X. Übung zur Linearen Algebra I

Abgabe: bis Do, 8. Jan. 2009, 11:00 Uhr in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-1/

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar. Es bezeichnet K immer einen Körper.

1. Aufgabe: Seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Man zeige:

(a) $\dim(V) \leq \dim(W)$ genau dann, wenn es eine injektive lineare Abbildung $f\colon V \to W$ gibt.

(b) $\dim(V) \geq \dim(W)$ genau dann, wenn es eine surjektive lineare Abbildung $g\colon V \to W$ gibt.

(c) Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Genau dann ist f injektiv, wenn es eine lineare Abbildung $g\colon W \to V$ gibt mit $g \circ f = 1_V$.

(d) Sei $g\colon W \to V$ eine lineare Abbildung. Genau dann ist g surjektiv, wenn es eine lineare Abbildung $h\colon V \to W$ gibt mit $g \circ h = 1_V$.

2. Aufgabe: Seien V und W zwei K-Vektorräume. Sei $\mathrm{Abb}(V,W) = W^V = \{f \mid f\colon V \to W \text{ Abbildung}\}$ der K-Vektorraum wie in Aufgabe VII.5 definiert.

(a) Man zeige, dass

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) \overset{def}{=} \{f \in \mathrm{Abb}(V,W) \mid f \text{ linear}\}$$

ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(V,W)$ ist.

(b) Gelte ab nun $\dim(V) = m < \infty$ und $\dim(W) = n < \infty$. Sei $\{v_1, \ldots, v_m\}$ eine Basis von V und $\{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Basis von W. Man zeige: Für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$ und $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ gibt es genau ein $f_{k\ell} \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ mit

$$f_{k\ell}(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{j\ell} w_j$$

für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$.

(c) Man zeige $\dim_K\big(\mathrm{Hom}_K(V,W)\big) = m \cdot n$.

3. Aufgabe: Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen, wobei $\dim(V) < \infty$ gelte. Sei $U \subseteq W$ ein Unterraum. Man zeige

$$\dim(f^{-1}(U)) = \dim(U \cap \mathrm{Bild}(f)) + \dim(\mathrm{Kern}(f)).$$

4. Aufgabe: Ein *magisches Quadrat* ist eine Tabelle mit neun Zahlen mit der Eigenschaft, dass die Summen aller Zahlen in jeder Reihe, Spalte und Diagonale gleich sind. Diese Summe heißt die *magische Zahl* des magischen Quadrats. Zum Beispiel ist

4	3	8
9	5	1
2	7	6

ein magisches Quadrat mit magischer Zahl 15. (Die Zahlen müssen aber nicht notwendig verschieden bzw. positiv sein.) Wir betrachten nun alle magischen Quadrate mit Einträgen in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

(a) Man zeige, dass die magischen Quadrate einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum V bilden.

(b) Man zeige, dass die magische Zahl immer das Dreifache der zentralen Zahl ist.

(c) Man zeige, dass die magischen Quadrate mit magischer Zahl 0 einen Unterraum U von V bilden.

(d)* Was ist die Dimension von U? Man finde eine Basis davon. (Hinweis: Man betrachte Kern und Bild einer linearen Abbildung der Form f_A für eine geeignete Matrix A.)

(e) Sei

$$I \stackrel{def}{=} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Man zeige: Zieht man von einem beliebigen magischen Quadrat in V ein geeignetes Vielfaches von I ab, so erhält man ein magisches Quadrat in U, also mit magischer Zahl 0.

(f) Man ermittle nun die Dimension und eine Basis von V.

5. Aufgabe: Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 4, sei $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ eine Basis von V. Seien

$$a_1 = -2b_1 + b_2 + b_4,\ a_2 = b_1 - 2b_3 + b_4,\ a_3 = -2b_1 + 2b_2 - 4b_3 + 4b_4,$$
$$a_4 = -5b_1 + 3b_2 - 2b_3 + 4b_4,\ a_5 = -b_1 + b_2 - b_3 + b_4,\ a_6 = -9b_1 + 6b_2 - 4b_3 + 7b_4.$$

(a) Sei $U = \operatorname{Span}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \subseteq V$. Man bestimme die Dimension und eine Basis von U.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^6 \to V$ die lineare Abbildung mit $f(e_i) = a_i$ für $i = 1, \ldots, 6$. Man bestimme $\operatorname{rang}(f)$ und $\dim(\operatorname{Kern}(f))$.

Das Team der Linearen Algebra wünscht erholsame Feiertage und einen guten Start in das neue Jahr!