

Von der Hunderterkette zum leeren Zahlenstrahl*

Orientierungsübungen im Hunderterraum

Im vorliegenden Beitrag beschreiben wir eine Unterrichtsreihe zur Orientierung im Hunderterraum, innerhalb derer Übungen an der *Hunderterkette* sowie am *leeren Zahlenstrahl* zentrale Bedeutung zukam. Bevor wir einige dieser Aktivitäten durch Schülerdokumente illustrieren, stellen wir theoretische Vorüberlegungen zum Einsatz von Anschauungsmaterialien dar. Unsere Ausführungen sind zunächst allgemeiner Natur und werden dann auf den Lerninhalt bezogen.

Grundsätzliches zum Einsatz von Anschauungsmaterialien

Veranschaulichungsmittel sollen – wie es der Name schon sagt – abstrakte Begriffe und Operationen anschaulich machen. Dabei soll die Konkretheit der Darstellung den Schülern helfen, mathematische Sachverhalte wirklich zu verstehen anstatt einzelne Wissenspartikel lediglich mechanisch abzuspeichern. Schwierigkeiten im Lehr-/Lernprozeß werden häufig der bei den Schülern nicht vorhandenen Kompetenz zugeschrieben, die anscheinend offensichtlichen Beziehungen zwischen Lerninhalt und Veranschaulichung zu erfassen.

In den letzten Jahren wurde allerdings durch eine Reihe von Studien gezeigt, daß vermeintlich anschauliche Darstellungen alles andere als selbsterklärend sind, sondern (1) speziell für den Mathematikunterricht gelernt werden müssen, um dann als Zeichen oder Konventionen benutzt zu werden. Ihre Deutung ist (2) abhängig von den individuellen Vorerfahrungen der Schüler, und sie ist bereichs- bzw. situationsspezifisch. Zudem wird (3) der ‚mathematische‘ Sinn einer Darstellung nach Gebrauch im Laufe der Schulzeit wieder vergessen (vgl. RADATZ 1995, S. 51). Da die Schüler also erst lernen müssen, aus Veranschaulichungsmitteln diejenigen mathematischen Begriffe herauszulesen, die Lehrbuchautoren und Lehrpersonen damit verbinden (vgl. SCHIPPER & HÜLSHOFF 1984), stellen diese immer Lernstoff und damit eine (potentielle) Ursache von Lernschwierigkeiten dar.

Die Konsequenz aus dieser Ambivalenz – einerseits *Lernhilfe*, andererseits *Lernhemmnis* – kann u. E. nur lauten, (1) die Zahl der Anschauungsmaterialien auf wenige zentrale zu beschränken. Wesentlich ist außerdem, (2) die konstruktive Natur des menschlichen Lernens auch beim Gebrauch von Anschauungsmaterialien zu berücksichtigen und ihnen keinen *didaktischen*, sondern einen *epistemologischen* Status zu geben: Sie sind nicht die Instrumente der *Wissensvermittlung*, sondern *Erkenntnismittel* für die Hand des Lernenden (vgl. WITTMANN 1993). Somit sollten sie nicht nur in Einführungsphasen, sondern über den *gesamten* Lernprozeß hinweg herangezogen werden. Da (3) Anschauungsmittel nicht automatisch für sich selbst sprechen, sollte den Schülern genügend Zeit und Gelegenheit gegeben werden, um sich mit den jeweils intendierten Bedeutungen und Formen des Gebrauchs vertraut zu machen. Das Anschauungsmittel sollte dabei stets als *Arbeitsmaterial* für die Hand der Schüler sowie in einer großen Version als *Demonstrationsmaterial* für das Unterrichtsgespräch bzw. Phasen der Gruppenarbeit verfügbar sein. Des weiteren ist es (4) von Bedeutung, die Übersetzungsprozesse zwischen den verschiedenen Darstellungsformen (z. B. zwischen Handlung und bildlicher Darstellung) sowie zwischen Veranschaulichungen derselben Repräsentationsform (z.B. zwischen Zwanzigerfeld und Zwanzigerreihe) ausführlich zu behandeln (vgl. BÖNIG 1995; WITTMANN & MÜLLER 1990).

Bei der Auswahl von Anschauungsmitteln für den Arithmetikunterricht der Grundschule erscheinen uns die folgenden Kriterien als wesentlich (vgl. WITTMANN 1993; LORENZ 1995; RADATZ 1991 & 1995). Ein Arbeitsmittel sollte ...

- *fundamentale Ideen* der Arithmetik verkörpern;
- über die Schuljahre hinweg *fortsetzbar* sein, so daß es vielfältig nutzbar ist und seine Struktur sich auf unterschiedliche Inhaltsbereiche und Arbeitsformen anwenden läßt;
- helfen, die Verfestigung des *zählenden Rechnens zu vermeiden* bzw. abzubauen;
- Übertragungen in eine von den Schülern *zeichenbare Form* gestatten, so daß die Zahldarstellungen und die arithmetischen Operationen im Kopf vorstellbar sind;
- es den Schülern ermöglichen, *eigene Vorgehensweisen* zu entwickeln, um diese mit den Klassenkameraden auszutauschen und zu diskutieren;

- sich durch *Übersichtlichkeit* und leichte *Handhabbarkeit* auszeichnen sowie möglichst geringe Kosten verursachen.

Flächige Darstellungen – etwa das Hunderterfeld (WITTMANN & MÜLLER 1990, S. 76 f.) – oder Veranschaulichungen der dekadischen Struktur unseres Zahlensystems – etwa die Stellentafel –, sind zur Orientierung in neuen Zahlenräumen oder zum Erwerb von Rechenoperationen außerordentlich wichtig. Auf Anschauungshilfen, die die *lineare* Struktur und damit die fundamentale Idee betonen, daß die Zahlen eine Reihe bilden (WITTMANN 1993; FREUDENTHAL 1973, S. 160), darf ebenso wenig verzichtet werden. Diese Forderung wird dadurch unterstützt, daß das Vorwissen der Schüler – also ihre intuitiven Zahlraumvorstellungen und ihre informellen Rechenstrategien – nicht selten durch lineare Vorstellungen beeinflusst sind und diese im weiteren Lernprozeß eine wichtige Hilfe darstellen können (vgl. GRAVEMEIJER 1994, S. 122 ff.).

Anschauungsmaterialien für das lineare Modell

Als unverzichtbares Anschauungsmittel für das lineare Modell gilt der *Zahlenstrahl*, der allerdings auch eine Reihe von Nachteilen aufweist (vgl. LORENZ 1992, S. 151 ff.; STEINBRING 1994, S. 190 ff.). Von diesen erscheinen uns für den Unterricht im 1. Schuljahr die folgenden vier Punkte als besonders bedeutsam. Der Zahlenstrahl in der üblicherweise verwendeten Version läßt sich (1) kaum mit konkreten Vorstellungen verbinden, denn viele lebensweltliche Kontexte können durch die recht abstrakte Darstellung kaum visualisiert werden (Abb. 1): So fällt es Erstkläßlern verständlicherweise schwer, beispielsweise bei der Aufgabe ‚Peter hat drei Murmeln, Nicole hat fünf Murmeln. Wie viele haben sie zusammen?‘ einen Bezug zwischen dem Bedeutungsgehalt des Kontextes einerseits und der Zahlenstrahl-Visualisierung andererseits herzustellen.

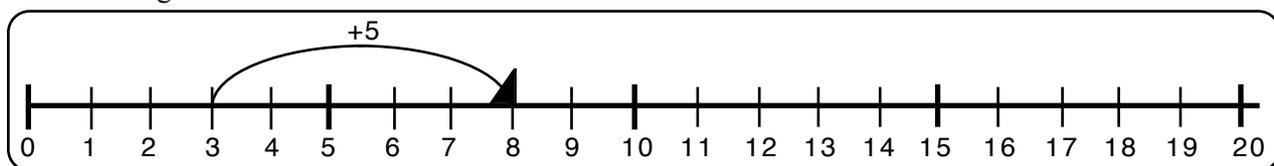


Abb. 1: Der Zahlenstrahl

Außerdem ist der Zahlenstrahl (2) nur schwerlich mit Handlungserfahrungen – wie dem Hinzufügen oder dem Wegnehmen von Objekten – in Beziehung zu setzen. (3) Eine Verknüpfung zwischen dem Anzahl- (wie viele?) und dem Ordnungszahlaspekt (der wievielte?) birgt eine Reihe von Schwierigkeiten, da beispielsweise die Zahl 7 durch den *achten* Strich repräsentiert wird und es für Schüler nicht unmittelbar ersichtlich ist, ob die *Striche* oder die *Zwischenräume* zwischen den Strichen von Bedeutung sind. Des weiteren kann der Zahlenstrahl (4) zum zählenden Rechnen verführen; dieses macht sich spätestens dann negativ bemerkbar, wenn die Schüler am Ende des 1. Schuljahres die (relative) Überschaubarkeit des Zwanzigerraums verlassen.

Eine Alternative für den arithmetischen Anfangsunterricht stellt die *Zwanzigerreihe* dar (Abb. 2; WITTMANN & MÜLLER 1990, S. 18): Mit Hilfe von Wendepfättchen können Zahlen dargestellt werden (im Beispiel 9). Außerdem ist es möglich, Rechenoperationen durchzuführen und sichtbar zu machen (im Beispiel 7+6).

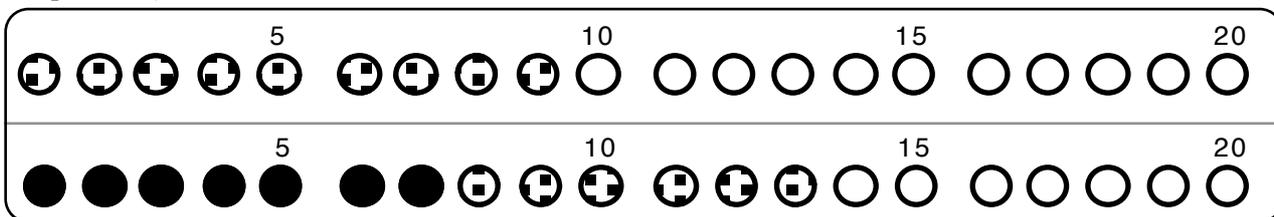


Abb. 2: Die Zwanzigerreihe

Zwanzigerreihe und Pfättchen sind leichter als die Striche des Zahlenstrahls (1) auf konkrete Vorstellungen – die Pfättchen bzw. Kreise können Objekte bzw. Personen repräsentieren – und (2) auf Handlungserfahrungen – das Hinzulegen bzw. das Wegnehmen von Pfättchen – zu beziehen. Außerdem erscheint die Verknüpfung zwischen (3) Anzahl- und Ordnungszahlaspekt als vergleichsweise problemlos. Allerdings kann auch die Zwanzigerreihe (4) zum Abzählen der benötigten Pfättchen verführen, wenn die strukturierte Zahlerfassung nicht hinreichend geübt worden ist. Da die Schüler in späteren Phasen des

Lernprozesses mit dem *Modell* der Zwanzigerreihe operieren sollen, sollte es das Bestreben sein, das Handeln mit Plättchen zunehmend durch das *strukturierte* Operieren in der Vorstellung zu ersetzen (vgl. KRAUTHAUSEN 1995).

Das Modell der Zwanzigerreihe ist prinzipiell auf den Hunderterraum übertragbar; konkretes Handeln mit Plättchen an der Hunderterreihe erscheint uns jedoch als unpraktikabel und erhöht die Wahrscheinlichkeit des Zählens. Hier erscheint uns der Einsatz der realen sowie der ikonisch repräsentierten *Hunderterkette* als sinnvoll, die es im weiteren Lernprozeß zum *leeren Zahlenstrahl* weiterzuentwickeln gilt (TREFFERS & DE MOOR 1990; GRAVEMEIJER 1994, S. 120 ff.). Die Hunderterkette (Abb. 3) besteht aus 50 roten und 50 blauen Holz- oder Wattleperlen, die in farblich sich abwechselnden Zehnergruppen aufgereiht sind, so daß die Schüler die Zehner jeweils als Einheit wahrnehmen und den dekadischen Aufbau des Hunderterraums erkennen können.

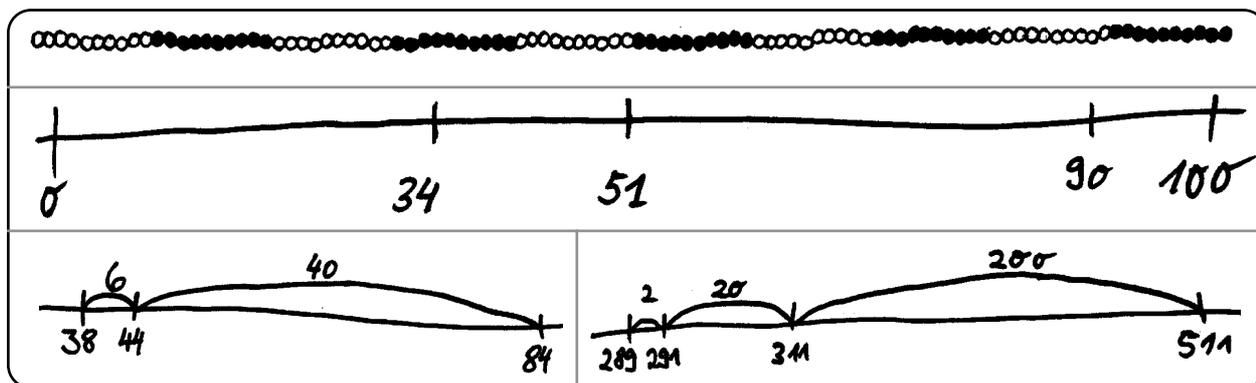


Abb. 3: Hunderterkette und leerer Zahlenstrahl

Der leere Zahlenstrahl (Abb. 3) erwächst aus Abstraktionen von Handlungen an der Hunderterkette; er stellt gewissermaßen die *Perlenschnur* dar, auf der die Kinder die (ungefähren) Orte von bestimmten Perlen lokalisieren bzw. bestimmten Orten die entsprechenden Zahlen zuordnen sollen. Zunächst hält der leere Zahlenstrahl noch Skalierungen als Orientierungspunkte bereit, während die Schüler später auf einem selbst zu zeichnenden Strich Zahlen (im Beispiel 0, 34, 51, 90 und 100) bzw. Rechenoperationen (im Beispiel $38+46$ sowie $511-222$) darstellen (vgl. SUNDERMANN & SELTER 1995). Im Gegensatz zum üblicherweise benutzten Zahlenstrahl enthält der leere Zahlenstrahl also weniger Einzelinformationen. Somit ermöglicht er den Aufbau mentaler Vorstellungsbilder, die auf den Strukturzusammenhängen basieren und die zunehmende Abstraktion von Zahlraum- und Operationsvorstellungen begünstigen. Der leere Zahlenstrahl ist – als *Perlenschnur* der Hunderterkette – einerseits so *konkret*, daß er auf verschiedene bedeutungsvolle Kontexte bezogen werden kann, und andererseits so *abstrakt*, daß er die Ausbildung solcher allgemeiner Vorstellungen anregen kann. Aufgrund seiner Flexibilität ist zudem eine Übertragbarkeit auf größere *Zahlräume* – Tausenderraum., Millionraum – und auf andere *Zahlbereiche* möglich – etwa negative Zahlen oder Brüche (vgl. TREFFERS 1991).

Übungen an der Hunderterkette

Durch die Schilderung ausgewählter Schülerdokumente, die am Ende des 1. Schuljahres entstanden, wollen wir diese Ausführungen nun konkretisieren. Die Unterrichtsreihe ‚Von der Hunderterkette zum leeren Zahlenstrahl‘ begann mit einer Phase, in der die Aufbauprinzipien der Hunderterkette mit Hilfe des Demonstrationsmaterials gemeinsam erarbeitet wurden. Dann stellten die Schüler selbst kleine Hunderterketten her, die sie als Arbeitsmaterial in der Schule und zu Hause zur Verfügung hatten. Mit ihren eigenen – auch im 2. Schuljahr bei der Einführung von Addition und Subtraktion nutzbaren – Ketten führten die Schüler eine Reihe von Aktivitäten durch, von denen wir einige im folgenden darstellen. Die meisten Aufgaben stellten dabei Variationen der beiden folgenden Typen dar: (1) Ein Ort an der Kette wurde vorgegeben, und die Schüler mußten die entsprechende Zahl benennen (im weiteren: ‚Zahl finden‘), sowie (2) eine Zahl wurde vorgegeben, und der zugehörige Ort war zu identifizieren (‚Ort finden‘).

Da es einfacher zu sein scheint, *vorgegebenen Orten* die entsprechenden Zahlen zuzuordnen, wurden Aktivitäten dieses Typs zuerst durchgeführt. Die Schüler sollten dabei leere Kärtchen beschriften, die mit Wäscheklammern an der Hunderterkette befestigt worden waren. Ihre Fortsetzung fand diese Aufgabe in der ikonischen Repräsentationsform.

Zunächst waren hierbei einige Zahlfelder ausgefüllt worden und dienten als Orientierungspunkte; später sollten die Schüler dann sämtliche Felder selbst mit den entsprechenden Zahlsymbolen versehen. Wie das Beispiel von *Mira* zeigt, kam es anfangs natürlich bei größeren Zahlen zu gewissen Schwierigkeiten: So hatte sie Probleme, die 73 und die 89 genau zu lokalisieren, lag jedoch zumindest größenordnungsmäßig richtig (Abb. 4). Die Schüler wurden außerdem gebeten, sich *selbst Orte* an der ikonisch repräsentierten Kette zu *suchen*, die entsprechende Zahl zu identifizieren und dieses ‚Pärchen‘ darzustellen (Abb. 4). Dabei markierte *Tim* beispielsweise die Zehnerzahlen sowie vier weitere Zahlen kleiner als 30. Stellvertretend für unerwartete – wir schreiben bewußt nicht ‚falsche‘ – Bearbeitungen möchten wir *Janines* Lösungen diskutieren. Sie ordnete den Orten der *Zehnerzahlen* (0, 10 & 60) die richtigen Zahlen zu, gab aber ansonsten in der Regel lediglich die entsprechende Einerzahl an. Nicht ganz in dieses System paßt allerdings die Zahl 9, die sie dem Strich hinter der 100. Perle zuwies. Auf Rückfrage erklärte sie, daß sie von der 91 noch 9 weitergezählt habe, so daß das Verständnis der zugrundeliegenden Strukturen nicht ganz so stabil zu sein schien, wie es zunächst den Anschein hatte.

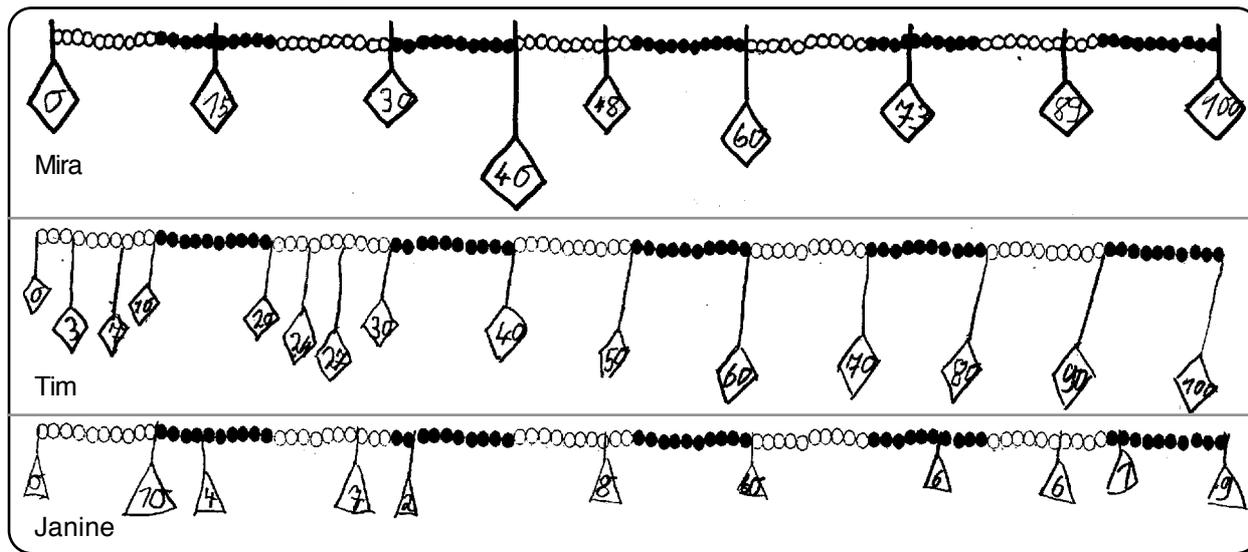


Abb. 4: ‚Zahlen finden‘ an der Hunderterkette

Daran schloß sich die Aufgabenstellung an, *vorgegebene Zahlen* den entsprechenden Orten der Kette zuzuordnen. Von besonderer Wichtigkeit war es im Rahmen dieser Übungsform – wie auch während der gesamten Unterrichtsreihe –, daß über die unterschiedlichen Vorgehensweisen gesprochen und damit ein Nachdenken über das eigene Tun und dasjenige der Mitschüler angeregt wurde. Insbesondere für schwächere Schüler erwies sich die Beschäftigung mit Fragen wie ‚Woher weißt Du, daß Dein Ergebnis richtig ist?‘ oder ‚Wie bist Du auf das Ergebnis gekommen?‘ als außerordentlich hilfreich. So wurde ihnen die Ausnutzung von Stützpunkten – etwa den ‚glatten Zehnerzahlen – nahegebracht und somit eine Alternative zum vollständigen Aufsagen der Zählreihe angeboten. Die Schüler sollten nicht nur unzusammenhängende Zahlen, sondern beispielsweise auch Zahlenfolgen (z.B.: 16, 26, 36, 46 oder 38, 48, 58, 68) anordnen und dadurch ihre Einsichten in die Strukturgleichheit der einzelnen Zehner vertiefen (Abb. 5).

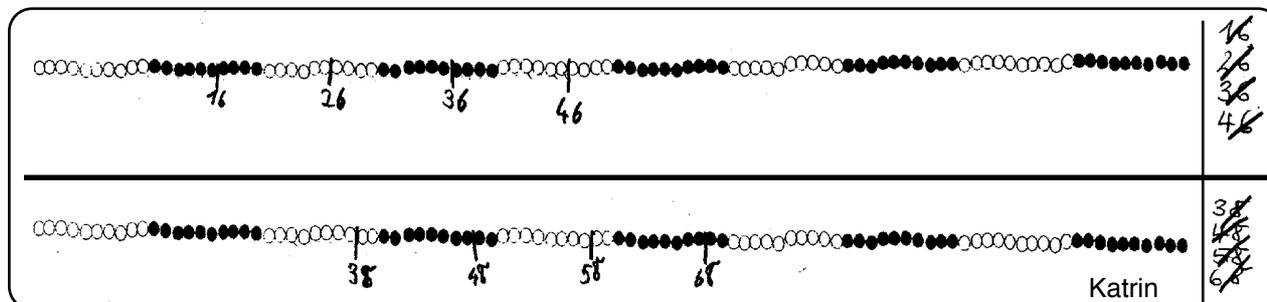


Abb. 5: ‚Orte finden‘ an der Hunderterkette

Eine andere Aufgabe bestand darin, Ergebnisse von Einmaleinsaufgaben einzutragen (3, 6, 9, 12, 15 bzw. 5, 10, 15, 20, 25). *Michaels* Lösung (Abb. 6) zeichnet sich sowohl dadurch aus, daß er jeweils einen kleinen Text formulierte (‚Es wird immer drei (bzw. fünf) mehr‘), als auch dadurch, daß er eine

horizontale Linie, die als Abgrenzung zwischen den verschiedenen Aufgaben gedacht war, dazu benutzte, um die Zahlen zu markieren. Der von ihm verfaßte Satz hatte es unmöglich gemacht, die Zahlen direkt an die Hunderterkette zu ‚hängen‘.

100er-Kette ⚡ Was fällt dir auf?

es wirt imer drei mer

3 6 9 12 15 18

es wirt imer fampf mer

Michael

5
10
15
20
25

Abb. 6: ‚Orte von 1x1-Zahlen finden‘ an der Hunderterkette

Eine weitere Orientierungsübung bestand darin, die 100 Perlen einer Kette an eine bestimmte Anzahl von Kindern zu verteilen und den Lösungsprozeß zu dokumentieren (Abb. 7). Hierbei beschrieben beispielsweise Verena und Vanessa, daß sie zunächst jedem von vier Kindern 20 Perlen gaben und dann die restlichen 20 Perlen verteilten: ‚Wir haben immer erst 20 gezählt und dann noch 5 dazugezählt.‘

Wir haben immer erst 20 gezählt und dann
noch 5 dazugezählt

Verena & Vanessa

Jedem 5 Stück gegeben

Ich habe für jedem 20 gegeben und ich habe
und 100 teilen

weil $5+5=10$ sind Du mus 10 teilen

Beatrice

Abb. 7: 100 Perlen an 4 (bzw. an 20) Kinder verteilen

Beatrice bearbeitete diese Aufgabe analog (‚Ich habe für jeden 20 gegeben, und ich habe jedem 5 Stück gegeben.‘), bevor sie sich selbst die Aufgabe stellte, die Perlen an 20 Kinder zu verteilen, und korrekt löste (‚Weil $5+5=10$. Du mußt 10 teilen und 100 teilen.‘). Durch Rückfragen konnte die Vermutung erhärtet werden, daß sie die Perlen zunächst an zehn Kinder verteilt hatte, so daß jedes zehn erhielt, und dann in einem zweiten Schritt jeweils zehn Perlen in zwei Fünfergruppen zerlegte.

ich Haber Der 100 Keter Gkakt, und ich
Haber. Sogmaht ich Hber Jimmer 10 Sckük Gmagt und Dan
Get Das nicht und Dan Haber ich Sogmaht ich Hber Jimmer
25 Gmaht und Dan Haber ich Schen

Leonie

Abb. 8: Leonies Text

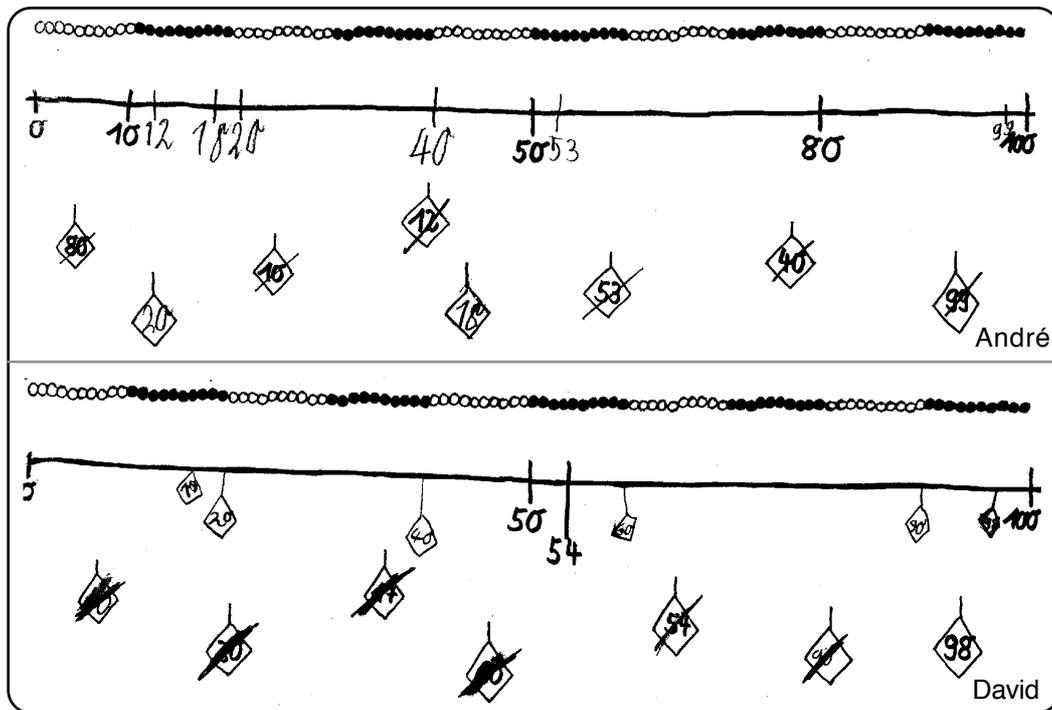


Abb. 10: ‚Orte finden‘ am leeren Zahlenstrahl

Die Anzahl der Orientierungshilfen wurde stetig reduziert, wie beispielsweise aus der Bearbeitung von *Marina* deutlich wird, die auf einem – mit Ausnahme der 0 und der 100 – leeren Zahlenstrahl selbst gewählte Zahlen eintrug (Abb. 11). Sie kennzeichnete neben sämtlichen Zehnerzahlen die 2, die 25, die 48, die 53 sowie die 98 und markierte auch – sei es als Lösungshilfe, sei es um den Bezug für andere Personen zu dokumentieren – die entsprechenden Stellen an der Hunderterkette.

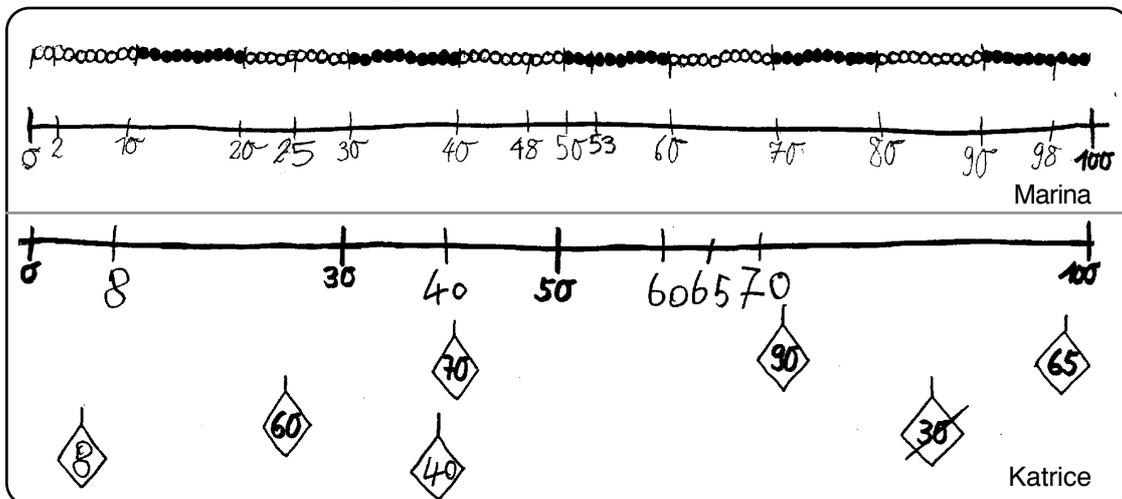


Abb. 11: Aktivitäten am leerem Zahlenstrahl

Im weiteren sollten die Schüler vergleichbare Aktivitäten durchführen, *ohne* daß ihnen die *Hunderterkette* als ikonische Stütze zur Verfügung stand – nicht um sie unwiderruflich von der anschaulichen Basis abzukoppeln, sondern um Entwicklungsfortschritte anzuregen. Wie die Bearbeitung von *Katrice* verdeutlicht (Abb. 11), wurden dabei zur Erleichterung anfänglich einige Hilfszahlen vorgegeben.

Daran schlossen sich Aufgaben an, bei denen nicht mehr der gesamte Zahlenraum von 0 bis 100 betrachtet werden sollte, sondern lediglich bestimmte *Intervalle* (Abb. 12). Wie das Dokument von *Manuel* illustriert, sollten die Schüler hierbei beispielsweise auf einem durch die Intervallgrenzen 40 und 60 definierten leeren Zahlenstrahl die Zahlen 42, 45, 50, 53 sowie 58 eintragen. Diese Grundaufgabe wurde dadurch modifiziert, daß zunächst eine, dann beide Intervallgrenzen wegfielen. *Katis* Dokument

illustriert, wie sie auf einem leeren Zahlenstrahl, auf dem lediglich die 70 als Stützpunkt vorgegeben war, die 69, die 71, die 73, die 77, die 89, die 90 und die 99 markierte.

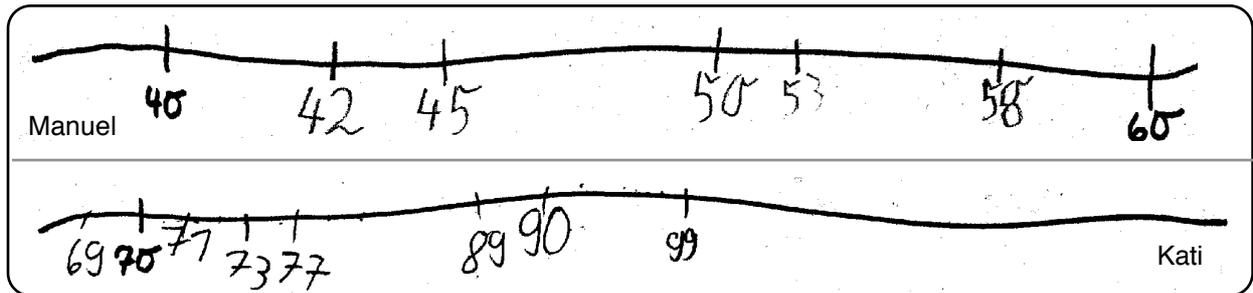


Abb. 12: ‚Orte finden‘ in Teilbereichen des Hunderterraums

Schließlich sollten die Schüler den leeren Zahlenstrahl *selbst* zeichnen und daran die Zuordnungsübungen ‚Zahl finden‘ sowie hauptsächlich die Übungsform ‚Ort finden‘ durchführen (Abb. 13). Bei der Problemstellung, die Orte der 17, 54, 63, 89 sowie 98 zu finden, zeichnete etwa *Lars* zur Strukturierung einige Hilfszahlen (20, 30, 50, 70, 90 sowie 100), um ausgehend von diesen die gesuchten Orte zu ermitteln.

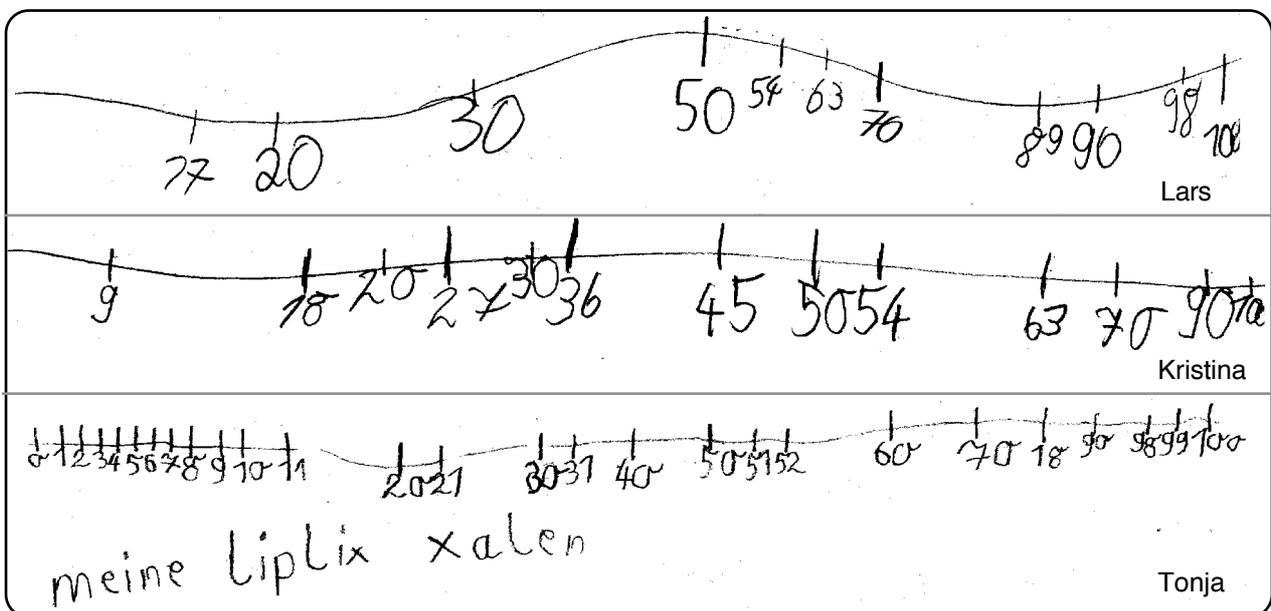


Abb. 13: Zuordnungsübungen am selbst gezeichneten Zahlenstrahl

Den Schülern wurde dabei keine 100%ige Zeichengenauigkeit abverlangt, denn der informelle Charakter dieser Anschauungs- und Notationshilfe sollte bewußt betont werden. Allerdings sollten die Abstände zwischen den verschiedenen Zahlen in der Zählreihe denjenigen angenähert werden, die auf dem leeren Zahlenstrahl zeichnerisch dargestellt wurden. Dieses war bei einigen Schülern naturgemäß noch mit Schwierigkeiten verbunden, ändert jedoch wenig an der Tatsache, wie bemerkenswert gut die meisten Schüler bereits mit Zahlen des Hunderterraums operieren konnten. Wie das Beispiel von *Kristina* zeigt, die die Aufgabe bekam, auf dem leeren Zahlenstrahl die Zahlenfolge 9, 18, 27, 36 einzutragen und fortzusetzen, war sie durchaus in der Lage, deren inhaltlichen Anforderungen zu erfüllen und die zugrundeliegende Gesetzmäßigkeit zu verbalisieren. Bei der Eintragung der Zahlen zog auch sie die glatten Zehnerzahlen als Orientierungshilfen heran und kam erst dann in Schwierigkeiten, als sie versuchte, zusätzlich die 90 und die 100 zu markieren; dieses gelang ihr nicht zufriedenstellend, da sie hierbei an die rechte Blattgrenze stieß. Eine weitere Aktivität bestand darin, die jeweiligen Lieblingszahlen am Zahlenstrahl festzuhalten. Die Eigenproduktion von *Tonja* zeichnet sich durch ein sehr gutes Verständnis der Struktur des Hunderterraums aus; lediglich bei der Verschriftlichung der Zahl 81 unterlief ihr eine Verwechslung von Zehner- und Einerziffer.

Weiterführende Übungen

Lernangebote von verschiedener Schwierigkeit nutzen konnten, sollten den verschiedenen Lernausgangslagen und Lerngeschwindigkeiten so gut wie möglich gerecht werden. Diese Heterogenität machte sich (2) natürlich nach Abschluß der Unterrichtsreihe (ebenso wie während deren gesamten Verlaufs) auch in unterschiedlichen Leistungsniveaus bemerkbar: So gab es einige Schüler, die problemlos und spontan Zahlen des Tausenderraums oder negative Zahlen auf einem selbst gezeichneten leeren Zahlenstrahl eintrugen, während andere noch Probleme damit hatten, beispielsweise die Zahlen 50, 92, 94 und 100 in ihrer ungefähren Lage auf dem leeren Strahl zu lokalisieren. Dieses hat uns jedoch nicht *beunruhigt*, sondern darin *bestätigt*, daß die Lernangebote der Unterschiedlichkeit und damit der Persönlichkeit der Schüler besser gerecht wurden, als ein stromlinienförmiger Lehrgang, in dem der Taktstock der Lehrerin versucht hätte, die Lernprozesse der Schüler zu dirigieren.

Eine gründliche und dementsprechend zeitintensive Behandlung des linearen Modells, wie wir sie in diesem Beitrag propagiert haben, macht andere zentrale Anschauungsmittel und damit auch Verzahnungsübungen mit diesen keineswegs überflüssig. Die abschließend angeführten Vorteile des leeren Zahlenstrahls und der Hunderterkette sollen somit nicht als Argumente gegen den Einsatz beispielsweise des Hunderterfeldes mißverstanden werden, sondern plausibel machen, daß Schwierigkeiten im Umgang mit dem herkömmlichen Zahlenstrahl weder bei der Orientierung im Hunderterraum noch bei den sich daran anschließenden Lerninhalten zu einer Vernachlässigung des linearen Modells führen dürfen. Für die Verwendung des leeren Zahlenstrahls und damit verbunden der Hunderterkette spricht, daß er ...

- mit der Zahlreihe eine *fundamentale Idee* der Arithmetik verkörpert;
- über die Schuljahre hinweg *fortsetzbar* ist und für die Orientierung sowie die Rechenoperationen in größeren Zahlräumen sowie anderen Zahlbereichen herangezogen werden kann;
- dazu beitragen kann, dem *zählenden Rechnen entgegenzuwirken*, da die Schüler dazu angeregt werden, lediglich wesentliche Informationen (Hilfswerte, Zwischenergebnisse, Teilschritte) zu notieren;
- von den Schülern vergleichsweise *problemlos zu zeichnen*, handlungsmäßig grundgelegt und im Kopf vorstellbar ist;
- es den Schülern ermöglicht, *eigene* dem jeweiligen Wissensstand angepaßte *Vorgehensweisen* zu entwickeln (durch Auswahl der Stützen, der Hilfswerte, der Zahlen, der Orte, usw.), deren Verschiedenartigkeit den Lernprozeß des einzelnen Schülers wie auch der Lerngruppe anregt;
- sich durch *Übersichtlichkeit* und leichte *Handhabbarkeit* auszeichnet sowie geringe (bzw. keine) Kosten verursacht.

Insofern handelt es sich beim leeren Zahlenstrahl um eine fundamentale Anschauungshilfe, die mathematische Lernprozesse vom 1. Schuljahr an förderlich begleiten kann. Sein Einsatz leistet einen Beitrag zu der Verwirklichung einer *Konzeption* von Mathematikunterricht, die sowohl fundamentale Lerninhalte und reichhaltige Aufgabenformate als auch zentrale Materialien über die Schuljahre hinweg miteinander verbindet und sich somit in besonderer Weise dem *langfristigen Lernprozeß* der Schüler verpflichtet fühlt.

Literatur

- BÖNIG, D.: Multiplikation und Division. Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschulern. Münster & New York: Waxmann 1995.
- FREUDENTHAL, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1. Stuttgart: Klett 1973.
- GRAVEMEIJER, K.: Developing Realistic Mathematics Education. Utrecht: Freudenthal Institute 1994.
- KRAUTHAUSEN, G.: Die ‚Kraft der Fünf‘ und das denkende Rechnen. In: Müller, G. N. & Wittmann, E. Ch.: Mit Kindern rechnen. Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Arithmetikunterricht der Grundschule. Arbeitskreis Grundschule 1995.
- LORENZ, J. H.: Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung. Göttingen: Hogrefe 1992.
- Ders.: Arithmetischen Strukturen auf der Spur. Funktion und Wirkungsweise von Veranschaulichungsmitteln. In: Die Grundschulzeitschrift. Heft 82/95, S. 9 bis 12.
- RADATZ, H.: Hilfreiche und weniger hilfreiche Arbeitsmittel im mathematischen Anfangsunterricht. In: Grundschule. Heft 9/91, S. 46 bis 49.
- Ders.: ‚Sag mir, was soll es bedeuten?‘ Wie Schülerinnen und Schüler Veranschaulichungen verstehen. In: Die Grundschulzeitschrift. Heft 82/95, S. 50 bis 51.
- SCHIPPER, W. & HÜLSHOFF, A.: Wie anschaulich sind Veranschaulichungshilfen? In: Grundschule. Heft 4/1984, S. 54 bis 56.

- STEINBRING, H.: Frosch, Känguruh und Zehnerübergang – Epistemologische Probleme beim Verstehen von Rechenstrategien im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Maier, H. & Voigt, J.: Verstehen und Verständigung. Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung. Köln: Aulis 1994.
- SUNDERMANN, B. & SELTER, C.: Halbschriftliches Rechnen auf eigenen Wegen. In: Müller, G. N. & Wittmann, E. Ch.: Mit Kindern rechnen. Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Arithmetikunterricht der Grundschule. Arbeitskreis Grundschule 1995.
- TREFFERS, A. & DE MOOR, E.: Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel II: Basisvaardigheden en cijferen. Tilburg: Zwijzen 1990.
- WITTMANN, E. Ch.: ‚Weniger ist mehr‘. Anschauungsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1993. Hildesheim: Franzbecker 1993, S. 394 bis 397.
- WITTMANN, E. Ch. & MÜLLER, G. N.: Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart und Düsseldorf: Klett 1990.

*

abgedruckt in: Müller, G.N. & Wittmann, E.Chr.: Mit Kindern rechnen. Frankfurt a.M. : Arbeitskreis Grundschule 1995 S. 165-178