III. ÜBUNG ZU LINEARE ALGEBRA I

Abgabe: bis DO, 6. NOV. 2008, 11:00 UHR in die Kästen 109, 110 bzw. 119.

http://math-www.upb.de/~dirk/Vorlesungen/LA-1/

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte erreichbar.

1. Aufgabe: Sei K ein Körper und $q \in K$ mit $q \neq 1$. Man zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

gilt.

2. Aufgabe:

1. Man berechne das (multiplikative) Inverse von $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ in dem Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \stackrel{def}{=} \{a + b\sqrt{2} \mid a,\, b \in \mathbb{Q}\}$ aus 5.3.
2. Man stelle $\frac{3+2i}{9-5i} \in \mathbb{C}$ in der Form $a + bi$ mit $a,\, b \in \mathbb{R}$ dar.

3. Aufgabe: Sei X eine Menge, die genau n Elemente enthält ($n \in \mathbb{N}_0$). Man zeige per vollständiger Induktion nach n, dass die Potenzmenge 2^X genau 2^n Elemente enhält.

4. Aufgabe: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Man zeige:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

und

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}.$$

5. Aufgabe: (a) Man zeige die folgenden beiden Aussagen (aus der Vorlesung) für alle $x,\, y \in \mathbb{C}$:

1. $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

(b) Man zeige, dass die (in der Vorlesung) durch

$$(a, b) \cdot (a', b') \stackrel{def}{=} (aa' - bb', ab' + a'b)$$

auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definierte Verknüpfung $\cdot$ assoziativ ist.