der Grundschule konzipiert. Seine bunten Steckwürfel waren für kombinatorische Zwecke bestimmt und seine kleinen Glücksräder stellten Verteilungen dar, die beim Thema ‚Wetten’ zum Einsatz kommen sollten.

Eine tatsächliche Einführung stochastischer Elemente in die tägliche Unterrichtspraxis in der Grundschule fand bislang jedoch nicht oder nur sporadisch und höchstens auf Eigeninitiative einiger Lehrerinnen und Lehrer statt. Erst durch die PISA-Ergebnisse und die Einführung der neuen Bildungsstandards wurden diese „stochastischen Intentionen“ von Didaktikern wie Arthur Engel wiederbelebt. Seit 2003 wurden Empfehlungen zur Erarbeitung stochastischer Konzepte Teil der Lehrpläne aller Bundesländer. Im Bezug auf die Stochastik im Grundschulbereich ist eine einheitliche Haltung der Bundesländer jedoch nicht erkennbar. In Sachsen-Anhalt ist die Stochastik im Rahmenplan der Grundschule im Vergleich mit den anderen Bundesländern am stärksten und progressivsten vertreten. Sie wird unter „Sachrechnen und Größen“ aufgelistet und zwar als Zusammensetzung von elementarem, statistischem Hantieren („mit Stichproben“) und einem ersten, eher heuristischen Zugang zu Wahrscheinlichkeit und Zufall („Einfache Zufallsversuche“). Baden Württemberg liegt dabei eher am anderen Ende des Spektrums mit einer Einschränkung auf „Daten und Sachsituationen“ und einen Bezug zu Wahrscheinlichkeiten nur in Randbemerkungen. Unabhängig von den Empfehlungen in den Rahmenplänen bleibt für die Grundschullehrerschaft das reelle Problem der Zeiteinteilung. Wie wir in einer kleinen informellen Erhebung feststellten, empfinden es dreißig befragte Lehrerinnen und Lehrer in Stuttgart, Kornwesteheim und Ludwigsburg als „schwierig“, die Zeit für die „alten“ Inhalte zu reduzieren, um einige Stunden den „neuen“ Inhalten zu widmen. Inzwischen, auch weil die nächsten Vergleichsarbeiten voraussichtlich einige stochastische Aufgaben enthalten werden, sind die befragten Lehrerinnen und Lehrer der Grundschule im Durchschnitt bereit, bis zu 9 Doppelstunden während eines Schuljahrs der Stochastik zu widmen: 6 Doppelstunden in der 1. und 2. Klassenstufe und 9 Doppelstunden in der 3. und 4. Klassenstufe.

Eine Einschränkung auf heuristische Aspekte der Stochastik für die Grundschule

Die Vorbehalte, Schülern Konzepte der Wahrscheinlichkeit in der Grundschule nahe zu bringen, scheinen dann weniger begründet, wenn man sich das bescheidene Ziel setzt, Kindern einen guten Umgang mit den Relationen „wahrscheinlicher als“ und „gleichwahrscheinlich zu“ zu vermitteln, ohne den Begriff „Wahrscheinlichkeit“ explizit zu thematisieren (siehe auch Neubert, dieses Heft). Selbstverständlich kann der Umgang mit diesen Relationen in der Grundschule zunächst nur ein *heuristischer* sein. Mit „heuristisch“ meinen wir aber keineswegs Regeln im Sinne „pi mal Daumen“, sondern noch zu verfestigende Intuitionen, die *später*, *graduell* und *modellhaft* ein solides Fundament bekommen und somit Teil des „*kognitiven Rucksacks des Kindes*“ werden können. Eine solche Vorgehensweise ist auch in der Grundschularithmetik übliche Praxis: In der Grundschule arbeiten Kinder mit den „4 Rechenarten“, die, mathematisch betrachtet, eigentlich nur 2 sind. Es wäre zu früh, Kinder im Alter von 6 bzw. 7 Jahren mit dem Begriff eines inversen Elementes für die Addition und für die Multiplikation zu konfrontieren, geschweige denn mit dem Gruppenbegriff. Die algebraischen Strukturen, welche den 4 Rechenarten zugrunde liegen, bleiben den Schülerinnen und Schülern zunächst vorenthalten, bis sie die kognitive Reife erlangen, sie als natürlich zu empfinden. Wichtig ist, dass Kinder das Rechnen lernen und sich ihre Intuitionen zum Begriff „Operation“ festigen.

Wir möchten (auch innerhalb des Arbeitskreises Stochastik in der Schule) für eine elementare Stochastik in der Grundschule werben und im vorliegenden Artikel Elemente eines möglichen Programms zur Diskussion stellen. Dieses Programm besteht im Wesentlichen aus der Kombination einer Materialiensammlung mit einer dafür konzipierten Methodologie. Unsere Materialiensammlung unterscheidet sich stark von der berühmten Holzschachtel von Arthur Engel, obschon sie von ihr inspiriert wurde. Unsere Sammlung wurde an einigen Schulen in Stuttgart und Umgebung über einen Zeitraum von 3 Jahren - auch im Sinne einer Nachhaltigkeit der Lerneffekte - bereits erfolgreich erprobt. Sie ist jedoch weit davon entfernt vollständig zu sein und wir erheben keineswegs den Anspruch, diese Sammlung als die einzig mögliche zu präsentieren, die Erfolge verspricht. Sie enthält beispielsweise keine Glücksräder, unter anderem weil viele andere Autoren Forschungen zu dem Einsatz von Glücksrädern realisiert haben (Wollring, 1992; Neubert, 2007). Wir hoffen, unsere Erkenntnisse mittelfristig mit denen anderer Autoren vereinigen zu können, um schließlich zu einer Art gemeinsamen, großen „Materialienschachtel“ zu gelangen, wobei zu den jeweiligen Materialien auch geeignete Unterrichtsmethoden vorgeschlagen werden sollen. Diese Materialien und Methoden können dann (und das ist das das Fernziel dieses Artikels) programmatisch zu einem Curriculum für Stochastik in der Grundschule erweitert werden..

Überblick über den Artikel

Wie bereits angedeutet, soll unser Plädoyer für die Vermittlung stochastischer Inhalte in der Grundschule nicht rein theoretisch bleiben, sondern wir wollen dabei auf erste bereits gewonnene Erfahrungen in der Grundschule zurückgreifen. Wir haben eine gezielte Auswahl einiger Materialien mit einer spezifischen Methodologie in den Jahrgangsstufen 1-4 bereits zur Vermittlung einiger stochastischer Inhalte einsetzen können. Im Folgenden fassen wir kurz die (1) Materialien, (2) die Methodologie und die verwendeten Inhalte (siehe Tabelle 1) zusammen, bevor wir deren Umsetzung dann dezidiert darlegen.

(1) ***Materialien*** (einfach, zugänglich und flexibel)

- gezinkte und ungezinkte Spielwürfel in großen Mengen

- *enaktive, diskrete Repräsentanten* mit modellhaftem Charakter[1] wie:

a) Magnet- und Plastikplättchen und bunte, bzw., beschriftete Kärtchen als Repräsentanten von Individuen in Haufen/Populationen.

b) Steckwürfel als Repräsentanten von Individuen/Objekten sowie Türmchen von Steckwürfeln als Repräsentanten von Codewörtern für Merkmalprofile (Tinker-cubes und Tinker-towers)

c) durchsichtige Urnen in der *doppelten* Funktion von Haufen- oder Populationsträger einerseits und Zufallsgeneratoren (wenn „geschüttelt“) andererseits.

(2) Die **Methodologie** basiert im Wesentlichen auf dem Konzept der *natürlichen Häufigkeiten* (Gigerenzer & Hoffrage, 1995), gekoppelt mit

[1] Diese Materialiensammlung wurde bei der EcSite 2007 in Lissabon im Workshop zu „Risk Communication“ vorgestellt.

der Empfehlung von Stern (Stern, Hardy & Koerber, 2002; Koerber, 2003), dass proportionales Denken sehr früh von Kindern trainiert werden sollte.

In der folgenden Tabelle 1 werden die Materialien aufgelistet, die wir bei Interventionen an Grundschulen in Stuttgart und Umgebung erfolgreich implementieren konnten. Diese Tabelle gibt auch einen Überblick über die von uns verwendeten stochastischen Inhalte.

Klasse	St.*	Inhalte	Materialien
1.	12	Wetten Sortieren Klassifizieren Relationen: “wahrscheinlicher als” “gleichwahrscheinlich zu”	Würfel Steckwürfel
2.	12	Säulendiagramme Strichlisten Proportionen Vierfeldertafeln Relationen: “wahrscheinlicher als” “gleichwahrscheinlich zu”	Würfelpaare Magnetplättchen Steckwürfel Urnen
3.	18	Durchschnitte Median Proportionen “wahrscheinlicher als” “gleichwahrscheinlich zu”	Magnetplättchen Steckwürfel Urnen
4.	18	Proportionen Urnenarithmetik Bäume Von sicherem zu unsicherem Schließen	Magnetplättchen Steckwürfel Urnen Wason-Kärtchen**

Tabelle 1: Stochastische Materialien für Klassen 1 bis 4 (St* = Stunden im Jahr; Wason Kärtchen ** = Karten für logisches und probabilistisches Schließen)

Bevor wir den Einsatz einiger unserer Materialien ausführlich beschreiben (Punkt 1-6) wollen wir einleitend auf das Konzept der natürlichen Häufigkeiten eingehen und dabei einige Missverständnisse ausräumen, die zuweilen bei der Diskussion um dieses Konzept zu beobachten sind (Punkt 0). Die natürlichen Häufigkeiten sind einerseits die Theorie, die im Hintergrund unserer Implementationen steht. Andererseits sehen wir natürliche Häufigkeiten – da sie sogar jungen Schülerinnen und Schülern den Umgang mit stochastischen Inhalten ermöglichen – als die kognitiven Grundbausteine der kindlichen stochastischen Intuition.

0. Natürliche Häufigkeiten

Die Verwendung von natürlichen Häufigkeiten ist an Kategorisierungsaufgaben gekoppelt, bei denen ein Objekt oder ein Individuum anhand von einer oder mehr Merkmalausprägungen kategorisiert werden soll und zwar „unter Unsicherheit“. Die einfachste Erläuterung des Begriffs „natürliche Häufigkeiten“ liefert die Gegenüberstellung von natürlichen und normierten Häufigkeiten anhand eines konkreten Beispiels. Betrachten wir zwei mögliche Beschreibungen einer diagnostischen Kategorisierung (ein Patient wird anhand des Resultats eines Tests als *infiziert* oder *nicht infiziert* kategorisiert), die in der medizinischen Diagnostik vorkommen können:

Natürliche Häufigkeiten: Aus jeweils 100 Patienten sind 4 infiziert. Aus jeweils 4 infizierten Patienten werden 3 positiv getestet. Aus 96 nicht infizierten Patienten werden 12 ebenfalls positiv getestet.

Normierte Häufigkeiten: Aus jeweils 100 Patienten sind 4 infiziert. Aus jeweils 100 infizierten Patienten werden 75 positiv getestet. Aus jeweils 100 nicht infizierten Patienten werden 12,5 positiv getestet.

Die Schlussfolgerung, dass die meisten positiv Getesteten falsch-positiv sind, ist direkt aus der Beschreibung mit natürlichen Häufigkeiten herauszulesen, während sie nur mittels einer Rechnung aus der Formulierung mit normierten Häufigkeiten entnommen werden kann. Wir haben absichtlich die Prozente der ersten Aussage als Proportionen ausgedrückt, um zu betonen, dass nicht etwa das Zeichen % oder das Wort „Prozent“ per se die erschwerende Komponente sind. Es handelt sich bei dem Begriff der „natürlichen Häufigkeiten“ nicht um eine andere Bezeichnung für „absolute Häufigkeiten“, wie manchmal angenommen wird. Der Begriff „natürliche Häufigkeiten“ beinhaltet die Berücksichtigung eines Prozesses. Es geht um die Ermittlung der Proportionen von ineinander geschachtelten endlichen Teilpopulationen einer Gesamtpopulation, ohne zwischendurch – wie es bei Wahrscheinlichkeiten und Prozenten getan wird – immer wieder erneut zu normieren (Abb.1). Diese „natürliche“ Ermittlung entspricht auch der konkreten Zählung bei der konkreten Ermittlung der Güte eines medizinischen Tests (Krauss & Fiedler, 2007)

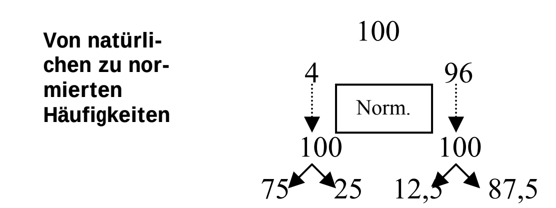

Abb. 1 Der Normierungschritt

Es ist die Umnormierung, die das Verständnis erschwert. Die Schlüsse die wir anhand von normierten bzw. natürlichen Häufigkeiten ziehen, sind oft diagnostischen Typs und werden, in der formalisierten Wahrscheinlichkeitstheorie, anhand der Formel von Bayes beantwortet. Diese Formel ist zwar mathematisch leicht ableitbar, bleibt aber für die menschliche Informationsverarbeitung eher mühsam und entwickelt sich kaum zu einer automatischen Verarbeitung hin (Atmaca, 2002; Atmaca & Martignon 2004). Eine fundamentale Erkenntnis von Gigerenzer und Hoffrage (1995) kann so zusammengefasst werden: Situationen, die seit der Einführung der Prozentrechnung und der Wahrscheinlichkeitstheorie anhand von normierten Häufigkeiten oder von Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden, sind - in bestimmter Weise - auch mit natürlichen Häufigkeiten repräsentierbar. Diese Übersetzung verwandelt die zu der Beantwortung der entstehenden Fragen gehörende Mathematik in elementare Arithmetik. Dabei wird die mentale Vorstellung der „schrittweisen Verschachtelung“ und Proportionsbildung als „natürlich“ erlebt. Gigerenzers und Hoffrages (1995) Einsichten mündeten in einer Empfehlung: Bei Abschätzungen, die formal betrachtet eine Inversion von bedingten Wahrscheinlichkeiten erfordern, verwende man eine Heuristik und zwar eine *Heuristik der Übersetzung.* Alle vorhandenen Wahrscheinlichkeiten werden in *natürliche Häufigkeiten* „übersetzt“. Die richtige Antwort wird mittels einfachster Arithmetik berechnet und, falls nötig, in Prozente oder in Wahrscheinlichkeiten zurückübersetzt. Das „Bauchgrimmen“, das manche (frequentistischen) DidaktikerInnen der Stochastik bei dieser Heuristik empfinden, wurde mittels einer sorgfältigen Analyse ihrer Legitimierung in Wassner, Biehler & Martignon (2007) wenn nicht beseitigt, so doch reduziert. Das Konzept der natürlichen Häufigkeiten wurde im Rahmen eines DFG-Forschungsprojekts („Entscheidungsfindung unter Unsicherheit als fächerübergreifende Kompetenz – Alltagsorientierter Stochastikunterricht am Gymnasium“) für den Unterricht didaktisch aufbereitet. Die Schülerinnen und Schüler, die mittels der Übersetzungsheuristik typische Bayesianische Aufgaben zu lösen lernten, waren sehr erfolgreich auch bei speziellen, später durchgeführten Tests, was auf die Nachhaltigkeit der Lernerfolge hindeutete (Wassner, Martignon & Biehler, 2004; Wassner, Biehler & Martignon, 2007). Dieser Erfolg hatte unter anderem eine Reihe von Experimenten mit jüngeren Kindern als Konsequenz, die wiederum eine radikalere und viel frühere Einführung des Hantierens mit „natürlichen Proportionen“ motivierte, nämlich in den Klassenstufen, in denen Normierungen – implementiert durch das Rechnen mit Brüchen oder Prozenten – ***noch nicht*** eingeführt worden sind, aber das elementare Rechnen mit natürlichen Zahlen bereits beherrscht wird. Neunjährigen, wie eine Reihe von Experimenten zeigen (Zhu & Gigerenzer, 2006; Lücking, 2005; Kurz-Milcke & Martignon, 2006; Martignon, Laskey & Kurz-Milcke, 2007) kann das Bayesianische Schlussfolgern anhand von natürlichen Häufigkeiten erfolgreich vermittelt werden.

Im Folgenden beschreiben wir nun auf narrative Weise unsere Implementationen, die auf dem Konzept der natürlichen Häufigkeiten basieren.

1. Natürliche Proportionen in der zweiten Klasse

Siebenjährige Kinder können erfolgreich in Proportionen denken: sie können Verhältnisse wie „6 von 36“ und „1 von 36“ früh erfassen und sogar vergleichen (Weustenfeld, dieses Heft). Eine frühe Einführung von Inhalten, die solche Verhältnisse zur Beschreibung von modellhaften Situationen verwenden, ist deshalb ratsam, weil sie den Boden für ein solides Verständnis von Proportionalität, von Brüchen und schließlich auch von Wahrscheinlichkeiten bereitet.

Die folgenden Fragestellungen haben wir mit Kindern der zweiten Klasse an verschiedenen Grundschulen in Stuttgart, Kornwestheim und Ludwigsburg enaktiv bearbeiten lassen und zwar anhand der Modellierung mit Steckwürfeln und Türmchen von Steckwürfeln, die wir im 2 ausführlich beschreiben:

- Wie viele Kinder in dieser Klasse sind Mädchen?

- Wie viele der Mädchen mögen Mathe lieber als Deutsch?
- Wie viele der Jungen mögen Mathe lieber als Deutsch?
- Wie viele der Kinder, die Mathe lieber als Deutsch mögen, sind Jungen?

Ein großer Teil der Kinder (über 80% von N = 156) in den besuchten Klassen konnten nach einer zweistündigen Einführung diese Fragen erfolgreich modellieren (enaktiv anhand von Steckwürfeln und Türmchen von Steckwürfeln) und beantworten.

Eine Lehre der verschachtelten Zahlenverhältnisse, die schon bei jüngeren Kindern ansetzt und sie schrittweise in die Welt von Brüchen und Wahrscheinlichkeiten einführt, macht einmal mehr deutlich, wie eng das Bild von Mathematik und das Verständnis von menschlicher Kognition miteinander verschränkt sind.

2. Gezinkte und ungezinkte Spielwürfel in der ersten Klasse

Nichts kann Kinder der ersten Klasse mehr faszinieren als die Spielwürfel von „Mensch Ärgere Dich nicht". Würfel sind allen Deutschen Kindern bekannt; nicht aber allen Kindern der Welt. In einer ersten Klasse der Altenburgerschule in Stuttgart (im Winter 2005-2006) machten wir die Erfahrung, dass manche ausländische Kinder noch nie einen Würfel gesehen hatten und nicht genau wussten, wie man damit spielt. Dies war aber bald erklärt: die obere Seite zeigt „das Resultat" eines Experimentes, nämlich des Wurfs. Wir hatten die Möglichkeit in 6 ersten Klassen in verschiedenen Schulen in Stuttgart und der Umgebung eine Doppelstunde zu Würfeln erproben zu können. Eine Doppelstunde bietet Zeit für einen spielerischen Anfang: die Kinder würfeln, zunächst mit den großen, inzwischen in allen Schulen vorhandenen Schaumgummiwürfeln. Danach würfeln die Kinder an Tischen und protokollieren die Resultate mit Hilfe von sehr einfachen Strichlisten. An einem der Tische – ohne dass die Kinder es wissen – wird aber mit dem gezinkten Würfel gewürfelt. Er sieht genau wie die anderen aus, aber sein Resultat ist immer wieder „6". Die Lehrperson deutet darauf hin, dass etwas an dem Würfel besonders ist. Die Kinder dürfen alle mit dem „etwas anderem Würfel" würfeln. Es wird diskutiert und die Lehrerin führt 4 Begriffe ein, die am Ende der Doppelstunde an die Tafel geschrieben werden. Diese Begriffe sind: 1. „gezinkt", 2. „gleichwahrscheinlich" 3. „fair" und 4. „wahrscheinlicher als„. Die Lehrerin leitet die Diskussion über die ungezinkten Würfel und führt die Kinder zu der Erkenntnis, dass „ungezinkt", „gerecht" und „fair" sehr verwandte Begriffe sind. Es werden dann Würfel konstruiert und zwar aus Pappe mit Hilfe von Schere und Klebstoff anhand von Netzen (die auf der Pappe vorgezeichnet sind). Sind die resultierenden Würfel ganz „ungezinkt"? Und wie würde man Würfel zinken? Die Kinder hatten zum Teil sehr interessante Ideen: man kann beispielsweise von innen einen Kaugummi an eine Seite des Würfels kleben. In allen Klassen wurde schließlich die Geschichte von Girolamo Cardano erzählt, der tatsächlich glaubte, ein ungezinkter Würfel sollte in 6 Würfen alle Zahlen 1 bis 6 als Resultat erzeugen. Die Kinder entwickelten Theorien, die erklären sollen, warum Cardano Unrecht hatte, was sie sehr leicht „experimentell" herausfinden konnten.

Ein Ziel der Unterrichtseinheit war, dass die Kinder die Begriffe „ungezinkt" und „gleichwahrscheinlich" in Verbindung bringen. Der Vergleich zwischen dem gezinkten und einem gleich aussehenden aber ungezinkten Würfel fördert die stochastischen Intuitionen von Kindern. Die Aktivitäten „Daten Sammeln" (Strichlisten für die 6 Resultate), „Protokoll führen", „Sequenzen beobachten" gehören zum Training in Statistik, das offensichtlich sehr früh beginnen kann. Es wurde weiterhin deutlich, dass sich Kinder gerne als empirische Forscher betätigen.

3. Bunte Steckwürfel (Tinker-Cubes) als stochastische Materialien

Wie können Populationen, Dörfer und Klassen enaktiv, also konkret simuliert werden? Dazu braucht man Objekte, die klein, handlich, flexibel und komponierbar sind, wie beispielsweise Steckwürfel. Wir arbeiten mit bunten Steckwürfeln aus flexiblem Material für die enaktive Repräsentation und Simulation erster probabilistischer Situationen. Unsere Steckwürfel können in durchsichtige Plastik-Urnen platziert werden, die als Abgrenzungen der Haufen, dass heißt als Populationsträger, dienen. Dazu benötigen wir gelegentlich auch Kärtchen, auf deren Seiten Wörter oder Symbole aufgezeichnet sind. Mit diesen Elementen gestalteten wir die Einführung in eine natürliche Stochastik in der Grundschule, wobei das stochastische Element erst durch das Schütteln der Urne für die blinden Ziehungen entsteht. Repräsentiert eine Urne eine Klasse mit 8 Jungen und 12 Mädchen (8 blaue und 12 rote Würfel) und eine weitere Urne eine andere Klasse mit 10 Jungen und 10 Mädchen (10 blaue und 10 rote Würfel), so kann man beispielsweise bereits in der 3. Klasse fragen, aus welcher Urne es wahrscheinlicher ist, einen „Jungen“ zu ziehen? Wir ließen die Kinder tatsächlich „blind“ ziehen und ermutigten diejenigen, die die Urnen hielten, gut zu „schütteln“, bevor der Freund oder die Freundin zieht. Diese Kombination der Konstruktion der Urnen mit der Aktion des Schüttelns und der Ziehung verwandelt den Vergleich der Proportionen in den Urnen in einen Vergleich von Wahrscheinlichkeiten. Hier muss wieder betont werden, dass der Begriff „Wahrscheinlichkeit“ nicht thematisiert wurde. Es geht nur um einen zunächst „intuitiven“ Umgang mit den Relationen „gleichwahrscheinlich“ und „wahrscheinlicher als“.

Unsere empirischen Interventionen in verschiedenen Grundschulklassen bestätigten unsere Vermutung, dass eine solche elementare Stochastik nicht nur von den Kindern nahezu spielerisch und sogar mit Freude aufgenommen wird, sondern es wurde auch deutlich, dass dadurch wichtige stochastische Kernkompetenzen vermittelt werden konnten.

4. Kategorisierungen, Kodierungen und Säulendiagramme

Kategorisierungen (beispielsweise in „Jungen und Mädchen“ mit der zusätzlichen Betrachtung eines weiteren Merkmals) können bereits in der ersten Klasse erfolgreich praktiziert werden. Kinder der ersten Klasse erstellen gerne Strichlisten, die aber in einem sehr engen Zahlenraum einzubetten sind. Die zweite Klassenstufe bietet weit größere Möglichkeiten.

In sechs zweiten Klassen in Stuttgart, Kornwestheim und Ludwigsburg wurden zwei Aufgaben mit Steckwürfeln implementiert: einerseits wurden Säulendiagramme anhand von Steckwürfeln konstruiert, andererseits wurden Türmchen von Steckwürfeln zur Kodierung von Merkmalen und Merkmalkonjunktionen konstruiert und als Modellierungsmaterial verwendet.

Abb. 2 Obstpräferenzen in Klassen 2a und 2b

Bei der Unterrichtseinheit mit dem Titel „Obstpräferenzen“ mussten die Kinder der zweiten Klasse der Altenburgerschule in Stuttgart (2a, 2b) zunächst Daten erheben und Strichlisten erstellen. Die Frage, die sie sich gegenseitig stellten, war „Welches ist deine Lieblingsobstsorte?“ Jedes Kind durfte sich für eine einzige Obstsorte entscheiden. Ein Säulendiagramm sollte das Resultat der Erhebung darstellen und jedes Kind musste dieses Diagramm aus Steckwürfeln auf seinem eigenen Tisch konstruieren. Anschließend wurde das Säulendiagramm ins Heft übertragen. Auch das Wort „Säulendiagramm“ wurde von den Kindern gelernt und verwendet. Die Farben für die jeweiligen Obstsorten wurden von den Kindern durch Konsensbildung bestimmt: „blau“ wurde beispielsweise für Banane gewählt, „rot“ für Erdbeere. Als alle Kinder die Säulendiagramme in ihr Heft eingetragen hatten, wurden die Säulen auseinander genommen und die Steckwürfel eines Säulendiagramms jeweils in eine Urne gesteckt. Die neue Frage war: Wenn Jens blind aus dieser Urne zieht, die unsere Klasse repräsentiert, welche Farbe ist wahrscheinlicher? Jens hat tatsächlich blind gezogen und Denise musste davor die Urne „schütteln“ um die Steckwürfel zu durchmischen. Die Resultate der Ziehungen wurden aufgeschrieben. Die Verbindung zwischen der rein statistischen Beschreibung der Obstpräferenzen mit der Ziehung aus der Urne, deren Komposition aus den auseinander genommenen Säulen bestand, fanden wir in diesem Kontext sehr wichtig.

Die Kinder der sechs zweiten Klassen haben während der nächsten Doppelstunde auch mit „binären“ Türmchen gearbeitet. Die Klassen 2a und 2b der Altenburgerschule Stuttgart haben beispielsweise die Frage bearbeitet „Wer mag Mathematik, wer mag Deutsch?“. Wieder durfte jedes Kind sich für nur eins der zwei Fächer entscheiden. Die Frage „Mögen eher Mädchen oder Jungen Mathematik?“ wurde mittels der Konstruktion von Türmchen, wie in Abb. 2 dargestellt, beantwortet.

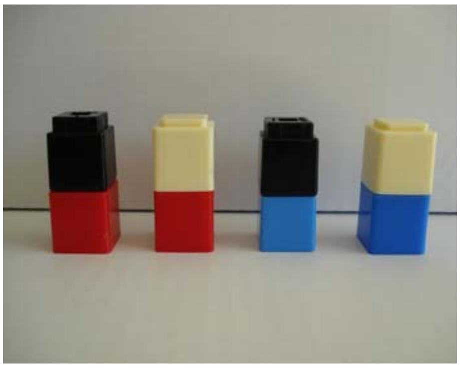

Abb. 3 Binäre Türmchen

Die Kodierungsvorschrift wurde an die Tafel geschrieben:

1. „Mädchen“ = „rot“,
2. „Junge“ =„blau“;
3. „Mathematik“ = „schwarz“,
4. „Deutsch“ = „weiß“.

Nun sollte die Klasse, als Gesamtheit von Jungen und Mädchen und somit als Population von roten und blauen Würfeln, „konstruiert“ werden. Die Umfrage („wer mag was“) wurde von einer aus 3 Kindern bestehenden Forschergruppe realisiert. Sie haben eine 4-Feldertafel hergestellt (Mädchen-Jungen × Schwarz-Weiß). Der Name jedes Kindes wurde an die entsprechende „Stelle“ geschrieben. Dann mussten alle einen Repräsentanten für jedes Kind (sich selbst inklusive) auf ihren Tischen enaktiv konstruieren: ein Junge, der Mathe lieber als Deutsch mag, ist beispielsweise ein blau-schwarzes Türmchen (Steckwürfel und somit Türmchen haben eine Richtung, sie sind sozusagen geordnet). Dann wurde z.B. die folgende Forschungsfrage beantwortet: „Nehmen wir an, ein Kind dieser Klasse bevorzugt das Fach Mathematik. Was meinst Du, ist es eher ein Mädchen oder ein Junge?“

Die Kinder beantworteten diese und andere Fragen durch Zählen ihrer Türmchen. Die konsequente Verwendung des Wortes „Anteil“ wurde von den Kindern auch erfolgreich praktiziert: „5 von 20“ oder „3 von 9“.

Bei Interventionen in der dritten Klasse wurden viele Säulendiagramme konstruiert. Begriffe wie Median und Durchschnitt wurden geübt. Urnen wurden auch systematisch konstruiert. Die Erfahrung hat uns gezeigt, dass die dritte Klasse sich zur Festigung der statistischen Begriffe und auch zu den ersten Elementen einer Urnenarithmetik eignet (siehe 4). Bei den neunjährigen Schülerinnen der vierten Klasse konnten wir viel freier mit der Einführung neuer Begriffe umgehen (siehe 5).

Die Unterrichtseinheiten in einer vierten Klasse in Stuttgart, die von Kurz-Milcke durchgeführt wurden (Kurz-Milcke & Martignon, 2006), belegten, dass Neunjährige sehr gut mit der Inversion quantifizierter Kategorisierungen und somit mit ersten Elementen Bayesianischen Schließens umgehen können. Kurz-Milcke entwickelte eine enaktive Realisierung Bayesianischen Schließens „auf dem Boden“ anhand von Bäumen für die enaktive Konstruktion anhand von natürlichen Häufigkeiten.

5. Urnenarithmetik als Vorstufe der Normierung und von Brüchen

Die Einführung von Brüchen wird meistens (siehe beispielsweise Padberg, 2002) über die gerechte Einteilung von bereits existierenden *Einheiten* wie Kuchen, Pizzas und Tafeln Schokolade realisiert. Die Normierung wird nicht thematisiert; die Einheiten sind bereits vorhanden. Der Weg, den wir hier vorschlagen, ist eine Vorbereitung zu dem Schritt der Normierung bei Proportionen, bevor Brüche behandelt werden.

Die Repräsentationen von Brüchen, die in der Schule eingeführt werden, sind, von einem kognitionspsychologischen Standpunkt, nicht alle äquivalent. Betrachten wir beispielsweise einen Auszug aus den Arbeitsmaterialien für die Behandlung von Brüchen in der sechsten Klasse:

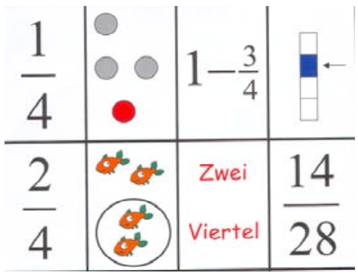

Abb. 4: Aus www.4Teachers.de

Die natürliche Frage, die sich hier stellt ist:

Sind die Repräsentationen in den acht Zellen dieser Tabelle äquivalent?

Wenn 1 von 4 von Hänschens Murmeln rot ist, dann ist in der Tat ein Viertel seiner Murmeln rot. Dennoch liegen die zwei Feststellungen

„1 von 4 Murmeln ist rot“

und

„$\frac{1}{4}$ der Murmeln ist rot“

kognitiv weit auseinander. Die erste ist der ursprünglichen *natürlichen*, also *unnormierten* Arithmetik des Kindes angepasst. Die zweite ist die Konsequenz einer Normierung deren Notwendigkeit aus der Kommunikation über Verhältnisse (in den jeweiligen individuellen Welten) entsprang. Unser Vorschlag (siehe auch Winter, 1985) besteht darin, Repräsentationsformate wie „1 von 4“ und „$\frac{1}{4}$“, die in der üblichen Behandlung von Brüchen oft verschränkt sind, zeitlich zu entkoppeln. Bereits in der Grundschule kann die Arithmetik der Vergleiche von Verhältnissen wie „1 von 4“ erfolgreich ermittelt werden, und zwar nicht nur als Basis für die Wahrscheinlichkeiten, sondern auch als Motivation und Vorbereitung für Brüche. In der dritten und in der vierten Klassenstufe kann man Urnenvergleiche als Übung für das proportionale Denken einführen. Der Vergleich zwischen Urnen ist ein Vergleich zwischen Proportionen. Wenn dann auch aus den zu vergleichenden Urnen blind gezogen wird, und die „günstigere“ Urne bestimmt wird, d.h., diejenige, aus der eine spezifische Ziehung wahrscheinlicher ist, hat man den Schritt vom proportionalen zum stochastischen Denken vollbracht.

Die 3. und 4. Klassen bieten die Möglichkeit, erste Ansätze des proportionalen Denkens einzuführen und zwar mittels einer Urnenarithmetik. Man kann mit ganz einfachen Urnenvergleichen beginnen. Enthält eine Urne einen blauen und zwei gelbe Steckwürfel, während eine weitere Urne zwei blaue und fünf gelbe Würfel enthält, so stellt sich die Frage, wie man die Urnen vergleicht: Wo sind „mehr“ blaue Würfel? Es ist wichtig zu beobachten, dass die natürlichen Häufigkeiten beim Hantieren mit Proportionen dann verlassen werden müssen, wenn wir Vergleiche, aber auch Additionen von Proportionen einführen. Natürliche Häufigkeiten repräsentieren die Welt *eines* Individuums, bevor diese Welt in Berührung mit einer anderen Welt kommt. Die üblichen Schwierigkeiten bei der Addition von Brüchen, wie der klassische Fehler

$\frac{1}{3}+\frac{2}{7}=\frac{3}{10}$, entspricht dem Denken in natürlichen Häufigkeiten (was diesen Fehler somit auch auf „natürliche„ Weise erklären kann). Diese Form der Addition entspricht auch dem bloßen „Zusammenschmeißen“ zweier Urnen, deren Inhalte in Abb. 5 dargestellt sind:

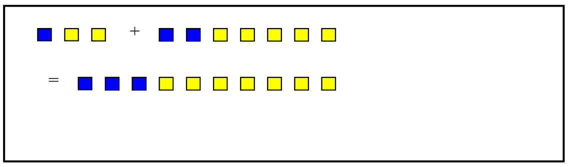

Abb. 5. Die Addition von natürlichen Häufigkeiten entspricht nicht der Addition von Proportionen!

Bekanntlich ist proportionales Denken für Kinder zunächst sehr „schwierig“. Eine Reihe von Experimenten von Piaget belegte, dass Kinder oft beim proportionalen Denken „Fehler“ machen. Sie betrachten beispielsweise die Verhältnisse 1 : 2 und 2 : 3 als äquivalent (für eine ausführliche Beschreibung dieser Täuschungen siehe auch Koerber, 2003). Die ersten Einschätzungen von Piaget wurden später von zwei Generationen von Entwicklungspsychologen relativiert: Susanne Koerber hat in ihrem Buch zum proportionalem Denken von Kindern nicht nur die historisch relevanten Entdeckungen der Entwicklungspsychologen zusammengefasst und beschrieben, sondern über eine Reihe eigener neuer Experimente berichtet (Koerber, 2003). Das Fazit aus ihrem Buch ist, dass gute Repräsentationen, in ihrem Fall graphische Darstellungen von Proportionsgeraden, und enaktives Hantieren mit (und „Schmecken“ von) Mischungen aus Getränken (Orangensaft und Zitronensaft) das Verständnis für Proportionsvergleiche schärft und mögliche Verzerrungen (die zum Teil von Piaget postuliert wurden) ausräumen kann.

Für uns ist der Vergleich von Urnen der erste Schritt in Richtung Normierung und Brüche. Wichtig scheint uns vor allem, Kindern die Notwendigkeit von Urnen-Vergleichen deutlich zu machen. Können Grundschulkinder die Nützlichkeit der Antwort auf die Frage verstehen, ob „1 von 3“ mehr als „2 von 7“ ist? Welche Motivation für das gute Hantieren mit Proportionen kann die Grundschule vermitteln?

In einer 3. Klasse in Kornwestheim haben wir Klassenvergleiche eingeführt. Die Lehrerin hat von den drei 4. Klassen der Schule erzählt: In einer, sagen wir A, gibt es 11 Mädchen und 12 Jungen, in einer anderen, sagen wir B, 11 Mädchen und 11 Jungen und in einer weiteren, sagen wir C, 11 Mädchen und 9 Jungen.

Sie ließ Urnen für diese drei Klassen konstruieren anhand von roten (Mädchen) und blauen (Jungen) Würfeln. Als die Urnen fertig waren, stellte sie die Frage: Wo sind mehr Mädchen? Die Schülerinnen und Schüler antworteten, wie erwartet, dass die Zahl der Mädchen immer gleich war, aber in Klasse C die Mädchen wirklich „mehr" sind. Die Lehrerin führte die Begriffe „absolut" und „relativ oder vergleichsweise" ein. *Absolut* gesehen haben alle drei Klassen gleich viele Mädchen. Klasse B hat aber *vergleichsweise (relativ gesehen)* mehr Mädchen.

Eine Urnenarithmetik für binäre Urnen wurde anschließend eingeführt, die aus drei Themen bestand:

1. Äquivalente oder ähnliche Urnen
2. Vergleichbare Urnen
3. Günstigere Urnen

Es handelte sich um 6 Unterrichtsstunden. Während der ersten Stunde wurde im Wesentlichen thematisiert, dass beispielsweise eine Urne mit 1 blauen und 2 gelben Würfeln, symbolisch repräsentiert durch 1|2, und eine mit 2 blauen und 5 gelben Würfeln, symbolisch repräsentiert durch 2|5, zunächst nicht leicht vergleichbar sind. Was kann man aber tun, indem man die Möglichkeiten der Steckwürfel geschickt ausnutzt, um diese Urnen so zu verwandeln, dass sie vergleichbar werden? Die Steckwürfel bieten hier Möglichkeiten, die Fischbein, Pampu und Minzat (1970) bei ihrem bekannten Experiment zum Vergleich von Proportionen nicht hatten. Der enorme Vorteil der Steckwürfel ist, dass sie in neue Einheiten zusammengesteckt werden können, wie in Abb. 4, die zeigt, wie die Proportionen 1|2 und 2|5 verglichen werden können:

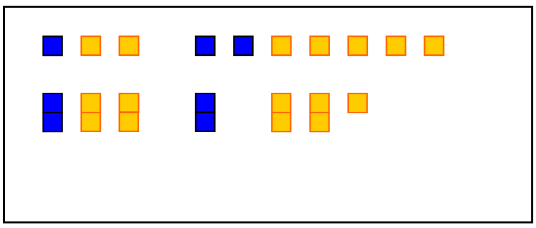

Abb. 6: Vergleich der Urnen 1|2 und 2|5.

Beim Vergleich der Urnen 1|2 und 2|5 ist die Konstruktion der Urne 2|4 (unten links), die zu 1|2 (oben links) ähnlich (äquivalent) ist, von großem Nutzen. Weil die Proportion unten links die gleiche „Form" der Proportion oben rechts hat, wird sie von den Kindern tatsächlich als äquivalent gesehen. Eine Aufgabe, die Drittklässler erfolgreich lösen, ist die der Konstruktion von ganz vielen äquivalenten Urnen.

In den zwei darauf folgenden Unterrichtsstunden ging es um die Konstruktion von ähnlichen oder äquivalenten Urnen. Die Notation 2|3 (die im Wesentlichen von Wollring (1994) stammt, der die Notation U(2|3) verwendete) wurde eingeführt, um die Urne zu bezeichnen, die 2 rote und 3 blaue Würfel enthält. Die Lehrerin schrieb auf die Tafel: „Die Urne 2|3 und 4|6 sind ähnlich; die Urnen 4|6 und 6|9 sind auch ähnlich." Es wurden Teams aus je drei Kindern gebildet und diese hatten die Aufgabe, die entsprechenden Urnen herzustellen. Die Inhalte der Urnen wurden auf die Tische gestellt und die Würfel der jeweiligen Farbe für jede Urne so zusammengesetzt, dass die Ähnlichkeit offensichtlich wurde. Die Lehrerin bat die Kinder, weitere zu diesen Urnen ähnliche Urnen zu konstruieren. Während der darauf folgenden Stunden konstruierten die Teams ähnliche Urnen zu verschiedenen Urnenkompositionen. Die Schülerinnen und Schüler konstruierten „Pyramiden" aus zusammengesteckten Würfeln: die erste Schicht mit 2 roten und 3 blauen Würfeln, die zweite mit 4 roten und 6 blauen Würfeln, und so weiter. Ähnlichkeit hatte in diesem Zusammenhang auch ein Potential zur natürlichen Vernetzung mit der Ähnlichkeit in der Geometrie, wie sie in der Sekundarstufe eingeführt wird. Proportion wurde, wegen der enaktiven Modellierung anhand der Steckwürfel, sowohl geometrisch als auch strikt arithmetisch begriffen. An dieser Stelle muss die bedeutende Arbeit von Dehaene und seiner Gruppe genannt werden, die unsere inspirierte. Dehaene et al. (2006) haben nachgewiesen, dass die Intuition für geometrische Proportion eine anthropologische Konstante ist. Dies testeten sie bei Völkern, die bis heute keinerlei schulische Bildung genießen dürfen, wie die Munduruku im Amazonas Gebiet. Bei der Untersuchung mussten die Versuchspersonen das Bild, das *anders* ist, aus einer Menge von jeweils sechs Bildern, wie in Abb. 7, bestimmen:

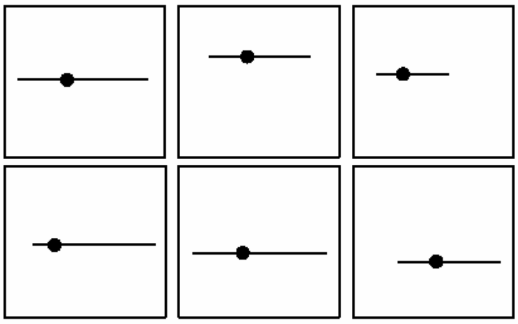

Abb. 7: Welche Figur ist „anders“? (aus dem Test von Dehaene et al., 2006, für die Munduruku im Amazonas Gebiet)

Der Test bestand aus mehr als 80 solcher Fragestellungen. Einige davon waren der Ähnlichkeit gewidmet. Dehaenes Resultate haben uns motiviert, die Urnenarithmetik mit der Unterstützung der geometrischen Intuition von Ähnlichkeit zu implementieren. Die Steckwürfel erlauben diesen Zugang.

Der nächste Begriff, der Begriff „vergleichbar“, musste in Schritten eingeführt werden.

Eine Urne mit 11 roten und 12 blauen Würfeln ist mit einer Urne *vergleichbar*, die 11 rote und 6 blaue enthält, aber nicht mit einer, die 5 rote und 3 blaue enthält. Als vergleichbar wurden Paare von Urnen bezeichnet, die für *eine* der zwei vorhandenen Farben die gleiche Anzahl von Würfeln enthalten aber auch Urnen, welche die *gleiche* Anzahl von Würfeln insgesamt enthalten.

Es ging also zunächst darum, vergleichbare binäre Urnen kennen zu lernen um später Fragen vom Typ „wo sind *vergleichsweise* mehr rote Würfel?“ beantworten zu können. Für die Einführung des Begriffes der „vergleichbaren Urnen“ waren die zwei Stunden notwendig. Die zwei darauf folgenden Unterrichtsstunden wurden der Erweiterung und Konstruktion von vergleichbaren Urnen gewidmet. Die leitende Frage war vom Typ

„Ist 1 zu 2 mehr als 2 zu 5“?

Die Schülerinnen und Schüler, wie auch Raasfeld in seinen Experimenten herausfindet (Arbeiten dazu in Vorbereitung) arbeiten lieber mit diesen Ausdrücken als mit Ausdrücken vom Typ „1 von 3“.

Die Lehrerin zeigte an der Tafel die Schritte, die zur Lösung einer solchen Aufgabe nötig sind. Sie ließ dennoch alle notwendigen Urnen von den Kinderteams konstruieren. Die Urne 1|2 und die Urne 2|5, die den erwähnten Zahlenverhältnissen entsprechen, wurden konstruiert aus blauen und gelben Würfeln. Den Kindern war es bewusst, dass diese Urnen zunächst nicht vergleichbar sind. Die Lehrerin sagte, sie wolle nun die zwei Urnen vergleichbar machen. Welche Urne ist zu 1|2 ähnlich und mit 2|5 vergleichbar, wenn man „blau gegen gelb“ vergleichen will? Die Kinder wussten die Antwort: 1|2 ist zu 2|4 ähnlich und 2|4 ist mit 2|5 vergleichbar. Die Urne 2|4 wurde konstruiert. Die Frage war nun, welche Urne *für blau günstiger* war, oder: wo gab es „in Proportion“ mehr blaue Würfel? Die Kinder fanden die Frage leicht zu beantworten. Die Lehrerin schrieb: 2|4 ist günstiger als 2|5, wenn wir blau wollen“.

Viele Beispiele wurden von der Lehrerin als Aufgabe gestellt, die von den Teams zu bearbeiten waren. Die Lehrerin ließ in der dritten Unterrichtstunde ein Kind folgenden Text auf die Tafel schreiben:

„Beschreibe die Schritte des Urnenvergleichs zwischen 3|7 und 5|9.“

Die Lehrerin ließ die Kinder Teams bilden. Die Aufgabe war jetzt durch das Hantieren mit Würfeln und Urnen, die Schritte für diesen Urnenvergleich zu bestimmen. Will man „blau“ vergleichen, so entdeckten nacheinander alle Teams, braucht man zwei Urnen, eine die zu 3|7 ähnlich ist, und eine, die zu 5|9 ähnlich ist, so dass beide gleich viele blaue Würfel enthalten. Wie geht das? Ein Mädchen aus der Klasse kam auf die Idee, 15 blaue Würfel zu nehmen. Aber welche Urne hat 15 blaue Würfel und ist ähnlich zu 3|7? Die Lehrerin ließ die Teams Vorschläge machen. Die richtige Antwort ließ nicht lange auf sich warten: 7 mal 3, also 21. Die zwei Türme aus 15 blaue Würfeln und 21 gelben Würfeln wurden konstruiert und in eine Urne gesteckt, ohne sie auseinander zu nehmen. Nun kam die Endphase, nämlich die Konstruktion einer Urne, die zu 5|9 ähnlich ist und 15 blaue Würfel enthält. Klar war, dass diese Urne einen Turm aus 15 blauen Würfeln enthalten musste. Aber wie hoch musste der blaue Turm sein? Die Kinder hatten nun doch Schwierigkeiten, eine so große Zahl wie 27 zu bewältigen. Ein Kind hatte die Aufgabe die ganze „Geschichte“ allen anderen zu erzählen: Am Anfang waren zwei Urnen, 3|7 und 5|9. Wir konstruierten eine Urne 15|21, die zu 3|7 ähnlich ist, und dann 15|27, die zu 5|9 ähnlich ist. Dann konnten wir endlich 15|21 mit 15|27 vergleichen. Die Urne 15|21 ist günstiger als 15|27. Das Wort „Erweiterung“ wurde von der Lehrerin anschließend an die Tafel geschrieben. Viele Beispiele von Erweiterungen und Vergleichen wurden behandelt. Bei der nächsten Klassenarbeit wurden das Verständnis der Kinder und ihre Fertigkeiten bei der Erweiterung von Urnen und ihren Vergleichen getestet. Die Aufgaben waren zum Teil als Vergleiche von Schulklassen und von Fußball-Teams verkleidet, zum Teil abstrakt formuliert. Die Resultate waren sehr ermutigend. Mehr als 70% der Schülerinnen und Schüler konnten diese Aufgaben erfolgreich lösen. Wir sind inzwischen überzeugt, dass diese Urnenarithmetik in der Klassenstufe 4 eingeführt werden kann, obschon wir weitere empirische Belege dafür benötigen. Es handelt sich dabei um Unterricht mit Instruktion, nämlich mit der Einführung von neuen Begriffen und Aufgaben. Aber Kinder verstehen die Problematik und sind von den Schritten zur Lösung der Vergleichsaufgaben überzeugt. Der Schwierigkeitsgrad scheint uns angemessen sowie auch die kognitive Herausforderung. Andere, wie Winter (1985), haben ähnliche Formen der Urnenarithmetik sogar in Texten für die Grundschule erarbeitet und als Basis für die Bruchrechnung vorgesehen. Ein solcher Zugang scheint uns ideal.

Diskussion

Die hier beschriebenen Erprobungseinheiten (1-5) beruhen auf einfachen Konstruktionen von Verhältnissen, *natürlichen Häufigkeiten*, die sich enaktiv als Verhältnisse zwischen Haufen von Steckwürfeln oder Kärtchen konstruieren lassen. Das Hantieren mit natürlichen Häufigkeiten kann zu einer Urnenarithmetik überleiten, welche den Weg aus den individuellen Szenarien (der eigenen Erfahrung) zu der Kommunizierbarkeit von Vergleichen bereitet. Die Themenbereiche „Normierung“ und „Brüche“ werden somit zusätzlich motiviert. Die Haufen von Steckwürfeln und ihre Verhältnisse ermöglichen es, bereits in der Grundschule, eine natürliche Stochastik - völlig ohne Mengenlehre - spielerisch einzuführen.

Wir hoffen, dass unsere Ausführungen dazu animieren können, noch weitere Ideen zur Vermittlung stochastischer Elemente in der Grundschule zusammenzutragen und dass diese mathematische Disziplin eines Tages vielleicht ihren festen Platz im Unterricht der Grundschule einnehmen kann.

Wir danken Dr. Elke Kurz-Milcke für Beratung und Hilfe bei der Durchführung einiger Einheiten.

Literatur

Atmaca, S. (2002). Has the human mind adapted to perception and processing of natural frequencies? Diploma Thesis. Max Planck Institut für Bildungsforschung, Berlin

Atmaca, S., Martignon, L.(2004). Hat sich unser Gehirn an die Wahrnehmung und an die Verarbeitung von Häufigkeiten adaptiert? In: Kerzel, Dirk; Franz, Volker; Gegenfurtner, Karl (Hg.): Beiträge zur 46. Tagung experimentell arbeitender Psychologen. April 2004. Lengerich: Pabst Science Publishers, S. 134-138.

Bayes, T. (1763). An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the late Rev. Mr. Bayes, communicated by Mr. Price, in a letter to John Canton. M.A. and F.R.S. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 53; 370-418

Cosmides L., Tooby, J. (1992) Cognitive adaptations for social exchange aus J.Barkow, Cosmides, L. & Tooby,J. (Eds):The adapted Mind. Oxford University Press, 163-229

Dehaene, S., Izard, V., Pica, P. & Spelke, E. (2006) Core knowledge of geometry in an Amazonian indigene group. Science, 311 (5759), pp.381-384

Engel, A., Varga, T., & Walser, W. (1974). Zufall oder Strategie? Spiele zur Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Primarstufe. Stuttgart: Klett.

Fischein, E., Pampu, E., & Minzat, I. (1970) Comparison of ratios and the chance concept in children. Child Development, 41, pp. 365-376

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. Psychological Review, 102, pp. 684-704.

Gigerenzer, G., Todd, P. M. & the ABC Research Group (1999). Simple heuristics that make us smart. New York: Oxford University Press.

GeM Projekt (Gender und Mathematik)(2003-2008) an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg, unterstützt im Rahmen des MWK-Forschungsförderprogramms zur „Institutionalisierung der Frauen- und

Geschlechterforschung an baden-württembergischen Hochschulen“.
Hertwig, R. & Gigerenzer, G. (1999) The conjunction fallacy revisited: How intelligent inferences look like reasoning errors. Journal of Behavioral Decision Making, 12, 275-305
Hoffrage, U., Gigerenzer, G., Krauss, S., & Martignon, L. (2002). Representation facilitates reasoning: What natural frequencies are and what they are not. Cognition, 84, 343-352.
Koerber, S. (2003). Visualisierung als Werkzeug im Mathematik-Unterricht: Der Einfluss externer Repräsentationsformen auf proportionales Denken im Grundschulalter. Hamburg: Dr. Kovač.
Koßwig, F. W. (1975). Untersuchungen zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs beim Kind und ihre Bedeutung für den Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Sekundarstufe I.
Krauss, S. & Wassner, C. (2000). Probleme bei der Interpretation signifikanter Testergebnisse, Beiträge zum Mathematikunterricht 2000. Hildesheim: Franzbecker. S. 370-373.
Krauss, S. & Fiedler, K. (2007). The Phantom of Bayesian Reasoning. [Unv. Man.]
Krynski, T. & Tenenbaum, J. (2003) The Role of Causal Models in Statistical Reasoning. Proceedings of the Twenty-Fifth Annual Conference of the Cognitive Science Society.
Kurz-Milcke, E. & Martignon, L. (2005) Lebendige Urnen und ereignisreiche Bäume: Überlegungen und Versuche zu einer Didaktik der Stochastik in der Grundschule, dieses Heft.
Lücking, A. (2003) The Development of Bayesian Reasoning in Children. Diplomarbeit. Berlin: Freie Universität.
Martignon, L. & Wassner, C. (2005). Schulung frühen stochastischen Denkens von Kindern. Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 8, 202-222.
Piaget, J. & Inhelder, B. (1963) Genesi delle strutture logiche elementari, Torino: Boringhieri.
Sedlmeier, P. (2001) Statistik ohne Formeln. In: M. Borovcnik, J. Engel & Wickmann (Hrsg.) Anregungen zum Stochastikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 83-95
Simon, H. (1990) Invariants of Human behavior. Annual Review of Psychology, 41, 1-19.
Stern, E., Hardy, I., Koerber, S. (2002). Die Nutzung graphisch-visueller Repräsentationsformen im Sachunterricht. In: K. Spreckelsen, A. Hartinger & K. Möller (Eds.), Ansätze und Methoden empirischer Forschung zum Sachunterricht (pp. 119–131). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.
Wassner, C. (2004). Förderung Bayesianischen Denkens – kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen (Dissertation, Universität Kassel). Hildesheim: Franzbecker.
Wassner, C., Krauss, S. & Martignon, L. (2001). Muss der Satz von Bayes schwer verständlich sein? Praxis der Mathematik 6/43
Wassner, C., Martignon, L., Biehler, R. (2004). Bayesianisches Denken in der Schule. Unterrichtswissenschaft, 32 (1) 58-96
Winter, H. (1985) Sachrechnen in der Grundschule, Cornelesen Verlag
Wollring, B. (1994). Fallstudien zu frequentistischen Kompetenzen von Grundschulkindern in stochastischen Situationen - Kinder rekonstruieren verdeckte Glücksräder. In: Maier, Voigt (eds.): Verstehen und Verständigung, IDM-Reihe: Untersuchungen zum Mathematikunterricht. Köln: Aulis. S. 144-181.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. Laura Martignon,

Institut für Mathematik und Informatik, Pädagogische Hochschule Ludwigsburg,

Reuteallee 46, 71634 Ludwigsburg

martignon@ph-ludwigsburg.de

Dr. Stefan Krauss
Institut für Mathematik
Universität Kassel
Plettstr. 46
krauss@mpib-berlin.mpg.de