Heinz Griesel, Kassel

Von enaktiven zu verinnerlichten Verfahrenshilfsmitteln beim Aufbau der Rechenfertigkeit des Addierens im 1. Schuljahr[1]

Alle Additionsaufgaben lassen sich letztlich auf das Addieren einer Simultanzahl im Bereich bis 10 zurückführen. Das sind 30 Aufgaben. Simultanzahlen heißen die Zahlen 1, 2, 3 und 4, weil sich die Anzahl der Elemente einer Menge mit 1, 2, 3 oder 4 Elementen ohne Zählen in einem Akt simultaner ganzheitlicher Wahrnehmung bestimmen läßt. Die 30 Aufgaben lauten dann: 1 + 1, 2 + 1,..., 9 + 1, 1 + 2. 2 + 2,.... 8 + 2, 1 + 3, 2 + 3,.... 7 + 3, 1 + 4, 2 + 4,..., 6 + 4. Erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts ist man auf die Idee gekommen, im Unterricht Verfahrenshilfsmittel einzusetzen, mit denen diese 30 Aufgaben verinnerlicht (also in der Vorstellung) gelöst werden können. Nach Vorarbeiten der Zählmethodiker. z.B. Fährmann (1896) wurde diese Idee vor allem von Haase (1906) propagiert und von Breidenbach (1960) nach 1945 wieder aufgegriffen.

Natürlich gab und gibt es auch Rechen- bzw. Mathematikdidaktiker, welche bewußt oder unbewußt auf die Vermittlung eines solchen Verfahrens verzichten. Die Alternative ist, daß die Schüler die Ergebnisse dieser Aufgaben durch häufigen enaktiven oder ikonischen Vollzug schließlich auswendig wissen. Weil das menschliche Gedächtnis umso leistungsfähiger ist, je mehr das Relationsnetz zwischen den Gedächtnisinhalten mit abgespeichert ist. wird der Behaltenseffekt bei diesen Aufgaben verbessert, wenn die Vernetzung zwischen den einzelnen Aufgaben ebenfalls behandelt wird. Das geschah in systematischer Form erstmalig bei Fricke-Besuden "Mathematik in der Grundschule".

Wie kann ein Schüler überhaupt enaktiv oder ikonisch oder verinnerlicht das Ergebnis einer Additionsaufgabe ermitteln? Die Möglichkeiten dazu lassen sich in Stufen anordnen. Als Beispiel betrachten wir die Aufgabe 5 + 3.

1. Stufe: Zwei Mengen mit 5 bzw. 3 Elementen werden hingelegt. Die Gesamtzahl wird bestimmt, indem von vorne gezählt wird.

2. Stufe: Statt von vorne zu zählen. wird an der Menge mit den 3 Elementen weitergezählt: 6, 7. 8. Diese Stufe ist für einen Schüler erst erreichbar, wenn er das sog. operative Stadium nach Piaget erreicht hat, weil er sich in der Vorstellung vergegenwärtigen muß, daß die 1. Menge schon ausgezählt sei.

3. Stufe: Das Weiterzählen erfolgt losgelöst von den Mengen.

Aufgabe: 5 + 3	5	6	7	8	←weiterzählen
		1	2	3	←zählen, wievielmal weitergezählt wurde.

Es laufen dann zwei Zählprozesse zeitlich parallel ab. Das ist eine sehr große Schwierigkeit, zu deren Überwindung i. allg. Hilfsmittel herangezogen werden müssen.

[1] In: Pickert, Günter [Hrsg.]: Mathematik erfahren und lehren: Festschrift für Hans-Joachim Vollrath. Stuttgart [u.a.]: Klett-Schulbuchverl., 1994

Diese werden vom Schüler entweder spontan entdeckt oder je nach Angebot des Lehrgangs übernommen. In diesem Sinne werden die Finger, der Zahlenstrahl, die Perlenkette (Rechenkette), die Zweierreihe im Sinne der Kühnelschen Tafel, das Zahlwortband (vgl. Griesel, 1982, S. 173) sowie dem Zählen aufgeprägte Rhythmen verwendet.

Während die erste und die zweite Stufe eindeutig dem enaktiven oder ikonischen Tun verhaftet sind, besteht bei der dritten Stufe z.T. auch die Möglichkeit der Verinnerlichung. Das soll im folgenden im einzelnen untersucht werden.

Beginnen wir mit dem Hilfsmittel der *Finger*. Diese können grundsätzlich für beide auftretenden Zählprozesse verwendet werden.

1. Möglichkeit:
Die Finger werden für das Weiterzählen benutzt. *Beispiel*: 4 + 3. In diesem Falle werden 4 Finger ausgestreckt, wobei diese Anzahl nach Möglichkeit simultan erfaßt werden sollte. Dann wird 1, 2, 3 (laut) gezählt und nacheinander bei jedem Zählschritt der 5. Finger und an der anderen Hand der 6. und 7. Finger hochgestreckt. Das Ergebnis 7 wird an den Fingern abgelesen. wobei gewußt werden muß, daß alle Finger an der einen Hand ausgestreckt 5 ergeben, die zwei Finger an der anderen Hand simultan erfaßt werden und die auswendig gewußte Fünferzerlegung der Zahl 7 mit 7 = 5 + 2 verwendet wird. Dieses Verfahren läßt sich höchstens bis zur Ergebniszahl 10 durchführen, weil nur 10 Finger zur Verfügung stehen, jedoch auch wenn keine Simultanzahl, sondern eine sog. "große Zahl" addiert wird, wie im Beispiel: 2 + 7. Bei diesem Beispiel werden zunächst zwei Finger hochgestreckt und dann gezählt: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Bei jedem Zählakt wird ein weiterer Finger hochgestreckt. Das Ergebnis 9 wird unter Verwendung der auswendig gewußten Fünferzerlegung 9 = 5 + 4 und des simultanen Erfassens der Zahl der ausgestreckten Finger an der zweiten Hand bestimmt. Es wurde beobachtet, daß dieses Verfahren von Schülern gelegentlich auch beim Addieren von Zahlen innerhalb eines Zehners im zweiten Schuljahr verwendet wird, also bei Aufgaben. wie 43 + 6; 82 + 5 usw. Das Verfahren kann i. allg. nicht bei Überschreiten einer Zehnerzahl verwendet werden.

2. Möglichkeit:
Die Finger werden für das Zählen der Anzahl der Weiterzählakte verwendet. *Beispiel*: 4 + 3. Es wird von 4 an weitergezählt 5, 6, 7 und bei jedem Weiterzählakt ein Finger in die Höhe gespreizt. Stehen 3 Finger hoch - was durch simultanes Erfassen der Fingerzahl 3 bestimmt wird - hört man mit dem Weiterzählen auf. Die letzte Zahl beim Weiterzählen - in unserem Falle 7 - ist das Ergebnis. Es konnte beobachtet werden. daß dieses Verfahren im 1. Schuljahr auch beim Überschreiten der Zahl 10 verwendet wurde. *Beispiel*: 8 + 7. Von 8 an wird weitergezählt 9, 10, 11 usw. und bei jedem Weiterzählakt ein Finger hochgespreizt. Sobald 7 Finger hochgespreizt sind. was an dem simultanen Erfassen von zwei Fingern an der zweiten Hand und der Fünferzerlegung 7 = 5 + 2 erkannt wird, hört man auf weiterzuzählen. Die beim Weiterzählen zuletzt genannte Zahl 15 ist das Ergebnis. Es konnte beobachtet werden, daß dieses Verfahren von einigen Schülern auch im zweiten Schuljahr bei Aufgaben wie 47 + 5; 88 + 6; 73 + 5 verwendet wurde.

Für ein routiniertes Anwenden des Fingerrechnens müssen beim Schüler folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

1. Das simultane Erfassen der Zahl der gespreizten Finger an jeder Hand
2. Wissen, daß eine Hand 5 Finger hat
3. Das Verfügen über die Fünferzerlegungen:
   6 = 5 + 1, 7 = 5 + 2, 8 = 5 + 3, 9 = 5 + 4, 10 = 5 + 5.

Auch bei Erwachsenen konnte dieses Fingerrechnen z.B. bei Aufgaben folgender Art beobachtet werden: Es ist jetzt 9.00 Uhr. Wieviel Uhr ist es 7 Stunden später? Daß es nach 12.00 Uhr mit 1 Uhr, 2 Uhr usw. weitergeht, ist die Ursache für die Verwendung der Finger.

Fingerrechnen ist fast nicht zur Verinnerlichung geeignet. Das ist ein schwerer Nachteil. Daher sollte man es auch niemals zum Unterrichtsgegenstand machen. Andererseits ist es auch sinnlos, es zu verbieten, da es sonst heimlich unter der Bank geschieht. Statt dessen sollte man andere Verfahren methodisch gründlich behandeln, welche zur Verinnerlichung geeignet sind. Wenn Fingerrechnen in einer Klasse gehäuft auftritt oder sich bei einem einzelnen Kind bis ins dritte Schuljahr hält, dann sollte man zunächst selbstkritisch fragen, ob man die Klasse oder das einzelne Kind mit zur Verinnerlichung geeigneten anderen Verfahrenshilfsmitteln hinreichend vertraut gemacht und ob man in hinreichendem Maße das Zurückführen einer Aufgabe auf solche, in denen eine Simultanzahl addiert wird, gelehrt hat.

Ein wichtiges zur Verinnerlichung geeignetes Hilfsmittel ist der *Zahlenstrahl*. Entscheidend für seine jegliche Verwendung ist, daß bei ihm (ebenso wie beim Lineal) die Kästchen (Zwischenräume) zwischen den Strichen gezählt werden. Beim Zahlenstrahl liegt ebenso wie beim Lineal eine kardinale und keine ordinale Verwendung der Zahlen vor. Der Übergang von den konkreten Mengen zu den abstrakteren Kästchen (Zwischenräumen) kann durch vorübergehendes Hineinlegen von Plättchen oder Steckwürfeln in die Kästchen erleichtert werden. Zunächst ist es günstig, alle Striche des Zahlenstrahls mit einer Ziffer, also von 0 bis 10, zu versehen. Später sollte man nur 0, 5 und 10 an etwas größeren Strichen notieren. Das gilt insbesondere für das noch zu besprechende *überschauende Rechnen.*

Bei der Aufgabe 5 + 3 muß von 5 an 3 Kästchen weitergezählt werden. Dieses Weiterzählen kann durch Sprünge vermittelt und durch Bögen ikonisch dargestellt werden. Der Zahlenstrahl übernimmt also das Weiterzählen. Das Zählen der Weiterzählakte führt der Schüler durch. Grundsätzlich kann hierbei der zweite Summand auch eine "große" Zahl sein. Falls jedoch eine Simultanzahl addiert wird, kann die Zahl der weiterzuzählenden Kästchen auch simultan erfaßt werden. In diesem Falle spricht man von *überschauendem Rechnen.* Es wurde 1919 von Eicker erstmalig in die Rechendidaktik eingeführt (vgl. jedoch auch Eckhardt, 1907). Dieses überschauende Rechnen eignet sich bei Verwendung des Zahlenstrahls als Hilfsmittel allein zur Verinnerlichung.

Wird vom Schüler versucht, das Zählen und nicht das simultane Erfassen auch in der Vorstellung einzusetzen. so ist die Fehleranfälligkeit außerordentlich groß. Daß der Zahlenstrahl oder ähnliche Diagramme in der Vorstellung also verinnerlicht beim Rechnen tatsächlich verwendet werden, wurde schon im Jahre 1913 von dem Göttinger Psychologen E. G. Müller gezeigt.

Wenn das simultane Erfassen der Anzahl der Weiterzählakte beim Zahlenstrahl zur Ergebnisfindung eingesetzt werden soll, dann muß es vorher in vielfältiger Weise auch am Zahlenstrahl isoliert geübt werden, z.B. dadurch, daß mit Hilfe zweier Zeigestöcke zwei Zahlen auf dem Zahlenstrahl gezeigt werden. Die Schüler müssen die Zahl der dazwischenliegenden Kästchen bestimmen. Da zwei Kästchen von nahezu allen Schülern simultan erfaßt werden, ist es dann sinnvoll, den Unterschied zwischen den angezeigten Zahlen zunächst auf maximal drei, schließlich auf maximal vier zu steigern. Bei häufigem Vollzug erfolgt die Anzahlbestimmung dann bei immer mehr Schülern nicht mehr durch Zählen, sondern durch simultanes Erfassen. Für eine routinierte Verwendung des Zahlenstrahls ist außer dem simultanen Erfassen ähnlich wie beim Fingerrechnen auch die Verfügung über die Fünferzerlegungen 6 = 5 + 1, 7 = 5 + 2, usw. wichtig.

Anstelle des Zahlenstrahls kann auch eine *Perlenkette* (Rechenkette) mit Fünferzäsur verwendet werden. Das entspricht einem Zehnerblock der Roseschen bzw. Ochlschen Hundertertafel. Ähnlich wie beim Zahlenstrahl übernimmt die Perlenkette das Weiterzählen. Die Anzahl der Weiterzählakte wird vom Schüler nach Möglichkeit durch simultanes Erfassen bestimmt. Für die Ermittlung der Ergebniszahl müssen ähnlich wie beim Fingerrechnen und beim Zahlenstrahl die Fünferzerlegungen zusammen mit dem simultanen Erfassen verwendet werden.

Entsprechend kann man einen *zweireihigen Zehnerblock* der Kühnelschen Hundertertafel verwenden. In diesem Falle müssen vom Schüler außer dem simultanen Erfassen die Zerlegungen 5=3+2, 6=3+3, 7=4+3, 8=4+4, 9=5+4 und 10=5+5 routiniert beherrscht werden.

Wichtig für den Einsatz aller dieser Hilfsmittel ist, daß der Lehrer auf das simultane Erfassen und nicht auf das Zählen hinarbeitet.

Nicht günstig ist i.a. der Einsatz des *Zahlwortbandes*, obgleich gerade dieses sogar von Vorschulkindern spontan anhand des Ziffernblattes einer Uhr verwendet wird. Hier steht zu sehr die ordinale Verwendung der Zahlen im Vordergrund, die beim Schüler zu Mißverständnissen und Fehlern beim Zahlenstrahl, beim späteren Messen mit dem Lineal und bei der Subtraktion führt.

Wichtig sind dagegen dem Zählen *aufgeprägte Rhythmen*. Dieses Hilfsmittel wurde von den Zählmethodikern gegen Ende des vergangenen Jahrhunderts erfunden und in extremer Weise von Fährmann (1896) propagiert. In reduzierter, aber sehr praktikabler Form. findet es sich bei Haase (1906) und Breidenbach (1960). Letztere verwenden i.w. Zweierrhythmen und addieren mit deren Hilfe nur Simultanzahlen. Bei 5 + 3 wird z.B. weitergezählt: 6, 7 (Pause) 8; bei 2 + 4 wird weitergezählt: 3, 4 (Pause) 5, 6. Durch das Aufprägen des Zweierrhythmus ist es nach einiger Übung möglich, die Anzahl der Weiterzählakte quasisimultan zu bestimmen. Das Weiterzählen kann laut, leise oder nur in Gedanken (verinnerlicht) vollzogen werden. Durch rhythmisches Klatschen. Stampfen, Fingerklopfen, Hüpfen usw. kann die Motorik zusätzlich als Hilfsmittel eingesetzt werden. Letzteres wird u.a. in Waldorf-Schulen in z.T. sehr exzessiver Weise praktiziert.

Wenn man rhythmisches Zählen zur Ergebnisfindung im Unterricht einsetzen möchte, dann muß dieses schon sehr früh isoliert geübt werden, damit es dann später bei der Behandlung der Additionsaufgaben sicher zur Verfügung steht und insbesondere auch verinnerlicht, vielleicht unterstützt durch motorische Innervationen, verwendet werden kann. Die Vermutung ist naheliegend, daß vor allem auditive Schülertypen diese Form der Ergebnisfindung bevorzugen.

Die Erfahrung zeigt, daß der gezielte schwerpunktmäßige unterrichtliche Einsatz eines bestimmten Verfahrenshilfsmittels bis ins Erwachsenenalter Auswirkungen auf die persönlich bevorzugten Rechenstrategien hat. Andererseits muß auch die Veranlagung der kindlichen Persönlichkeit berücksichtigt werden. Man könnte daher nach dem Motto des Theaterdirektors in Goethes Faust verfahren: Wer vieles bringt wird manchem etwas bringen. Doch kann eine Vielzahl von Verfahren auch Verwirrung stiften.

Ich möchte daher abschließend nur zwei Verfahrenshilfsmittel empfehlen: Für die stärker visuellen Typen das simultane Erfassen der Weiterzählakte am Zahlenstrahl, für die stärker auditiven Typen das quasisimultane Erfassen durch Rhythmusaufprägung auf das Weiterzählen bei gleichzeitiger Unterstützung durch motorische Innervationen.

Im Sinne eines offenen Unterrichts sollten dem Schüler diese beiden Möglichkeiten im Rahmen von Anregungssituationen angeboten werden. Der Lehrer sollte jedoch nicht enttäuscht sein, wenn der Schüler statt dessen lieber "auswendig gewußt" vorzieht. Hüten sollte man sich davor, seinen eigenen individuellen Typ auf alle ausdehnen zu wollen (vgl. Eckhardt, 1907, S. 22).

Wie schon erwähnt, lassen sich alle Additionsaufgaben letztlich auf die Addition einer Simultanzahl zurückführen. Als Zurückführungsverfahren werden dabei vor allem das Vertauschen der Summanden sowie das Zerlegen eines oder beider Summanden verwendet. Voraussetzung für die Einsicht in die Gültigkeit dieser Verfahren ist, daß der Schüler Identitätskonservierer ist. Hierbei ist ein Kind Identitätskonservierer, falls es die Einsicht gewonnen hat, daß eine Menge und die Anzahl ihrer Elemente nicht verändert werden, falls man die Elemente der Menge in irgend einer Weise räumlich verlagert oder in sich unterschiedlich strukturiert. Identitätskonservierer besitzen also die Fähigkeit zu Mengen und Zahlinvarianz.

Soll z.B. die Einsicht in die Vertauschbarkeit der Summanden beispielgebunden vermittelt werden, so kann man dazu drei rote und sechs gelbe Plättchen in Reihe auf eine Unterlage legen und diese dann um 180° drehen. Da sich die Menge und ihre Gesamtzahl dabei nicht geändert haben - hier wird das Identitätskonservieren benötigt -, gilt: $3 + 6 = 6 + 3$.
Ähnlich wird beim Zerlegen der Summanden oder nur eines Summanden das Identitätskonservieren als Voraussetzung für die Einsichtgewinnung benötigt.

Zählen ist nicht als Mittel zur Einsichtgewinnung brauchbar. Das ist ein weiterer, sehr entscheidender Grund gegen das exzessive zählende Rechnen.

Literatur

Breidenbach, W.: Rechnen in der Volksschule, 6. Aufl. Hannover 1960.
Eckhardt, K.: Visuelle Erinnerungsbilder beim Rechnen. In: Zeitschrift für experimentelle Pädagogik, Bd. 5, Leipzig 1907, S. 1-22.
Eicker, W.: Aufriß des Rechenunterrichts. In: Methodische Strömungen der Gegenwart, Hrsg. 0. Karstädt, Langensalza, 1. Aufl. 1919, 16. Aufl., 1927, S. 289 ff.
Führmann, K. E.: Das rhythmische Zählen. Plauen 1896.
Griesel, H.: Die neue Mathematik für Lehrer und Studenten, Bd. 1, 6. Aufl. Hannover 1982.
Griesel, H.: Ideengeschichtliche Stränge in der deutschen Rechendidaktik. In: Mathematikdidaktik, Bildungsgeschichte, Wissenschaftsgeschichte. Köln 1985.
Griesel-Sprockhoff. Welt der Mathematik 1-4. Hannover 1984-1987.
Haase, H.: Zur Methodik des ersten Rechenunterrichts. 2. vollst. umgearb. Aufl. Langensalm 1906.
Müller, G. E.: Zur Analyse der Gedächtnistätigkeit und des Vorstellungsverlaufs, Kap. 3 "Von den Diagrammen". In: Zeitschrift für Psychologie, Ergänzungsheft 8 III, 1913.